Cognome e nome: ______________________________ Matr.: __________

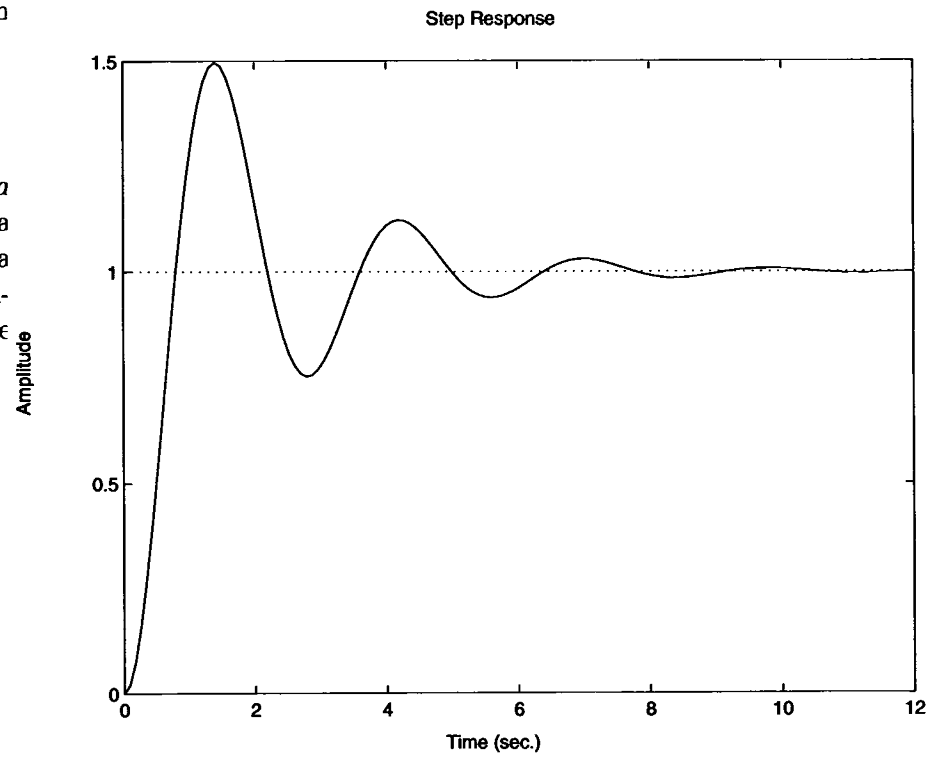
Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

1. Si consideri un sistema con funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{a}{s^2 + s + b}.$$

Determinare i parametri a e b sapendo che la risposta al gradino unitario e' quella mostrata in figura. Si ricorda che la sovraelongazione e' data dalla formula

$$S = e^{-\frac{\pi}{\tan\theta}}$$



Soluzioni

La forma generale del sistema del II ordine è

$$W(s) = \frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}} = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2+2\xi\omega_n s+s^2} = \frac{a}{b+s+s^2}$$

Dal disegno osserviamo che $W(0)=1$ e quindi $K=1$

Quindi $\omega_n^2 = a = b$

Inoltre $2\xi\omega_n = 1$

Infine, poiché $S = 0.5$, allora $\text{tg}\,\theta = -\frac{\pi}{\ln S} \approx 4.5$ $\theta \approx 77°$

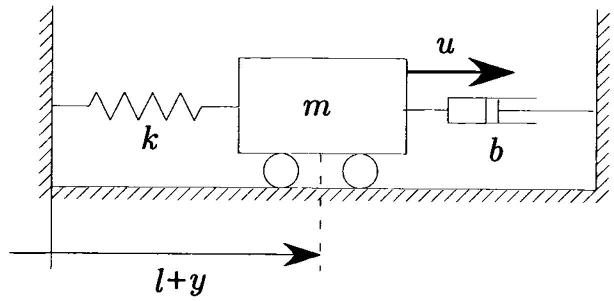
$\xi = \cos\theta = 0.22$

$\omega_n = \frac{1}{2\xi} = 2,32$

$\omega_n^2 \simeq 5,3 = a = b$

Quindi $a = b = 5.3$

2. Si consideri il seguente sistema meccanico.



Sia y lo spostamento della massa m rispetto alla posizione di equilibrio l (molla a riposo) ed u la forza applicata al carrello.

(a) Calcolate la funzione di trasferimento $W(s)$ tra l'ingresso u e l'uscita y.

(b) Determinare per quali m, b, k la risposta del sistema al gradino e' priva di sovraelongazione.

Soluzione

Equazioni del moto

$$-m\ddot{y} - ky - b\dot{y} + u = 0$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u \qquad Y(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k} U(s)$$

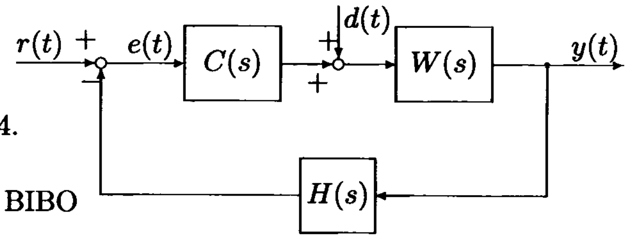
La risposta al gradino non ha sovraelongazione se e solo se i poli della funzione di trasferimento sono puramente reali. Quindi se e solo se

$$b^2 - 4mk \geq 0$$

$$b^2 \geq 4mk$$

Quindi quando l'attrito è sufficientemente alto rispetto alla massa e alla molla

3. Si consideri il sistema mostrato nella figura in cui



$$C(s)=\frac{K}{s},\qquad W(s)=\frac{1}{s^2+s+4},\qquad H(s)=4.$$

(a) determinare i valori di K che rendono il sistema BIBO stabile.

(b) Determinare l'andamento dell'errore $e(t)$ a regime in funzione di K supponendo che che $r(t)=1+t$ e che $d(t)=\cos(2t)$.

Soluzione

(a) Calcoliamo la funzione di trasferimento da ~~[illegible]~~ $r(t)$ a $e(t)$

$$T_{re}(s)=\frac{1}{1+CHW}=\frac{1}{1+\frac{4k}{s(s^2+s+4)}}=\frac{s(s^2+4s+4)}{s(s^2+s+4)+4k}$$

la funzione di trasferimento da $d(t)$ a $e(t)$ è

$$T_{de}(s)=\frac{-WH}{1+CHW}=\frac{-\frac{4}{s(s^2+s+4)}}{1+\frac{4k}{s(s^2+s+4)}}=\frac{-4s}{s(s^2+s+4)+4k}$$

Il denominatore è lo stesso

$s^3+s^2+4s+4k$ tabella di Routh

Stabilità per $0<K<1$

1	4
1	4k
4-4K	
4K	

(b) Applichiamo la sovrapposizione degli effetti

1) $r(t)=1$ $\quad d(t)=0$ $\quad e(t)\simeq T_{re}(0)=0$

2) $r(t)=t$ $\quad d(t)=0$ $\quad E(s)=T_{re}(s)\frac{1}{s^2}=\frac{s^2+4s+4}{s(s^2+s+4)+4k}\frac{1}{s}$

Posso applicare il teorema del valore finale

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\left.\frac{s^2+4s+4}{s(s^2+s+4)+4k}\right|_{s=0}=\frac{1}{k}$$

3) $r(t)=0$ $\quad d(t)=\cos(2t)$ $\qquad$ Stabile solo se $0<K<1$

$$T_{de}(2j)=\frac{-8j}{2j(-4+2j+4)+4k}=\frac{-8j}{4k-4}$$

$|T_{de}(2j)|=\frac{2}{-k+1}$ $\qquad \angle T_{de}(2j)=+\pi/2$ $\qquad e(t)=\frac{2}{-K+1}\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$

Errore a regime

$$e(t)=\frac{1}{k}+\frac{2}{-k+1}\cos(2t+\pi/2)$$

4. Si consideri il sistema descritto dall'equazione differenziale

$$y''(t) + (a+1)y'(t) + ay(t) = u'(t)$$

dove a é un parametro reale. É richiesto di:

(a) calcolare la risposta impulsiva per $a \neq 1$;
(b) calcolare la risposta impulsiva per $a = 1$;
(c) studiare, al variare di a, la asintotica stabilitá rispetto alle condizioni iniziali;
(d) studiare, al variare di a, la stabilitá esterna BIBO;

Soluzione

(a) $$W(s) = \frac{s}{(s+1)(s+a)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+a}$$

$$A = (s+1)\,W(s)\Big|_{s=-1} = \frac{-1}{-1+a} = \frac{1}{1-a}$$

$$B = (s+a)\,W(s)\Big|_{s=-a} = \frac{-a}{-a+1} = \frac{a}{a-1}$$

$$W(t) = \frac{1}{1-e}\,e^{-t} + \frac{a}{a-1}\,e^{-at}$$

(b) $a = 1$ $$W(s) = \frac{s}{(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} = \frac{A(s+1)+B}{(s+1)^2}$$

$A = 1$, $B = -1$ $$W(t) = e^{-t} - t\,e^{-t}$$

(c) È stabile asintoticamente rispetto alle condizioni iniziali se e solo se gli zeri di $Q(s) = (s+1)(s+a)$ hanno parte reale < 0 cioè se e solo se $a > 0$ dato che gli zeri di $Q(s)$ sono -1 e $-a$.

(d) Il sistema è BIBO stabile se e solo se $W(s)$ ha poli con parte reale < 0.
Se $a \neq 0$ allora i poli sono -1 e $-a$ e quindi hanno parte reale < 0 se e solo se $a > 0$
Se $a = 0$ allora $W(s) = \frac{1}{s+1}$ che è BIBO stabile
Riassumendo il sistema è BIBO stabile $\Leftrightarrow$ $\underline{a \geq 0}$