

## Lezione 7 — 8 Febbraio

Docente: Luca Schenato

Stesori: Beninato D., Bertolaso A., Marcolin G.

## 7.1 Progettazione di controllori

Nelle lezioni precedenti sono state presentate due diverse procedure che si possono utilizzare quando si deve progettare un controllore per il controllo di una o più variabili di un processo. In particolare si è visto che, date delle specifiche progettuali espresse nel dominio del tempo, quali

1. tempo di assestamento  $t_a$
2. sovraelongazione  $M$
3. tempo di salita  $t_s$

i due approcci lavorano addirittura su due domini diversi:

- nel **tempo** (luogo delle radici)
- in **frequenza** (diagramma di Nyquist, diagramma di Bode)

In questo paragrafo si riprenderà brevemente quanto già visto nelle lezioni precedenti, cercando di porre maggiore attenzione agli aspetti prettamente progettuali.

### 7.1.1 Progettazione nel tempo

Per quel che riguarda la progettazione nel dominio del tempo possiamo far riferimento a un sistema in catena chiusa del secondo ordine e alla sua risposta impulsiva, in quanto, come già visto, un sistema in catena chiusa *strettamente stabile* è sempre approssimabile con uno del secondo ordine. Operare con tale approssimazione significa considerare solo i due poli dominanti<sup>1</sup> ( $p_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d$ ), “scartando” quindi tutti gli altri.

In genere un sistema di questo tipo è rappresentato dalla funzione di trasferimento

$$P_c(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

per cui la sua risposta impulsiva è

$$p_c(t) = \frac{e^{-\sigma t}}{\cos\theta} \sin(\omega_d t + \phi)$$

---

<sup>1</sup>I due poli più vicini all'asse immaginario.

con  $\phi = \frac{\pi}{2} - \theta$ .

Fatta questa premessa, è necessario capire in che modo si possono trasferire le specifiche progettuali precedenti in vincoli nel luogo delle radici.

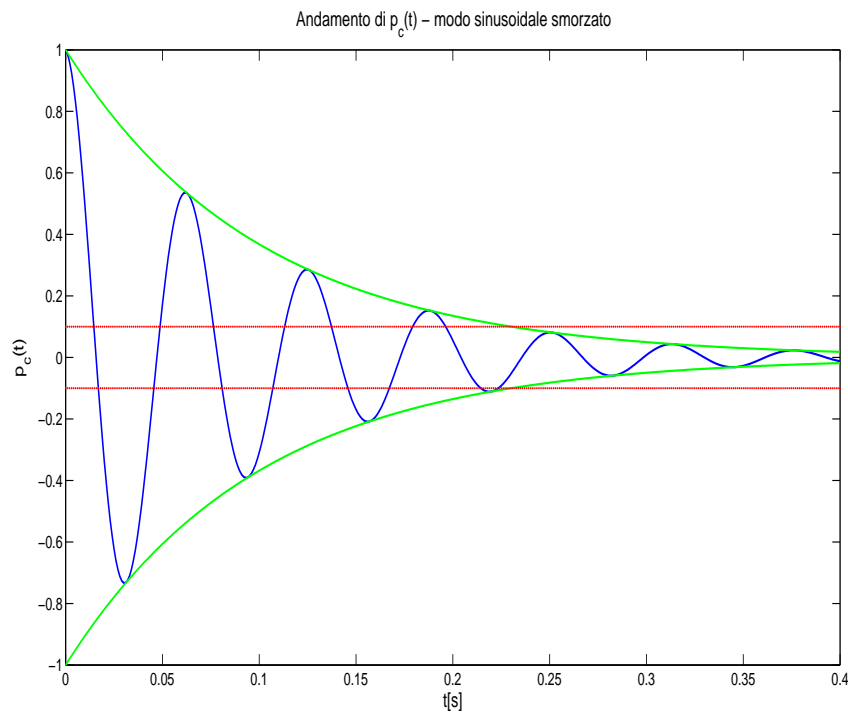
### Tempo di assestamento

Se consideriamo piccoli valori di  $\theta$ <sup>2</sup>, come spesso accade, si può dire che  $\cos\theta \simeq 1$ , per cui la risposta impulsiva diviene

$$p_c(t) \simeq e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \phi)$$

e il suo andamento temporale è rappresentato in figura 7.1.

Ora, se si desidera avere, ad esempio, un *tempo di assestamento* massimo  $t_a$ , dopo il quale il



**Figura 7.1.** Andamento di  $p_c(t)$ .

valore dell'uscita rimanga all'interno della fascia tra il  $\pm 10\%$  del valore di riferimento, deve valere la seguente relazione

$$e^{-\sigma t_a} = 0,1 \quad (7.1)$$

da cui

$$\sigma t_a = \ln 10$$

---

<sup>2</sup>Si ha che  $\theta = \arctan \frac{\sigma}{\omega_d}$ , per cui tanto più piccolo è il valore di  $\theta$ , tanto più i poli dominanti sono vicini all'asse immaginario.

$$\sigma \simeq \frac{2,3}{t_a}$$

Ricordando poi che  $\sigma = \xi\omega_n$ , dove  $\xi = \sin \theta$  e  $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}$ , e supponendo di fissare  $\xi$  in base alla specifica sulla sovraelongazione, come mostrato in seguito, si può scrivere

$$\omega_n \simeq \frac{2,3}{t_{a_{10\%}} \xi}$$

Volendo variare l'ampiezza della "fascia" attorno al valore di riferimento, basta modificare opportunamente la 7.1, semplicemente cambiando il valore a secondo membro dell'equazione.

### Sovraelongazione

Per quanto riguarda la *sovraelongazione*, si può dimostrare che

$$M = e^{-\pi \tan \theta}$$

per cui si può scrivere la seguente tabella, ricordando che  $\xi = \sin \theta$

| $M_{\max}$ | $\xi$ |
|------------|-------|
| 5%         | 0,7   |
| 16%        | 0,5   |
| 35%        | 0,3   |

### Tempo di salita

Infine, si può vedere facilmente che sussiste la seguente relazione tra la frequenza di risonanza naturale  $\omega_n$  e il *tempo di salita*  $t_s$

$$t_s = \frac{1,8}{\omega_n}$$

Per quanto riguarda la progettazione del controllore nel dominio del tempo, ovvero tramite luogo delle radici, bisogna quindi trasferire le specifiche progettuali come segue:

- in base alla sovraelongazione massima desiderata si fissa  $\xi$  in accordo con la precedente tabella. Si noti che

$$M \leq M_{\max} \quad \Rightarrow \quad \theta \geq \bar{\theta} = \arctan \left[ \frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{1}{M_{\max}} \right) \right]$$

e  $\xi = \sin \theta$

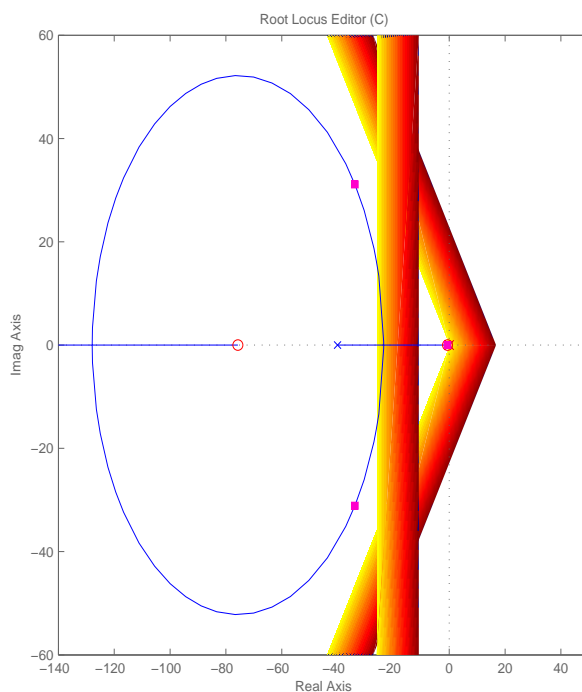
- volendo un tempo di assestamento massimo  $\bar{t}_a$  si ha

$$t_a \leq \bar{t}_a \quad \Rightarrow \quad \omega_n \geq \bar{\omega}_n = \frac{2,3}{\xi \bar{t}_a}$$

- infine, desiderando un tempo di salita massimo  $t_s$ , si può scrivere

$$t_s \leq \bar{t}_s \quad \Rightarrow \quad \omega_n \geq \bar{\omega}_n = \frac{1,8}{\bar{t}_s}$$

Si vede che sia  $t_a$  che  $t_s$  sono in relazione con  $\omega_n$ , quindi, ovviamente, si terrà conto del vincolo più restrittivo dovuto all'una o all'altra specifica. Le tre specifiche di partenza vengono quindi proiettate nel luogo delle radici come mostrato in figura 7.2. In realtà, a voler essere



**Figura 7.2.** Specifiche progettuali viste nel luogo delle radici.

precisi, al posto del segmento parallelo all'asse immaginario che si vede in figura, si dovrebbe visualizzare un arco di circonferenza con raggio di curvatura pari a  $\omega_n$  ma, dato che questa tecnica progettuale è approssimativa, non si commette un grave errore nel confondere l'arco di circonferenza con il segmento in questione.

Una volta trasferite le specifiche nel luogo delle radici, il progettista dovrà fare in modo che i poli del sistema in catena chiusa stiano sulla parte di semipiano consentita.

### 7.1.2 Progettazione in frequenza

Per quel che riguarda la progettazione in frequenza, il problema iniziale è quello di dover trasferire le specifiche progettuali di partenza, espresse nel dominio del tempo, in vincoli nel dominio della frequenza.

Come ricordato in precedenza, un sistema in catena chiusa strettamente stabile è approssimabile con uno del secondo ordine, e in particolare, come si è visto nella scorsa lezione, sussistono le seguenti relazioni tra i due sistemi:

$$\omega_n \simeq \omega_c \quad \text{e} \quad \varphi_{MF} \simeq 2\xi$$

dove  $\omega_c$  è la *frequenza di attraversamento* del sistema in catena aperta, e  $\varphi_{MF}$  è il corrispondente *margin di fase*. Per questo motivo, mettendo assieme le relazioni trovate in precedenza (le quali legavano da una parte  $M$  a  $\xi$ , e dall'altra  $t_a$  e  $t_s$  a  $\omega_n$ ) con queste due nuove uguaglianze, si ottengono dei vincoli in frequenza.

### Tempo di assestamento

Il tempo di assestamento massimo relativo al  $\pm 10\%$  del valore di riferimento è legato alla frequenza di attraversamento  $\omega_c$  dalla seguente relazione

$$\omega_c \simeq \frac{2,3}{t_{a_{10\%}} \xi}$$

Nel caso si voglia considerare un tempo di assestamento relativo a un'altra percentuale del valore di riferimento, basta operare come spiegato precedentemente.

### Sovraelongazione

Nella caso di progettazione nel dominio del tempo si è visto che tanto più si diminuisce  $\xi$ , tanto più i poli dominanti tendono ad avvicinarsi all'asse immaginario, tanto più la sovraelongazione aumenta. Dal momento che  $\xi$  è direttamente proporzionale al margine di fase  $\varphi_{MF}$ , si ha che diminuendo il margine di fase la sovraelongazione aumenta. In particolare si può dire che

$$\varphi_{MF} = \begin{cases} 30^\circ & \text{minima stabilità} \\ 45^\circ & \text{sovravelongazione media (10 - 30\%)} \\ \geq 60^\circ & \text{piccola sovravelongazione (< 10\%)} \end{cases}$$

### Tempo di salita

Anche per quanto riguarda il tempo di salita, basta sostituire  $\omega_c$  a  $\omega_n$  nell'espressione trovata precedentemente, ottenendo

$$t_s = \frac{1,8}{\omega_c}$$

Dal diagramma e dal criterio di Nyquist sappiamo che, affinché il sistema in catena chiusa sia stabile e abbia un certo margine di fase, si deve fare in modo che

$$|P(j\omega_c)| |C(j\omega_c)| = 1 \quad \Rightarrow \quad |C(j\omega_c)| = \frac{1}{|P(j\omega_c)|} \quad (7.2)$$

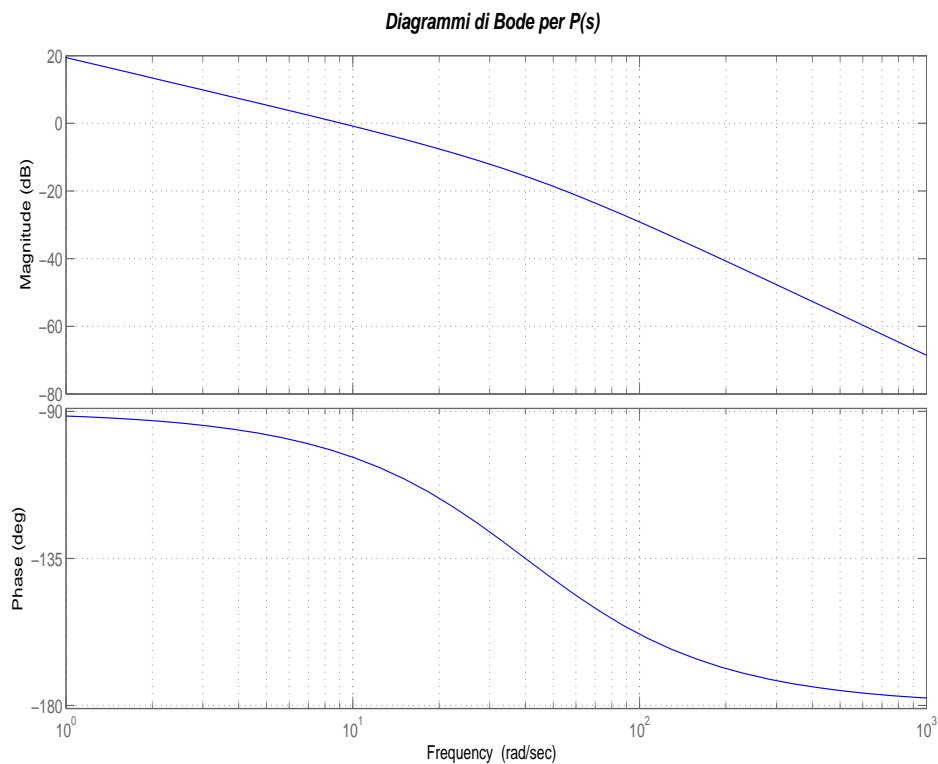
e contemporaneamente deve valere

$$\arg [P(j\omega_c) C(j\omega_c)] = \arg P(j\omega_c) + \arg C(j\omega_c) = \varphi_{MF} - 180^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$\arg C(j\omega_c) = \varphi_{MF} - 180^\circ - \arg P(j\omega_c) \quad (7.3)$$

L'obiettivo del controllista, a questo punto, è quello di progettare un controllore che soddisfi queste ultime due relazioni. A tal fine lo strumento più intuitivo da usare sono i diagrammi di Bode di  $P(s)$ , di cui vi è un esempio in figura 7.3. Generalmente si lavora in questo modo:



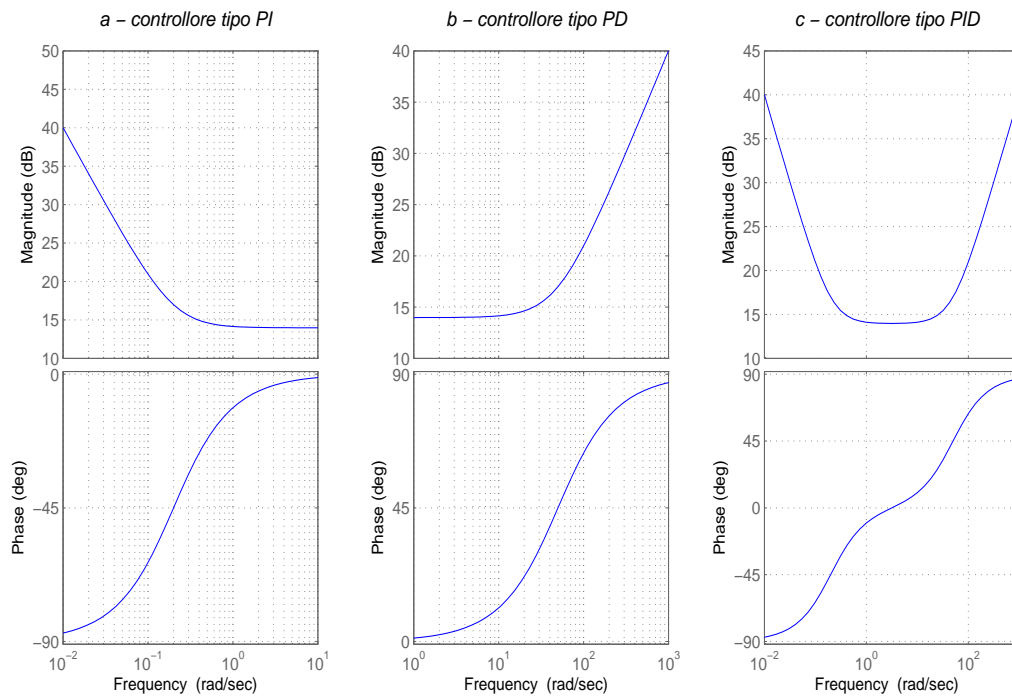
**Figura 7.3.** Esempio di diagrammi di Bode.

- come è stato appena mostrato, in base alle specifiche progettuali iniziali si fissano  $\omega_c$  e  $\varphi_{MF}$ , facendo attenzione che, per quel che riguarda  $\omega_c$ , bisogna sempre scegliere il vincolo più restrittivo, ossia il valore di  $\omega_c$  più grande
- a questo punto, operando sul diagramma di Bode delle fasi di  $P(s)$ , si aggiunge la fase che manca affinché la 7.3 sia soddisfatta

- infine, moltiplicando la fdt del controllore per una opportuna costante positiva (che quindi non modifica la fase, ma alza o abbassa il diagramma dei moduli), si cerca di fare in modo che anche la 7.2 sia soddisfatta.

Tutto questo si può ottenere con l'utilizzo di *reti correttrici*, che agiscono solo nelle vicinanze della frequenza di attraversamento  $\omega_c$ , e che possono essere *anticipatrici*, *ritardatrici* e *a sella*.

Alternativamente si può usare un regolatore PID, del quale si parlerà nel paragrafo successivo. Giusto per capire in che modo si comportano questi controllori PID, si possono osservare tre tipi di regolatori, PI, PD e PID, dei quali, in figura 7.4, è disegnata la risposta in frequenza (modulo e fase). Si può notare fin da subito che un controllore PI, che sappiamo essere



**Figura 7.4.** Esempio di diagrammi di Bode.

necessario per avere un errore di inseguimento a regime nullo, non ci aiuta più di tanto in termini di fase, in quanto, invece di aggiungerne, ne toglie.

Al contrario, un regolatore PD aggiunge fase al sistema in catena chiusa, e quindi permette di diminuire la sovralongazione.

Infine, un controllore PID lavora su entrambi i versanti. In particolare, si cerca sempre di fare in modo che alle basse frequenze, e a regime, lavori la parte integrativa, che quindi toglie fase, mentre si vuole che alle alte frequenze, e soprattutto intorno a  $\omega_c$ , operi la parte derivativa, che, al contrario, ne aggiunge.

## 7.2 Regolatori PID

### 7.2.1 Introduzione

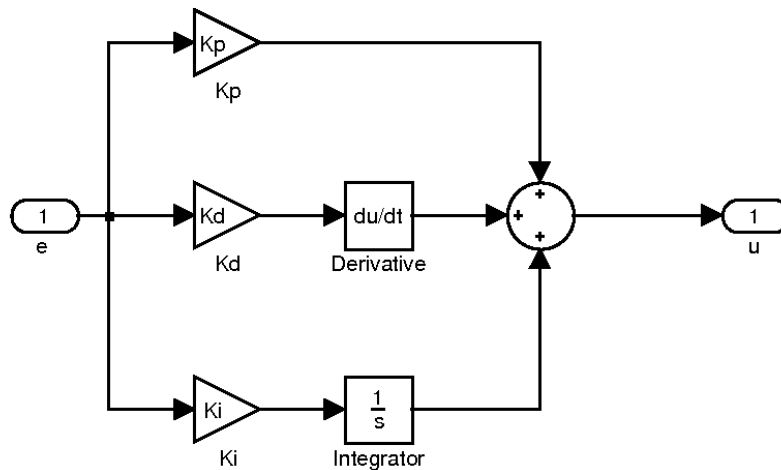
I controllori di tipo PID hanno una funzione di trasferimento a struttura fissa riportata di seguito:

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (7.4)$$

In questa struttura, detta in parallelo, si possono facilmente distinguere l'azione proporzionale con coefficiente  $K_P$ , l'azione derivativa con coefficiente  $K_D$  e l'azione integrale con coefficiente  $K_I$ .

La figura 7.5 illustra lo schema a blocchi di tale configurazione.

La funzione di trasferimento può essere riscritta mettendo in evidenza altri parametri:



**Figura 7.5.** Schema a blocchi di un PID in forma parallela

$$T_I = \frac{K_P}{K_I} \quad [s] \quad \text{Tempo di integrazione}$$

$$T_D = \frac{K_D}{K_P} \quad [s] \quad \text{Tempo di anticipo}$$

$$C(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{\frac{K_P}{K_I} s} + \frac{K_D}{K_P} s \right) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (7.5)$$

### 7.2.2 Importanza dei controllori PID

Storica



- Sono controllori facilmente realizzabili in analogico
- Sono sufficienti per la maggior parte delle applicazioni (il 60%-80% dei controllori il uso sono PID)
- Spesso l'uso di controllori più complessi risulta inutile a causa delle incertezze sul modello da controllare

### Culturale

- Ogni azione è intuitiva (Proporzionale, Integrativa, Derivativa)
- Ci sono solo 3 parametri quindi risulta facile da progettare per tentativi
- Controllori con più parametri sono poco intuitivi e quindi richiedono competenze superiori in caso di malfunzionamento

Si prestano facilmente all'auto regolazione e al controllo adattativo

### 7.2.3 Azioni di Regolazione

|                      | PRO   | CONTRO   |
|----------------------|---|--|
| Azione Integrale     | - elimina errore a regime<br>- elimina disturbi di ingresso costanti  | - aumenta la sovralongazione<br>- rischi di wind-up con saturazione<br>- riduce il margine di fase |
| Azione Proporzionale | - regola la frequenza di taglio                                       | - non modifica il margine di fase  |
| Azione Derivativa    | - aumenta il margine di fase<br>- diminuisce il tempo di assestamento | - amplifica il rumore di uscita<br>- richiede ingressi elevati                                     |

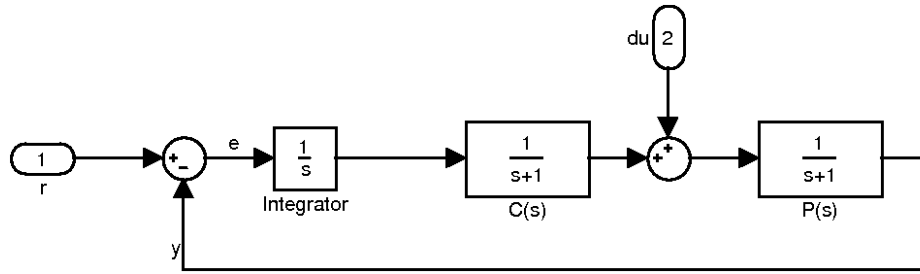
### 7.2.4 Errore a regime

Prendiamo in considerazione lo schema in figura 7.6 in cui viene messa in evidenza l'azione integrale e analizziamo la funzione di trasferimento tra il disturbo  $du$  e l'uscita:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{dU(s)} = \frac{P(s)}{1 + \frac{C(s)P(s)}{s}} = \frac{sP(s)}{s + C(s)P(s)}$$

Quindi:

$$F(0) = 0$$



**Figura 7.6.** riduzione dell'errore a regime tramite l'azione integrale

ovvero un ingresso costante in  $du$  considerato come errore viene annullato.

Se

$$C(0) \neq 0 \quad P(s) = \frac{1}{s} \tilde{P}(s) : \tilde{P}(0) \neq 0$$

allora

$$F(s) = \frac{Y(s)}{dU(s)} = \frac{P(s)}{1 + \frac{C(s)P(s)}{s}} = \frac{\frac{1}{s} \tilde{P}(s)}{1 + \frac{C(s) \frac{1}{s} \tilde{P}(s)}{s}} = \frac{\tilde{P}(s)}{s + C(s) \tilde{P}(s)}$$

quindi

$$F(0) = \frac{1}{C(0)} \neq 0$$

Il disturbo costante non viene annullato ma solo attenuato in dipendenza da  $K_P$ . E' quindi sempre utile la componente integrale del controllore PID.

### 7.2.5 Correzione dell'azione derivativa

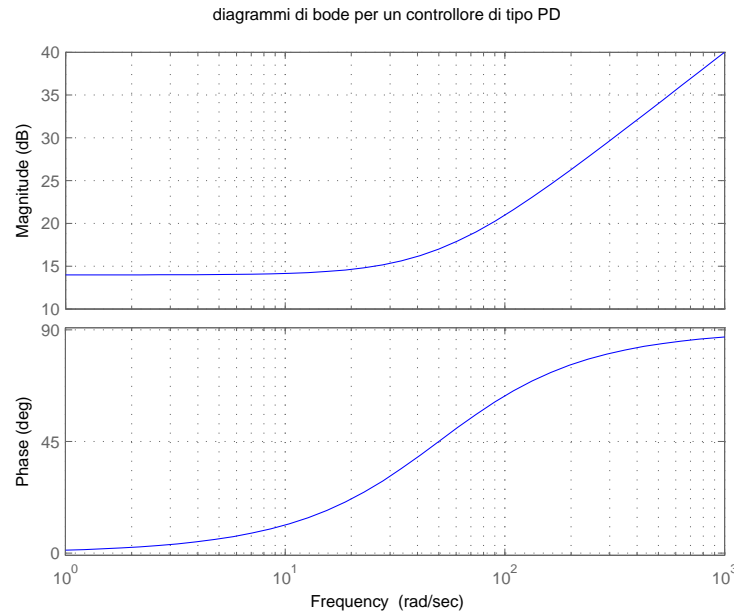
L'azione derivativa come presentata fin'ora non è realizzabile fisicamente a causa della presenza di un solo zero senza alcun polo. Il diagramma di Bode di questa funzione di trasferimento teorica è visualizzato il figura 7.7. Anche se fosse realizzabile amplificherebbe le alte frequenze in modo non accettabile. Per questi motivi è necessario introdurre un polo come si può notare in figura 7.8. Per non distogliere molto le prestazioni del PID con l'aggiunta del polo questo v'è posizionato molto lontano dal campo di lavoro del controllore.

$$T_D s \rightarrow \frac{T_D s}{1 + T_L s} \quad \text{con } T_L \text{ molto piccolo}$$

$$\frac{T_D}{10} \leq T_L \leq \frac{T_D}{3}$$

Si può posizionare  $T_L$  in questo modo:

$$T_L \approx 3\omega_C = 6\pi B$$



**Figura 7.7.** Diagramma di Bode di un controllore PD teorico

Si ottiene quindi la nuova funzione di trasferimento:

$$C(s) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D}{1 + T_L s} \right) \quad (7.6)$$

che può essere riscritta anche in forma serie:

$$C(s) = \frac{K_P (1 + T_i s)(1 + T_d s)}{T_i s (1 + T_L s)} \quad (7.7)$$

Il nuovo schema a blocchi diventa quello in figura 7.9 facilmente ottenibile dallo schema a blocchi della forma parallelo. Se

$$\frac{1}{T_I} \ll \frac{1}{T_D} \ll \frac{1}{T_L}$$

Si ottiene che  $T_i \simeq T_I$  e  $T_d \simeq T_D$ .

Nota:  $\frac{1}{T_i}$  grande riduce velocemente l'errore a regime ma riduce il margine di fase.

$\frac{1}{T_L}$  piccolo riduce l'amplificazione del rumore di uscita ma riduce il margine di fase.

## 7.2.6 Diagrammi di Bode del controllore PID

Concludendo il Diagramma di Bode di un controllore PID reale è simile a quello di figura 7.10. Si può notare l'azione integrale alle basse frequenze, l'azione derivativa alle medie

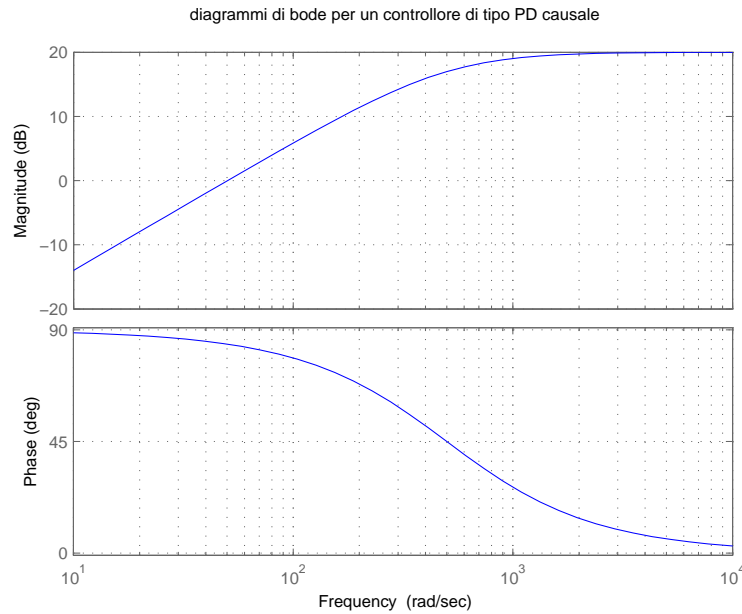


Figura 7.8. Diagramma di Bode di un controllore PD causale

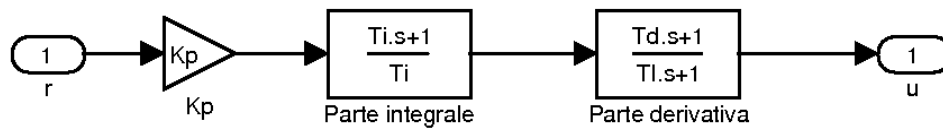


Figura 7.9. Schema a blocchi di un PID in forma serie

frequenze che aumenta la fase e il polo della parte derivativa che impedisce al modulo di divergere.

$$C(S) = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + T_L s} \right) = K_P \frac{T_I s(1 + T_L s) + (1 + T_L s) + T_D T_I s^2}{T_I s(1 + T_L s)} \quad (7.8)$$

$$C(s) = K_P \frac{(T_D T_I + T_I T_L) s^2 + (T_I + T_L) s + 1}{T_I s(1 + T_L s)} \approx K_P \frac{T_D T_I s^2 + T_I s + 1}{T_I s} \quad (7.9)$$

Quindi per il progetto:

$$\frac{1}{T_I} \ll \frac{1}{T_D} \ll \frac{1}{T_L}$$

In modo tale che il polo dell'azione derivativa non interferisca con il progetto del PID.

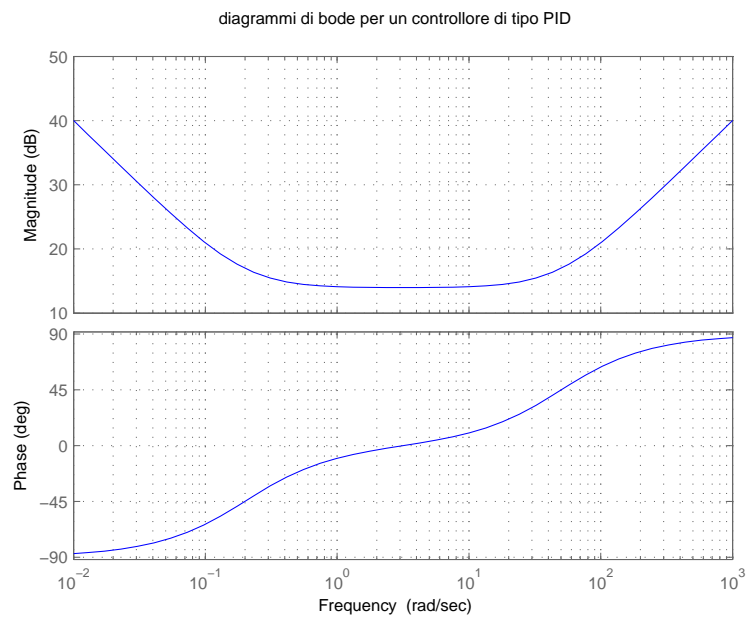


Figura 7.10. Diagramma di Bode per un controllore PID