COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
5 febbraio 2009

Teoria 1. [5 punti] Si definiscano la serie di Fourier a la trasformata di Fourier. Si ricavi, sotto opportune ipotesi, quale relazione esiste tra i coefficienti di Fourier e la trasformata di Fourier.

Si può mettere in relazione quest'ultimo risultato con il Teorema del Campionamento?

Teoria 2. [5 punti] Si forniscano le definizioni di stabilità asintotica e stabilità BIBO per un sistema LTI e causale descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. Si discuta il legame tra stabilitá asintotica e BIBO, fornendo una caratterizzazione di quest'ultima in termini di risposta impulsiva. Si illustrino le affermazioni fatte per mezzo di un esempio scelto a piacere.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
5 febbraio 2009

Esercizio 1. Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} - 3(b-1)a^2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (1-a^2)\frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + bu(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con a parametro reale.

i) **[3 punti]** Si discuta la stabilità asintotica e la stabilità BIBO al variare di $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

ii) **[2 punti]** Ponendo $b = 0$, $a = 1$, si calcoli la risposta impulsiva del sistema.

iii) **[3 punti]** Ponendo $b = 0$, si trovino i valori di a per i quali l'evoluzione libera del sistema contiene solamente termini costanti e termini oscillatori smorzati.

Esercizio 2.

Si consideri il sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) + y(k-1) + \frac{1}{4}y(k-2) = u(k-1) - u(k-2) \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

i) **[4 punti]** Si calcoli, operando nel dominio del tempo, la risposta impulsiva del sistema.

ii) **[3 punti]** Si determini se possibile un ingresso $u(k)$ causale e limitato, per il quale la risposta forzata $y_f(k)$ soddisfi

$$\lim_{k\to\infty}(y_f(k) - A\delta_{-1}(k)) = 0$$

per qualche scelta della costante $A \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. **[5 punti]** Si tracci il diagramma di Bode relativo alla funzione di trasferimento

$$H(s) = 20\frac{s^2 - 1000s}{(s+1)(s^2+2s+100)}$$

SOLUZIONI

Teoria 1. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 2 e capitolo 5;

Teoria 2. [5 punti] Si veda il libro di testo, capitolo 5

Esercizio 1. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$s^3 - 3a^2(b-1)s^2 + (1-a^2)s = 0,$$

Il polinomio caratteristico ha sempre una radice in $s = 0$ e quindi il sistema non è mai asintoticamente stabile.

Per quanto riguarda la BIBO stabilità, calcoliamo la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s+b}{s^3 - 3a^2(b-1)s^2 + (1-a^2)s},$$

la quale ha (almeno) un polo nell'origine se $b \neq 0$. Di conseguenza, il sistema NON è BIBO stabile per $b \neq 0$. Se $b = 0$ la funzione di trasferimento diventa:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3a^2 s + (1-a^2)}$$

I poli della funzione di trasferimento sono gli zeri del denominatore (non ci possono essere altre cancellazioni). Per la regola di Cartesio i poli sono tutti a parte reale negativa se e solo se tutti i coefficienti hanno lo stesso segno, il che accade se e solo se $\{|a| < 1\} \cap \{a \neq 0\}$.

In conclusione il sistema non é mai asintoticamente stabile ed é BIBO stabile se e solo se: $b = 0$ e $\{|a| < 1\} \cap \{a \neq 0\}$.

ii) [2 punti] La funzione di trasferimento, per $a = 1$, $b = 0$, risulta:

$$H(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

La risposta impulsiva si può trovare per antitrasformazione:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)](t).$$

Basta calcolare l'espansione in fratti semplici di $H(s)$

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3}$$

da cui si ricava immediatamente $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$.

Di conseguenza la risposta impulsiva é:

$$h(t) = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right](t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})\delta_{-1}(t).$$

iii) [3 punti] L'evoluzione libera è una combinazione lineare dei modi del sistema, che sono determinati dalle radici del polinomio caratteristico. Per $b = 0$ risulta $p(s) = (s^2 + 3a^2 s + (1-a^2))s$. Le radici sono $\lambda_1 = 0$ e

$$\lambda_{2,3} = -\frac{3}{2}a^2 \pm \sqrt{\frac{9}{4}a^4 - (1-a^2)}$$

Affichè i modi siano costanti o di tipo oscillatorio (smorzato) è necessario e sufficiente che

$$\frac{9}{4}a^4 - (1-a^2) < 0, \quad a \neq 0$$

le radici reali di $\frac{9}{4}a^4 - (1-a^2) = 0$ sono $a_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{-2+\sqrt{40}}}{3} \simeq \pm 0.6932$.

Quindi l'evoluzione libera soddisfa alle condizioni assegnate se e solo se $|a| < |a_{1,2}|$ e $a \neq 0$.

Esercizio 2. i) [4 punti] L'equazione alle differenze é nella "solita" forma con $n = 2$, $m = 2$. L'equazione caratteristica é

$$z^2 + z + \frac{1}{4} = 0$$

le cui radici sono $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}$.

Quindi la risposta impulsiva si scrive nella forma:

$$h(k) \quad = \quad d_0\delta(k) + \left(c_1\left(-\frac{1}{2}\right)^k \delta_{-1}(k-1) + c_2 k\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)\delta_{-1}(k-1)$$

I coefficienti d_0, c_1, c_2 si determinano imponendo i primi $3 = \max(n, m+1)$ valori della risposta impulsiva; questi si calcolano direttamente dall'equazione alle differenze imponendo $u(k) = \delta(k)$ e $h(k) = 0$ per $k < 0$. Si trova: $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $h(2) = -2$.

Imponendo queste condizioni si ottiene immediatamente: $d_0 = 0$, $c_1 = 4$, $c_2 = -6$.

ii) [3 punti] La funzione di trasferimento del sistema è:

$$H(z) = \frac{z-1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}$$

Il sistema è BIBO stabile, quindi si può parlare di risposta a regime permanente ad un segnale di tipo esponenziale

$$u(k) = Ue^{j\theta k}\delta_{-1}(k), \quad U \in \mathbb{C}.$$

Affinché la risposta a regime permanente sia costante, l'ingresso deve essere un gradino (i.e. $\theta = 0$) di ampiezza opportuna, i.e. $u(k) = U\delta_{-1}(k)$.

L'uscita a regime permanente ha l'espressione

$$y_{rp}(k) = H(e^{j0})U\delta_{-1}(k).$$

Poiché $H(e^{j0}) = H(1) = 0$, $y_{rp}(k) = 0$. Quindi si deve porre $A = 0$.

Si noti che, posto $A = 0$, basta garantire che l'uscita a regime sia nulla. A tale scopo, per la BIBO stabilità, è sufficiente prendere un ingresso la cui trasformata zeta sia una funzione razionale propria con tutti i poli in modulo minore di 1.

In alternativa, si noti che affinchè

$$\lim_{k\to\infty}(y_f(k) - A\delta_{-1}(k)) = 0$$

con $A \neq 0$ è necessario che che la trasformata Zeta della risposta forzata abbia un polo semplice in $z = 1$, con residuo

$$\lim_{z\to 1}(z-1)Y_f(z) = A$$

Poiché $H(z)$ ha uno zero in 1 (i.e. $H(1) = 0$), $U(z)$ deve avere un polo doppio in $z = 1$ (ad esempio $U(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$). Tuttavia un ingresso la cui trasformata zeta ha un polo doppio nell'origine, non può essere limitato e quindi non è ammesso dal testo del problema.

Esercizio 3. i) [5 punti]

La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = -200 \cdot \frac{j\omega(1 - j0.001\omega)}{(1 + j\omega)(1 - 0.01\omega^2 + j2 * 0.1\omega 0.1)}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono riportati nella Figura 1.

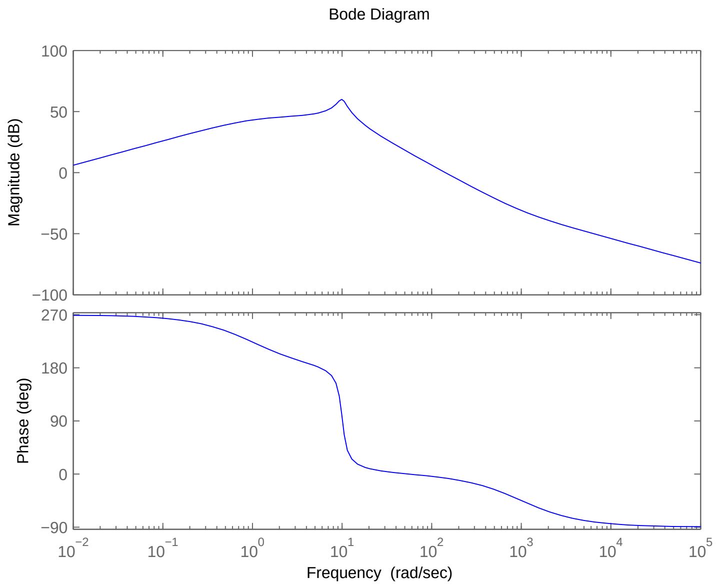

Figura 1. Diagramma di Bode