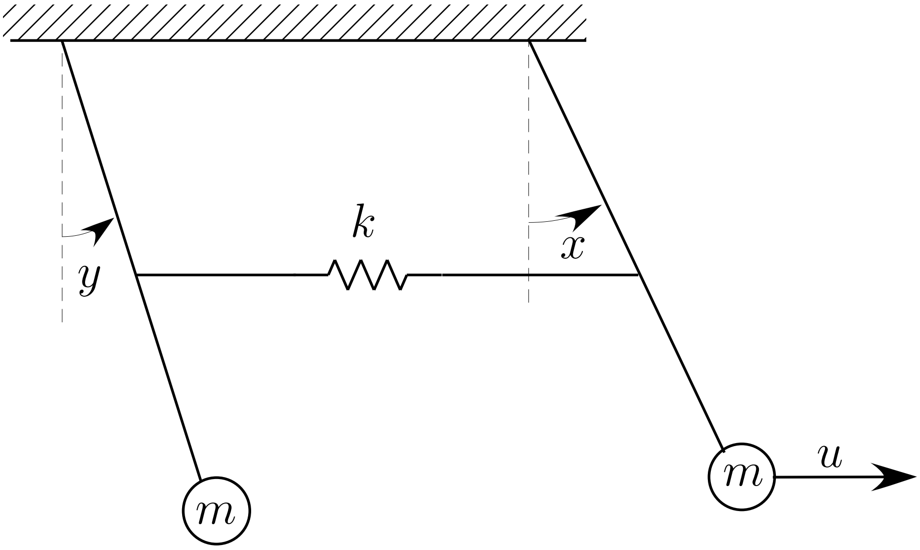
Corso di laurea in Ingegneria Dell'Informazione- Compitino di Fondamenti di Automatica del 6/11/2004

Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

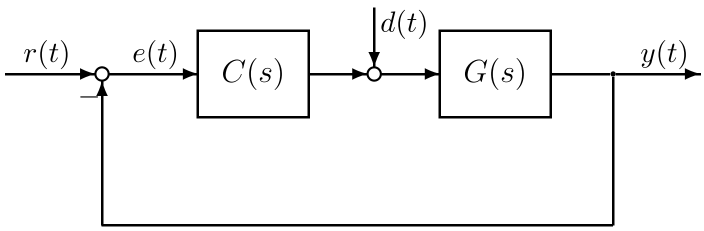
1. Si consideri il sistema meccanico illustrato nella figura seguente



dove i due pendoli sono identici e consistono in un'asta di massa trasurabile e di lunghezza ℓ collegata ad una massa m. Si suppone che i pendoli ruotino con attrito trascurabile e che siano collegati tra loro da una molla con costante elastica k in corrispondenza della metà della loro lunghezza. Si assuma che alla massa di un pendolo sia applicata una forza $u(t)$. L'uscita $y(t)$ e' la posizione angolare dell'altro pendolo. Si assuma che gli angoli $x(t), y(t)$ siano piccoli.

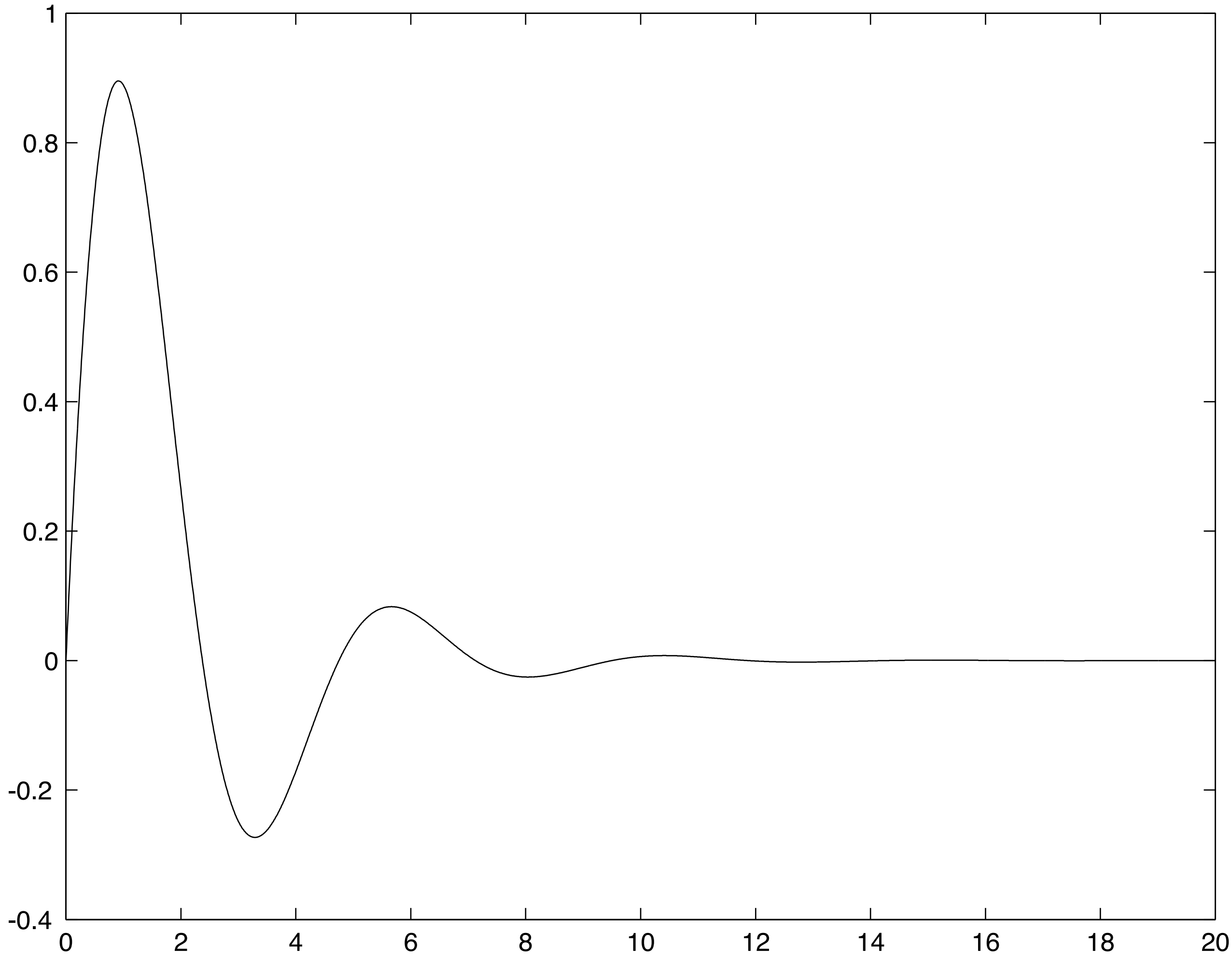
Determinare la funzione di trasferimento che lega l'ingresso u all'uscita y.

2. Si consideri lo schema a blocchi mostrato nella figura seguente.

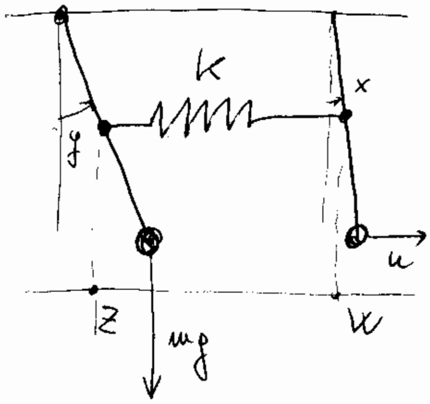


Si supponga che $C(s) = \frac{K}{s}$ e $G(s) = \frac{1}{s+2}$.
1. Determinare le funzioni di trasferimento $T_{ry}(s), T_{dy}(s)$ dagli ingressi r, d all'uscita y.
2. Determinare i valori di K che rendono BIBO stabile il sistema in catena chiusa.
3. Determinare i valori di K per i quali il sistema in catena chiusa attenua di $\sqrt{5}$ volte un segnale di disturbo sinusoidale di pulsazione $\omega = 1$ (in altre parole il disturbo sinusoidale di ampiezza A appare nell'uscita con ampiezza $A/\sqrt{5}$).
4. Determinare i valori di K per i quali il sistema in catena chiusa ha risposta al gradino con sovraelongazione $S \leq 16.3\%$ ($S = e^{-\pi/\tan\theta}$).
5. Esistono valori di K per i quali le specifiche richieste in 2.3.4 sono verificate contemporaneamente?

3. Si consideri lo schema a blocchi precedente in cui $C(s) = \frac{K}{s}$ e $G(s) = \frac{s^2+as+b}{s^2+s+2}$.
1. Determinare a, b sapendo che la risposta forzata del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ a un segnale di ingresso $\sin(2t)$ è quella illustrata in figura.
2. Determinare il numero di poli instabili del sistema in catena chiusa al variare di K attraverso la tabella di Routh. Trattare anche i casi critici. Nel caso non siate risusciti a determinare a, b, scegliete $a = -1, b = 1$.



ES. 1



$z = \frac{l}{2}\sin y$

$w = \frac{l}{2}\sin x$

Forze elastiche applicate ai due pendoli

$F_1 = -k(z-w)$ pendolo sinistro

$F_2 = -k(w-z)$ pendolo destro

$$-ml^2\ddot{y} - mgl\sin y - k\left(\frac{l}{2}\sin y - \frac{l}{2}\sin x\right)\frac{l}{2}\cos y = 0$$

$$-ml^2\ddot{x} - mgl\sin x - k\left(\frac{l}{2}\sin x - \frac{l}{2}\sin y\right)\frac{l}{2}\cos x + \overset{l\cos x}{uV} = 0$$

$\cos x \simeq 1 \qquad \sin x \simeq x$

$\cos y \simeq 1 \qquad \sin y \simeq y$

$$\begin{cases} -ml^2\ddot{y} - mgly - k\frac{l^2}{4}(y-x) = 0 \\ -ml^2\ddot{x} - mglx - k\frac{l^2}{4}(x-y) + ul = 0 \end{cases}$$

Laplace trasformate

$$\begin{cases} \left(ml^{\cancel{2}}s^2 + mg\cancel{l} + k\frac{l^{\cancel{2}}}{4}\right)Y = k\frac{l^{\cancel{2}}}{4}X \\ \left(ml^{\cancel{2}}s^2 + mg\cancel{l} + k\frac{l^{\cancel{2}}}{4}\right)X = k\frac{l^{\cancel{2}}}{4}Y + \cancel{l}U \end{cases}$$

$$X = Y\frac{kl/4}{mls^2 + mg + kl/4}$$

$$\frac{kl}{4}Y + U = \left(mls^2 + mgl + \frac{kl}{4}\right)\overbrace{\frac{mls^2 + mg + kl/4}{kl/4}}^{X}$$

$$\frac{kl}{4}U = \left[\left(mls^2 + mgl + \frac{kl}{4}\right)^2 - \left(\frac{kl}{4}\right)^2\right]Y = Y\left[m^2l^2s^4 + 2m^2l^2gs^2 + 2\frac{ml^2}{4}ks^2 + 2mg\frac{l^2}{4} + m^2g^2l^2 + \cancel{\frac{k^2l^2}{16}} - \cancel{\frac{k^2l^2}{16}}\right]$$

funzione di trasferimento

$$\frac{Y}{U} = \frac{kl/4}{m^2l^2s^4 + \left(2m^2l^2g + m\frac{l^2}{2}k\right)s^2 + \left(\frac{mgl^2}{2} + m^2g^2l^2\right)}$$

ES 2

1.) $T_{ry}(s) = \frac{CG}{1+CG} = \frac{K}{s(s+2)+K}$ $\quad T_{dy}(s) = \frac{G}{1+CG} = \frac{s}{s(s+2)+K}$

2) Il denominatore è s^2+2s+K che per la regola di Cartesio (per sistemi di II grado è necessario e sufficiente) otteniamo stabilità per $\boxed{K>0}$

Si noti che $T_{ry}(s)$ è BIBO per $K>0$

$T_{dy}(s)$ è BIBO per $K \geq 0$ perché per $K=0$ $T_{dy}(s) = \frac{1}{s+2}$

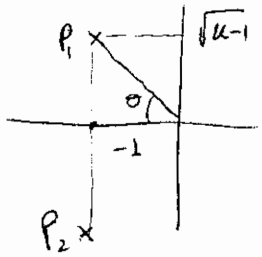
3) Dobbiamo imporre che $|T_{dy}(j)| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$ e equivalentemente $|T_{dy}(j)|^2 \leq \frac{1}{5}$

$$|T_{dy}(j)|^2 = \frac{|j|^2}{|-1+2j+K|^2} = \frac{1}{(K-1)^2+4} \leq \frac{1}{5}$$

$(K-1)^2+4 \geq 5 \iff (K-1)^2 \geq 1 \iff K^2-2K+\cancel{1} \geq \cancel{1}$ $\quad \boxed{K \leq 0 \text{ o } K \geq 2}$

4) Dalle formule si ricava che

$S \leq 16.3\% \iff \boxed{tg\theta \leq 1.73} \iff \theta \leq 60^\circ$



I poli di $T_{ry}(s)$ sono $P_{12} = -1 \pm \sqrt{1-K}$ $\quad K \leq 1$

$P_{12} = -1 \pm j\sqrt{K-1}$ $\quad K \geq 1$

Quindi per $0 < K \leq 1$ non abbiamo poli complessi $\Rightarrow$ No sovraelongazione

Per $K>1$ abbiamo poli complessi e $tg\theta = \sqrt{K-1}$

$K-1 = (tg\theta)^2 \leq (1.73)^2 = 3 \implies \boxed{K \leq 4}$

5) Per $2 \leq K \leq 4$ il sistema retroazionato soddisfa le richieste di 2, 3, 4.

ES 3

1) Dalla figura si deduce che, dopo un transitorio, la risposta di $G(s)$ a segnale $\sin(2t)$ è nulla. Quindi

$$|G(2j)| = 0$$

$$|G(2j)|^2 = \frac{|-4+a2j+b|^2}{|-4+2j+2|^2} = \frac{(b-4)^2+4a^2}{4+4} = 0 \qquad (b-4)^2+4a^2=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{b=4 \quad a=0}$$

2) $$T_{ry}(s) = \frac{K(s^2+4)}{s(s^2+s+2)+K(s^2+4)} = \frac{K(s^2+4)}{s^3+(K+1)s^2+2s+4K}$$

3	1	2
2	$K+1$	$4K$
1	$2\frac{1-K}{1+K}$	
0	$4K$	

$K<-1$	$-1<K<0$	$0<K<1$	$K>1$
+	+	+	+
−	+	+	+
−	+	+	−
−	−	+	+
1 var	1 var	0 var	2 var

$K<-1$ 1 polo inst.

$-1<K<0$ 1 polo inst

$0<K<1$ stabile

$K>1$ 2 poli instabili

per $K=-1$ per continuità ho $\boxed{\text{1 polo instabile 2 poli stabili}}$

per $K=0$ il polinomio è $s(s^2+s+2)$ con $\boxed{\text{1 polo nell'origine, 2 poli stabili}}$

per $K=1$ la riga 1 della tabella diventa nulla e quindi il polinomio della riga sopra divide il polinomio originale

$(K+1)s^2+4K$ divide $s^3+(K+1)s^2+2s+4K$ per $K=1$

$2s^2+4$ divide s^3+2s^2+2s+4

$s^3+2s^2+2s+4=(s^2+2)(s+2)$ quindi $\boxed{\text{1 polo stabile e 2 poli nell'asse immaginario}}$

Per $a=-1$ $b=1$ il denominatore diventa

$$s(s^2+s+2)+K(s^2-s+1) = s^3+(1+K)s^2+(2-K)s+K$$

3	1	$2-K$
2	$1+K$	K
1	$\frac{2-K^2}{1+K}$	
0	K	

$K<-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}<K<-1$	$-1<K<0$	$0<K<\sqrt{2}$	$K>\sqrt{2}$
+	+	+	+	+
−	−	+	+	+
+	−	+	+	−
−	−	−	+	+
3V	1V	1V	0V	2V

Per $K=-\sqrt{2}$

1 polo inst. e 2 poli immaginari

Per $K=\sqrt{2}$

1 polo stabile e 2 poli immaginari