COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
17 settembre 2008

Teoria 1. [5 punti] Dato un sistema LTI a tempo discreto, descritto da un modello ARMA, si derivi la descrizione di evoluzione libera ed evoluzione forzata del sistema nel dominio delle trasformate zeta.

Teoria 2. [5 punti] Si forniscano le definizioni di stabilità asintotica e stabilità BIBO per un sistema LTI e causale descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. Si discuta il legame tra stabilitá asintotica e BIBO, fornendo una caratterizzazione di quest'ultima in termini di risposta impulsiva. Si illustrino le affermazioni fatte per mezzo di un esempio scelto a piacere.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
17 settembre 2008

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

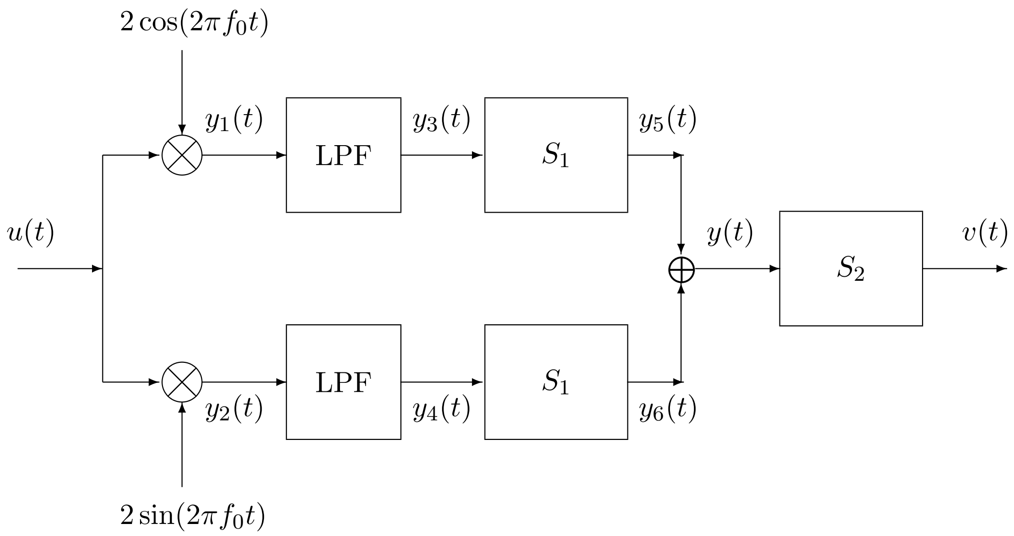
$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \pi^2 v(t) = \frac{d^2 u(t)}{dt^2}, \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

i) Si determini, <u>operando nel dominio del tempo</u>, la risposta impulsiva del sistema, $h(t)$;

ii) si determini la risposta (forzata) del sistema in corrispondenza alla sollecitazione in ingresso

$$u(t) = \delta_{-1}(t) + \delta_{-2}(t).$$

Esercizio 2. Si consideri il seguente schema a blocchi:



dove LPF è un filtro passa-basso ideale di risposta in frequenza

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right),$$

con $f_L > 0$, il blocco S_1 rappresenta un sistema non lineare senza memoria con legame ingresso/uscita

$$v(t) = u(t)^2,$$

mentre il blocco S_2 è un sistema non lineare senza memoria con legame ingresso/uscita

$$v(t) = \sqrt{u(t)}$$

(ipotizzando che il segnale $u(t)$ in ingresso al blocco S_2 sia non negativo). Si dimostri che la risposta del sistema in corrispondenza al segnale d'ingresso

$$u(t) = (1 + m(t)) \cos(2\pi f_0 t + \theta), \quad t \in \mathbb{R},$$

con $m(t)$ limitato nella banda $(-B, B)$, $0 < B < f_0$, θ numero reale, $m(t)$ tale che $m(t) + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, e $B < f_L < 2f_0 - B$, è data da

$$v(t) = 1 + m(t).$$

Suggerimento: si ricordi che

$$\begin{cases} \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] \\ \\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]. \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri il sistema a tempo discreto

$$v(k) - \left(\frac{1}{2} + a\right) v(k-1) + \frac{a}{2} v(k-2) = u(k) - u(k-1), \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

dove a è un parametro reale.

i) Calcolare, al variare di a in $\mathbb{R}$, l'uscita in evoluzione libera del sistema in corrispondenza a $v(-1) = 2a$ e $v(-2) = 4a$.

ii) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, la risposta impulsiva del sistema $h_a(k)$.

SOLUZIONI

Teoria 1. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 6, paragrafo 6.8.

Teoria 2. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 2.

Esercizio 1. i) [3.5 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^2 + \pi^2 = 0,$$

ed ha come radici caratteristiche

$$\lambda_{1,2} = \pm j\pi.$$

Pertanto l'equazione caratteristica ha due radici immaginarie coniugate entrambe semplici. I modi elementari associati a tali radici, di molteplicità 1, sono (in forma reale) $\cos(\pi t)$ e $\sin(\pi t)$, e quindi, tenuto conto del fatto che il sistema in esame è proprio ma non strettamente proprio (e quindi compare un impulso di Dirac nella risposta impulsiva), la risposta impulsiva assume la seguente espressione:

$$h(t) = d_0\delta(t) + [d_1 \cos(\pi t) + d_2 \sin(\pi t)]\, \delta_{-1}(t).$$

Per valutare il valore dei coefficienti d_0, d_1 e d_2, sfruttiamo la definizione di risposta impulsiva (ovvero di risposta in evoluzione forzata del sistema in corrispondenza all'ingresso $u(t) = \delta(t)$) e, a tal fine, andiamo a valutare preliminarmente il valore della derivata prima e della derivata seconda di $h(t)$. Sfruttando la proprietà di campionamento dell'impulso, si trova:

$$\begin{aligned}
\frac{dh(t)}{dt} &= d_0\frac{d\delta(t)}{dt} + d_1\delta(t) + \Big[-d_1\pi \sin(\pi t) + d_2\pi \cos(\pi t)\Big]\delta_{-1}(t) \\
\frac{d^2h(t)}{dt^2} &= d_0\frac{d^2\delta(t)}{dt^2} + d_1\frac{d\delta(t)}{dt} + d_2\pi\delta(t) + \Big[-d_1\pi^2 \cos(\pi t) - d_2\pi^2 \sin(\pi t)\Big]\delta_{-1}(t).
\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale di partenza a $u(t)$ l'impulso di Dirac e a $v(t)$ la risposta impulsiva $h(t)$, si giunge al seguente sistema:

$$\begin{aligned}
&\Big[d_0\frac{d^2\delta(t)}{dt^2} + d_1\frac{d\delta(t)}{dt} + d_2\pi\delta(t) + \Big(-d_1\pi^2 \cos(\pi t) - d_2\pi^2 \sin(\pi t)\Big)\delta_{-1}(t)\Big] \\
&+ \pi^2\Big[d_0\delta(t) + [d_1 \cos(\pi t) + d_2 \sin(\pi t)]\, \delta_{-1}(t)\Big] \\
&= \frac{d^2\delta(t)}{dt^2}.
\end{aligned}$$

Eguagliando i coefficienti dei segnali canonici $\delta_{-1}(t), \delta(t), \frac{d\delta(t)}{dt}$ e $\frac{d^2\delta(t)}{dt^2}$ ai due membri, si ottiene:

$$d_0 = 1, \qquad d_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad d_2\pi + \pi^2 d_0 = 0,$$

da cui segue

$$d_0 = 1, \qquad d_1 = 0 \qquad \text{e} \qquad d_2 = -\pi.$$

Pertanto

$$h(t) = \delta(t) - \pi \sin(\pi t)\delta_{-1}(t).$$

ii) [3 punti] Per determinare $v_f(t)$ conviene lavorare nel dominio delle trasformate di Laplace. La funzione di trasferimento del sistema è

$$W(s) = \frac{s^2}{s^2 + \pi^2}$$

e poichè la trasformata del segnale di ingresso $u(t)$ è $U(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} = \frac{s+1}{s^2}$, la trasformata di Laplace della corrispondente uscita forzata è

$$V_f(s) = \frac{s^2}{s^2 + \pi^2} \frac{s+1}{s^2} = \frac{(s+1)}{s^2 + \pi^2}.$$

La funzione $V_f(s)$ si può riscrivere nella forma

$$V_f(s) = \frac{s+1}{s^2 + \pi^2} = \frac{s}{s^2 + \pi^2} + \frac{1}{s^2 + \pi^2}$$

e quindi ne consegue subito

$$v_f(t) = \left(\cos(\pi t) + \frac{1}{\pi} \sin(\pi t)\right) \delta_{-1}(t).$$

Esercizio 2. [7.5 punti] Si osservi preliminarmente che i segnali $y_1(t)$ e $y_2(t)$ possono essere riscritti nella forma

$$y_1(t) = (1 + m(t)) \left[\cos(2\pi 2 f_0 t + \theta) + \cos\theta\right],$$

e

$$y_2(t) = (1 + m(t)) \left[\sin(2\pi 2 f_0 t + \theta) - \sin\theta\right];$$

si osservi, inoltre, che y_1 è somma del termine $(1 + m(t)) \cos\theta$ la cui trasformata di Fourier ha supporto in $[-B, B]$ e di un termine con supporto in $[-2f_0 - B, -2f_0 + B] \cup [2f_0 - B, 2f_0 + B]$. Di conseguenza, tenuto conto del fatto che la frequenza di taglio f_L del filtro LPF è compresa tra B ed $2f_0 - B$, $y_3(t)$ è dato da

$$y_3(t) = (1 + m(t)) \cos\theta.$$

Analoghe considerazioni portano a concludere che $y_4(t)$ è dato da

$$y_4(t) = -(1 + m(t)) \sin\theta.$$

Inoltre, è immediato verificare che

$$v(t) = \sqrt{y(t)} = \sqrt{y_5(t) + y_6(t)} = \sqrt{y_3(t)^2 + y_4(t)^2} = \sqrt{(1 + m(t))^2} = |1 + m(t)|,$$

dove si è utilizzata l'identità trigonometrica

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1.$$

Infine, nell'ipotesi $1 + m(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}$, si conclude che

$$v(t) = 1 + m(t).$$

Esercizio 3. i) [3 punti] Distinguiamo, preliminarmente, due casi:

- $a = 0$;
- $a \neq 0$.

Per $a = 0$ $n = 1$ e l'equazione caratteristica del sistema è:

$$z - \frac{1}{2} = 0,$$

e quindi ha un solo zero collocato in $1/2$. L'unico modo elementare associato al sistema è $\frac{1}{2^k}$. Tuttavia per $a = 0$ l'unica delle due condizioni iniziali che ci interessa, $v(-1)$, è nulla, per cui l'evoluzione libera risulta identicamente nulla.

Per $a \neq 0$ l'equazione caratteristica del sistema è:

$$z^2 - \left(\frac{1}{2} + a\right) z + \frac{a}{2} = \left(z - \frac{1}{2}\right)(z - a) = 0,$$

e quindi presenta due zeri (eventualmente coincidenti), collocati in a e $1/2$. Distinguiamo, pertanto, due ulteriori sottocasi:

- $a = 1/2$;
- $a \neq 0, 1/2$.

Per $a = 1/2$ abbiamo due zeri coincidenti, ovvero uno zero in $1/2$ di molteplicità 2, e due modi elementari: $\frac{1}{2^k}$ e $k \cdot \frac{1}{2^k}$. Pertanto per $k \geq -2$ l'evoluzione libera è espressa dalla formula

$$v_\ell(k) = c_1 \, \frac{1}{2^k} + c_2 \, k \cdot \frac{1}{2^k}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $v(-1) = 1, v(-2) = 2$ si trova $c_1 = 1/2$ e $c_2 = 0$.

Infine, per $a \neq 0, 1/2$, abbiamo due zeri distinti e due modi elementari: $\frac{1}{2^k}$ e a^k. Pertanto per $k \geq -2$ l'evoluzione libera è espressa dalla formula

$$v_\ell(k) = c_1 \, \frac{1}{2^k} + c_2 \, a^k.$$

Imponendo le condizioni iniziali $v(-1) = 2a, v(-2) = 4a$ si trova $c_1 = a$ e $c_2 = 0$.

ii) [3 punti] Anche in questo caso dobbiamo distinguere i tre casi di prima. Per $a = 0$ $n = m = 1$ e la risposta impulsiva assume la seguente espressione:

$$h_0(k) = d_1 \delta(k) + d_2 \frac{1}{2^k} \delta_{-1}(k-1).$$

Da una semplice riscrittura dell'equazione alle differenze del sistema in cui si sostituisca a $u(k)$ l'impulso $\delta(k)$ e a $v(k)$ la risposta impulsiva $h_0(k)$, segue immediatamente che

$$h_0(0) = 1, \qquad h_0(1) = -\frac{1}{2}.$$

Ciò assicura $d_1 = 1, d_2 = -1$.

Per $a = 1/2$, invece, $n = 2 > m = 1$ e la risposta impulsiva assume la seguente espressione:

$$h_{1/2}(k) = \left(d_1 \frac{1}{2^k} + d_2 k \cdot \frac{1}{2^k}\right) \delta_{-1}(k).$$

Dalla riscrittura dell'equazione alle differenze del sistema in cui si sostituisca a $u(k)$ l'impulso $\delta(k)$ e a $v(k)$ la risposta impulsiva $h_{1/2}(k)$, segue che

$$h_{1/2}(0) = 1, \qquad h_{1/2}(1) = 0.$$

Ciò assicura $d_1 = 1, d_2 = -1$.

Infine, per $a \neq 0, 1/2$, $n = 2 > m = 1$ e la risposta impulsiva assume la seguente espressione:

$$h_a(k) = \left(d_1 \frac{1}{2^k} + d_2 a^k \right) \delta_{-1}(k).$$

Da

$$h_a(0) = 1, \qquad h_a(1) = a - \frac{1}{2}$$

segue

$$d_1 = \frac{1}{2(a - 1/2)}, \qquad d_2 = \frac{a-1}{a - \frac{1}{2}}.$$