COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
18 settembre 2007

Teoria 1. [5 punti]

Con riferimento ad un generico sistema lineare tempo invariante (LTI), a tempo continuo, si dia la definizione di risposta impulsiva. Si dica in che modo la risposta impulsiva puó essere utilizzata per calcolare l'uscita (forzata) di un sistema lineare in corrispondenza ad un ingresso fissato $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Con riferimento ad un sistema LTI causale descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di ordine n si descriva una procedura per ricavare la risposta impulsiva a partire dai coefficienti dell'equazione differenziale.

Tutti i passi della procedura devono essere rigorosamente giustificati.

Teoria 2. [5 punti]

Utilizzando il teorema del campionamento si dimostri che ogni segnale $v(t)$ periodico, di periodo assegnato T, la cui espansione di Fourier abbia un numero *finito* di coefficienti di Fourier v_k non nulli, puó essere esattamente ricostruito a partire da un numero finito di suoi campioni. Siano T_c il passo di campionamento necessario al fine di ricostruire esattamente il segnale, e $\bar{k}$ il piú piccolo intero tale che $v_k = 0 \ \forall |k| > \bar{k}$. Dire quale relazione sussiste tra $\bar{k}$, T e T_c.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
18 settembre 2007

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{du(t)}{dt} - 4u(t) \qquad t \in \mathbb{R},$$

i) **[3 punti]** Operando nel dominio del tempo, si calcoli la risposta impulsiva del sistema.

ii) **[3 punti]** Si calcoli l'uscita forzata in corrispondenza all'ingresso $u(t) = \Pi(t - 1/2)$.

iii) **[2 punti]** Si dica se é possibile scegliere condizioni iniziali in modo che l'evoluzione libera sia della forma $y_\ell(t) = cte^{-t}$ con $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Sia

$$h(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 3 - k & k \in \{0, 1, 2\} \\ 0 & k > 2 \end{cases}$$

la risposta impulsiva di un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto.

i) **[2 punti]** Si scriva, se possibile, una equazione alle differenze a coefficienti costanti che descriva un sistema lineare tempo invariante la cui risposta impulsiva sia proprio $h(k)$.

ii) **[4 punti]** Si calcoli l'uscita forzata corrispondente al segnale di ingresso

$$u(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty} u_0(k - 20i) & k \geq 0 \end{cases}$$

dove

$$u_0(k) := \begin{cases} 1 & k \in \{0, 1, 2\} \\ 0 & k \notin \{0, 1, 2\} \end{cases}$$

iii) **[2 punti]** Si calcoli la risposta in frequenza del sistema.

Esercizio 3. **[5 punti]** Si tracci il diagramma di Bode relativo alla funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{s^2 - 10s + 100}{(s + 1)(s^2 + 200s + 10000)}.$$

SOLUZIONI

Teoria 1. [5 punti] Si veda il libro di testo.

Teoria 2. [5 punti] Per il Teorema del campionamento ogni segnale a banda (monolatera) limitata B puó essere ricostruito esattamente dai suoi campioni purché $T_c < \frac{1}{2B}$. Se il segnale é periodico di periodo T, ed i suoi coefficienti di Fourier sono nulli per $|k| > \bar{k}$, allora la sua trasformata di Fourier é nulla per $|f| > \frac{\bar{k}}{T}$. Ne segue che campionando il segnale con passo di campionamento $T_c < \frac{T}{2\bar{k}}$ é possibile ricostruirlo esattamente dai suoi campioni. Poiché il segnale é periodico, scegliendo $T_c = \frac{T}{2\bar{k}+n}$ con $n > 0$, i campioni del segnale negli istanti di tempo hT_c con $h \geq 2\bar{k} + n$ si possono ottenere dai campioni del segnale negli istanti $\{0, T_c, ..., (2\bar{k} + n - 1)T_c\}$. Ne segue che il segnale $v(t)$ si ricostruisce in maniera univoca da $\{v(0), v(T_c), ..., v((2\bar{k} + n - 1)T_c)\}$.

Esercizio 1. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2 = 0$$

che ha una radice doppia in $\lambda = -1$.
La risposta impulsiva ha la forma

$$h(t) = d_0\delta(t) + (d_1e^{-t} + d_2te^{-t})\delta_{-1}(t)$$

Poiché il sistema assegnato é strettamente proprio $d_0 = 0$.
I coefficienti d_1 e d_2 si possono determinare imponendo la condizione

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 2\frac{dh(t)}{dt} + h(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} - 4\delta(t) = \delta_1(t) - 4\delta(t) \qquad t \in \mathbb{R},$$

Facendo i conti si ottiene d_1=1 e $d_2 = -5$, i.e.

$$h(t) = (e^{-t} - 5te^{-t})\delta_{-1}(t)$$

ii) [3 punti] Si indichi con $y(t)$ la risposta (forzata) al segnale $u(t) = \Pi(t - 1/2)$. Si noti, per prima cosa, che $u(t) = \Pi(t - 1/2) = \delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t - 1)$.

Indicando con $y_1(t)$ la risposta (forzata) del sistema al gradino unitario $\delta_{-1}(t)$, per la linearità e tempo invarianza del sistema si ottiene che

$$y(t) = y_1(t) - y_1(t - 1)$$

Di conseguenza é sufficiente calcolare la risposta al gradino unitario

$$y_1(t) = [h * \delta_{-1}](t) = \int_0^t h(\tau)\, d\tau = 5te^{-t}\delta_{-1}(t) - 4(1 - e^{-t})\delta_{-1}(t)$$

da cui:

$$y(t) = 5te^{-t}\delta_{-1}(t) - 4(1 - e^{-t})\delta_{-1}(t) - 5(t - 1)e^{-(t-1)}\delta_{-1}(t - 1) - 4(1 - e^{-(t-1)})\delta_{-1}(t - 1)$$

iii) [2 punti].

L'evoluzione libera é del tipo $y_\ell(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$. Le condizioni iniziali corrispondenti sono: $y(0^-) = c_1$ e $\frac{dy_\ell(t)}{dt}_{|t=0^-} = -c_1 + c_2$.

Basta quindi imporre $y_\ell(0) = 0$ e $\frac{dy_\ell(t)}{dt}_{|t=0^-} = c$ per ottenere l'evoluzione libera desiderata.

Esercizio 2. i) [2 punti]

La risposta impulsiva ha durata finita, e di conseguenza può essere descritta da un'equazione alle differenze con $n = 0$ (sistema MA).

É immediato verificare che l'equazione alle differenze

$$y(k) = 3u(k) + 2u(k-1) + u(k-2) \quad k \in \mathbb{Z}$$

descrive un sistema lineare tempo invariante la cui risposta impulsiva é proprio la $h(k)$ assegnata. Infatti $h(k) = 3\delta(k) + 2\delta(k-1) + \delta(k-2)$.

ii) [4 punti]

La risposta forzata $y_0(k)$ del sistema al segnale $u_0(k)$ si calcola immediatamente ed é della forma

$$y_0(k) = \begin{cases} 3 & k = 0 \\ 5 & k = 1 \\ 6 & k = 2 \\ 3 & k = 3 \\ 1 & k = 4 \\ 0 & k \geq 5 \end{cases}$$

Ne segue immediatamete (linearità e tempo invarianza del sistema) che

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} y_0(k - 20i)$$

iii) [2 punti] La risposta in frequenza del sistema é, per definizione, data dall'espressione

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} h(k) e^{-j\theta k} = 3 + 2e^{-j\theta} + e^{-j2\theta}$$

Esercizio 3. i) [5 punti]

$$H(s) = \frac{s^2 - 10s + 100}{(s+1)(s^2 + 200s + 10000)}.$$

La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = \frac{1}{100} \frac{(1 - j2 \cdot 0.5\omega/10 - \omega^2/100)}{(1 + j\omega)(1 + j\omega/100)^2}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono riportati nella Figura 1.

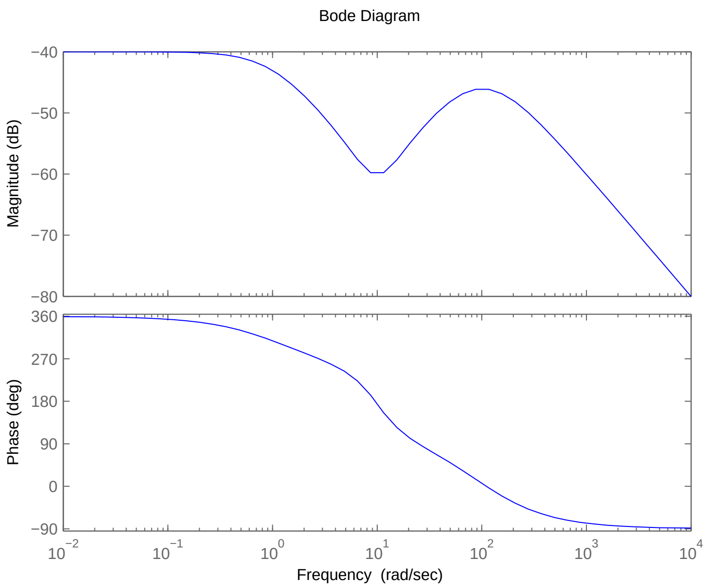

Figura 1. Diagramma di Bode