Prova Scritta di Controlli Automatici I del 17.9.02

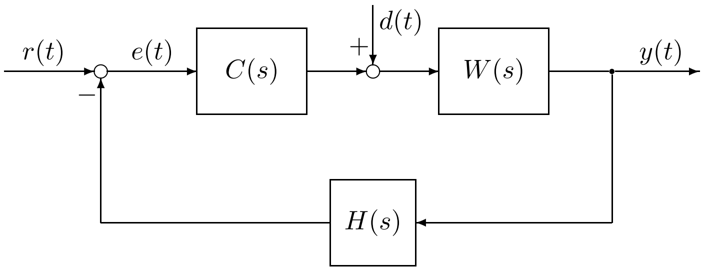
Prof. Zampieri

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ______________

Non è ammessa la consultazione di libri, dispense, quaderni. Non si può usare la calcolatrice programmabile. Ogni risposta va giustificata con un minimo di ragionamento e di calcoli.

Esercizio-1 [8 pt]

Si consideri lo schema



dove

$$C(s) = K, \quad W(s) = \frac{s-1}{s^2+a}, \quad H(s) = \frac{1}{s+2}$$

con $K, a \geq 0$.

1. Si determini la funzione di trasferimento $T(s)$ tra l'ingresso $r(t)$ e l'uscita $y(t)$ e la funzioni sensitivita' di $T(s)$ rispetto alle variazioni del parametro a. Si determini infine per quali valori di K e a il sistema in catena chiusa e' stabile.
2. Supponiamo ora di fissare $K = 4$. Determinate il valore di a sapendo che in corrispondenza a un ingresso a gradino $r(t) = \delta^{(-1)}(t)$ e $d(t) = 0$ il sistema a catena chiusa risponda con un uscita $y(t)$ che assume a regime il valore $-1/2$.
3. Supponiamo che a abbia valore nominale pari a quanto calcolato al punto 2 e che vari entro una fascia di $\pm 10\%$. Si determini per quali valori di K il guadagno in continua a catena chiusa è compreso entro il $\pm 5\%$ del suo valore nominale.
4. Sempre supponendo che a sia pari a quanto calcolato al punto 2 e supponendo che $d(t) = cos(2t)$ e $r(t) = 0$, determinare l'andamento asintotico dell'uscita $y(t)$ in funzione dei K.

Esercizio-2 [8 pt]

Si consideri lo schema introdotto nell'esercizio precedente e si supponga che

$$C(s) = \frac{K}{s^3}, \quad W(s) = \frac{s+3}{s}, \quad H(s) = 1,$$

1. Tracciate il luogo dei poli della funzione di traferimento a catena chiusa $T(s)$ al variare di $K \geq 0$ (si calcolino gli asintoti, gli angoli di uscita eventuali intersezione con l'asse immaginario e punti doppi).
2. Tracciate il luogo dei poli della funzione di traferimento a catena chiusa $T(s)$ al variare di $K \leq 0$.
3. Per quali valori di K il sistema in catena chiusa ha poli con parte reale ≤ 1?

Esercizio-3 [6 pt]

Sia

$$W(s) = K\frac{(s+4)^2}{s^2(s-1)}$$

la trasferenza della catena diretta di un sistema a catena chiusa con retroazione unitaria.

1. Tracciate il diagramma di Bode di $W(s)$ per $K = 1$ (calcolare le equazioni delle rette del diagramma asintotico).

2. Tracciate il diagramma di Nyquist di $W(s)$ per $K = 1$ (calcolare le intersezioni con gli assi ed eventuali asintoti).

3. Impiegando il criterio di Nyquist, determinare il numero di poli instabili del sistema a catena chiusa al variare di K.

Esercizio-4 [**4 pt**]

Si consideri un sistema avente il diagramma di Bode mostrato in Figura 1.

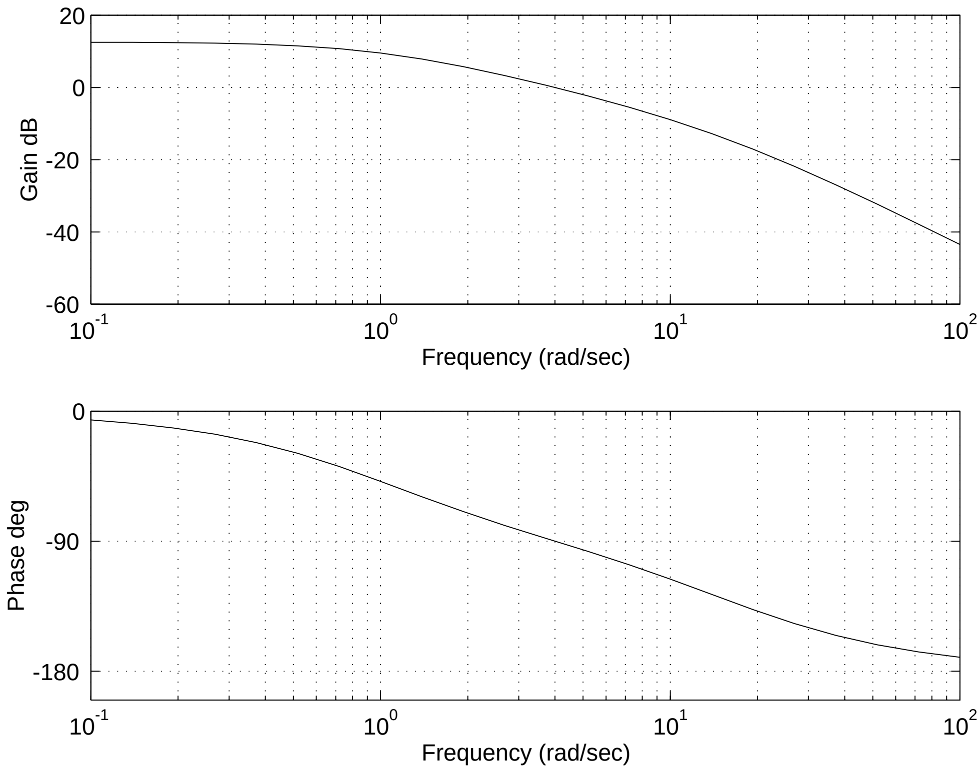


Figure 1: Diagramma di Bode.

Utilizzando il metodo della sintesi di Bode, si progetti un compensatore in modo che siano soddisfatte le seguenti specifiche:

a. errore a regime nullo in risposta al gradino unitario ed errore massimo a regime in risposta alla rampa unitaria pari a $0,1$;

b. pulsazione di attraversamento $\omega_A = 11$ rad/s;

c. margine di fase $m_\varphi = 15^o$.

Si richiede di calcolare i parametri c e q e di determinare, motivando la risposta, quale rete correttrice deve essere utilizzata senza calcolarne esplicitamente i parametri.

Esercizio-5 [**4 pt**]

Si consideri lo schema precedente dove $H(s) = 1$ e

$$W(s) = \frac{2}{s^2 + 1}.$$

a. Determinare $C(s)$ tale che il sistema in catena chiusa abbia tutti i poli in -1.

b. Determinare inoltre $C(s)$ in modo tale che il sistema in catena chiusa abbia tutti i poli in -1 e che l'errore a regime in risposta al gradino sia nullo (in questo caso si richiede solo di impostare le equazioni).

ES. 1

1. $T(s) = \frac{C(s)W(s)}{1+H(s)C(s)W(s)} = \frac{k(s-1)(s+2)}{(s^2+a)(s+2)+k(s-1)}$

$S_a^{CW}(s) = \frac{a}{CW}\frac{dCW}{da} = \frac{a}{W}\frac{dW}{da} = a\frac{s^2+a}{s-1}\frac{-(s-1)}{(s^2+a)^2} = -\frac{a}{s^2+a}$

$S_a^T = \frac{1}{1+HCW}S_a^{CW} = \frac{(s^2+a)(s+2)}{(s^2+a)(s+2)+k(s-1)}\frac{-a}{s^2+a} = -\frac{a(s+2)}{(s^2+a)(s+2)+k(s-1)}$

Stabilità

$s^3+2s^2+as+2a+ks-k$

$$\begin{array}{ll} 1 & a+k \\ 2 & 2a-k \\ \frac{k}{2} & \\ 2a-k & \end{array}$$

$0<k<2a$

2. Significa che $T(0) = -\frac{1}{2}$

$T(0) = \frac{-2k}{2a-k} = (k=4) = \frac{-8}{2a-4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = 10$

stabilità $0<k<20$

3. $\frac{\Delta a}{a} = \pm\frac{10}{100}$

$\left|S_a^T(0)\right|\left|\frac{\Delta a}{a}\right| \le \frac{5}{100}$ $\quad \left|\frac{20}{20-k}\right| \le \frac{1}{2}$. $k \le -20$

$k \ge 60$

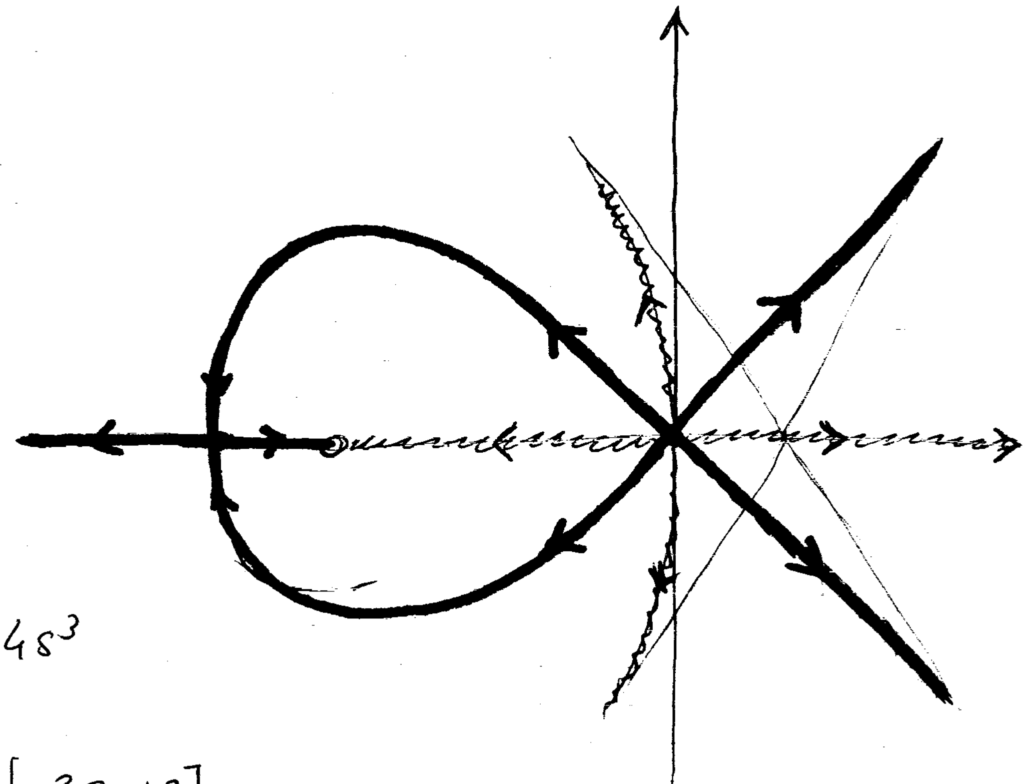
fuori dal campo di stabilità

4. $y(t) = |T_{dy}(2j)|\cos(2t + \angle T_{dy}(2j))$

$T_{dy}(s) = \frac{W}{1+HCW} = \frac{(s-1)(s+2)}{(s^2+10)(s+2)+k(s-1)}$

$T_{dy}(2j) = \frac{-6+2j}{(12-k)+j(12-2k)}$

$\boxed{ES.2}$ $s^4 + k(s+3) = 0$



Asintoti

$\sigma_a = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{3}{3} = 1$

$\theta_a^+ = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$

$\theta_a^- = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

Punti doppi

$$\begin{cases} s^4 + k(s+3) = 0 \\ 4s^3 + k = 0 \end{cases} \qquad k = -4s^3$$

$s^4 - 4s^3(s+3) = 0$

$s^4 - 4s^4 - 12s^3 = 0 \qquad s^3[-3s - 12] = 0$

$s = -4$

Angoli uscita punto quadruplo

luogo positivo $\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$

Intersezioni asse immaginario

Tabella di Routh

1	0	3k
0	k	

non completabile

$(s+1)[s^4 + k(s+3)]$

$s^5 + s^4 + ks^2 + 4ks + 3k$

Tab Routh

1	0	4k
1	k	3k
−k	k	
k+1	3k	
$\frac{k(4k+1)}{k+1}$		
3k		

$\xrightarrow{k=-\frac{1}{4}}$ $\frac{3}{4}s^2 - \frac{3}{4} = 0$

$\frac{k(4k+1)}{k+1} \xrightarrow{\text{si annulla}}$ per $k = -\frac{1}{4}$

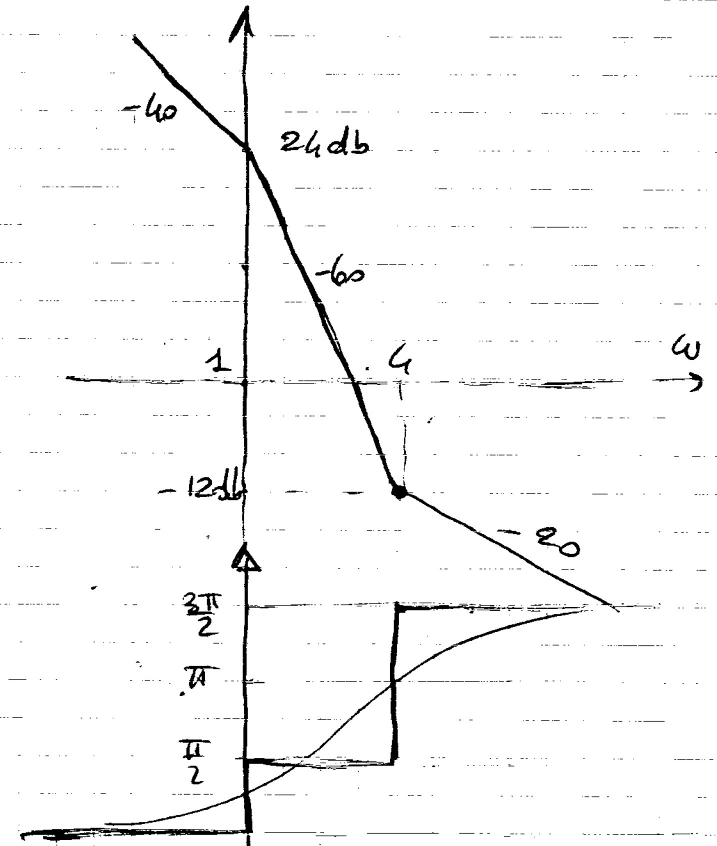
$s_{12} = \pm 1$

che non sono immaginari

$\Downarrow$

nessuna intersezione asse immaginario

$\boxed{\text{ES. 3}}$



1) $W(s) = -16 \dfrac{(1+s/4)^2}{s^2(1+s)}$

$|16|_{db} = 24db$

Punti di rottura

$\omega = 1, 4$

1° retta

$y = -40x + 24$

2° retta

$y = -60x + 24 \qquad x = \log 4$

$y = -60\log 4 + 20\log 16$

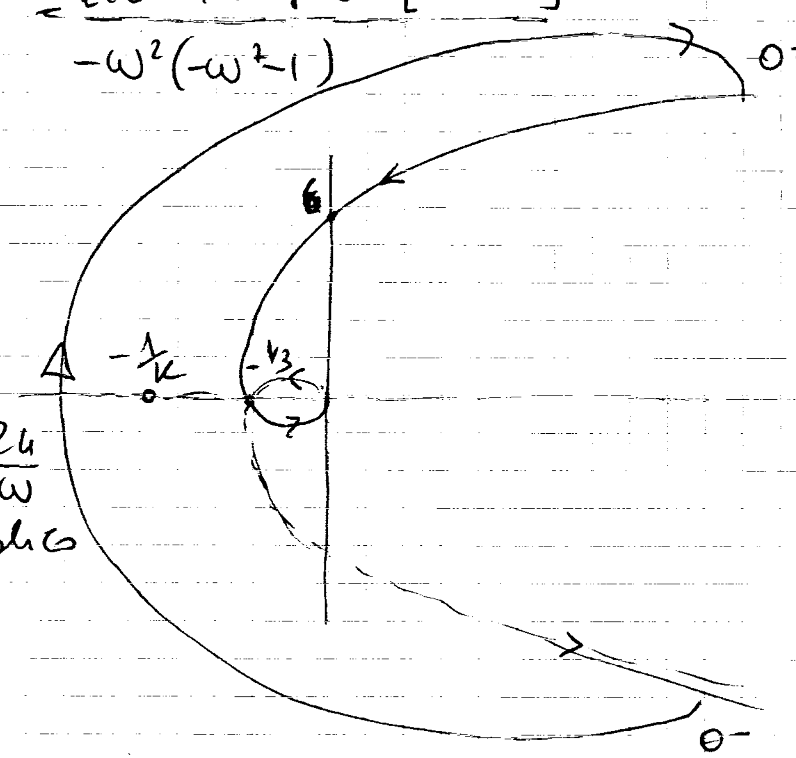
$= -20\log 4 = -12db$

3° retta

$y = -20(x - \log 4) - 12$

2) Nyquist

$$W(j\omega) = \frac{(16-\omega^2)+8j\omega}{-\omega^2(-1+j\omega)} = \frac{[16-9\omega^2]+j\omega[24-\omega^2]}{-\omega^2(-\omega^2-1)}$$



$Re = \dfrac{16-9\omega^2}{\omega^2(\omega^2+1)}$

$Im = \dfrac{24-\omega^2}{\omega(\omega^2+1)}$

$\omega \simeq 0^+ \quad Re \approx \dfrac{16}{\omega^2} \quad Im \approx \dfrac{24}{\omega}$

andamento parabolico

nessun asintoto

$Re = 0$ per $\omega = \frac{4}{3} \Rightarrow Im = \frac{50 \cdot 27}{337} \simeq +4$

$Im = 0$ per $\omega = \sqrt{24} \Rightarrow Re = -\frac{1}{3}$

3) Criterio di Nyquist $\quad P = 1 \quad Z = P - N$

$-\frac{1}{k} < -\frac{1}{3} \quad N = -1 \quad Z = 2 \quad 0 < k < 3$

$-\frac{1}{3} < -\frac{1}{k} < 0 \quad N = 1 \quad Z = 0 \quad k > 3$

$-\frac{1}{k} > 0 \quad N = 0 \quad Z = 1 \quad k < 0$

$\boxed{\text{Es. 4}}$

$h_p = 0 \qquad G_p(0) \cong 12\,db \simeq 4$

$h_c = h - h_p = 1 - 0 = 1$

$K_c = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{G_p(0)} = \frac{10}{4} = 2.5$

$\hat{W}(s) = \frac{K_c}{s} G_p(s) = \frac{10}{4s} G_p(s)$

$|\hat{W}(j11)| = \frac{10}{4 \cdot 11} |G_p(j11)| \qquad |G_p(j11)| \cong -20\,db = \frac{1}{10}$

$= \frac{1}{44} \qquad C = \frac{1}{|\hat{W}(j11)|} = 44$

$\angle \hat{W}(j11) = -90° - 135$

$m_\varphi^\circ = 180 + \angle W(j11) = -45°$

$\Delta\varphi = m_\varphi - m_\varphi^\circ = 15 - (-45) = 60°$

Rete Amplificatrice/anticipatrice

$\boxed{\text{ES. 5}}$ Compensatore a un parametro

a) $n = 2 \qquad 2n-1 = 3 \qquad p(s) = (s+1)^3 = s^3+3s^2+3s+1$

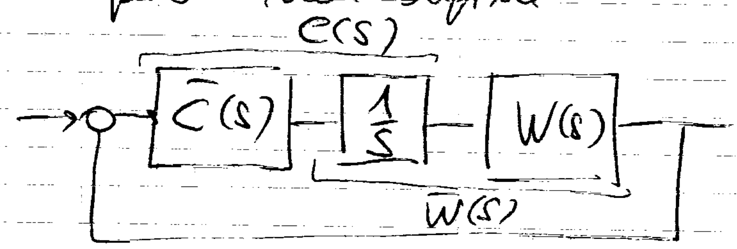
$C(s) = \dfrac{X(s)}{Y(s)}$ con $X(s), Y(s)$ di grado 1

$X(s) = x_1 s + x_0$

$Y(s) = y_1(s) + y_0$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C(s) = \frac{s-1}{s+3}$$

b) Dobbiamo inserire un polo nell'origine



$\bar{W}(s) = \dfrac{1}{s} W(s) = \dfrac{2}{s^3+s}$

$n = 3 \qquad 2n-1 = 5 \qquad p(s) = (s+1)^5 = s^5+5s^4+10s^3+10s^2+5s+1$

$X(s), Y(s)$ di grado 2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \\ 10 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -2 \\ 5/2 \\ 9 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C(s) = \frac{\frac{5}{2}s^2 - 2s + \frac{1}{2}}{s^2+5s+9}$$