FONDAMENTI DI AUTOMATICA (a.a. 2003-2004)

2^o compitino e primo appello - 9 dicembre 2005

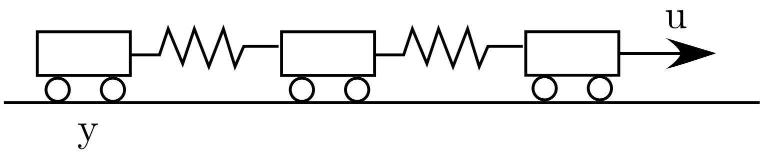
Cognome e nome: ______________________________ Matr.: ____________

Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli.

Indicare quale esame si intende sostenere:

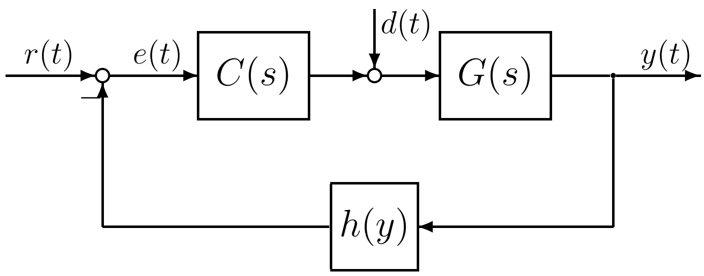
Secondo compitino (Esercizi 3,4) tempo: 1 e 3/4 ore	Primo appello (Esercizi 1,2,3,4) tempo: 3 ore

Esercizio 1. Si consideri il seguente sistema meccanico



in cui si suppone che le masse dei carrelli $m = 1$ e xhe le costanti di elasticita' $k = 1$. Sia $u(t)$ la forza applicata al carrello di destra e $y(t)$ la posizione del carrello a sinistra. Si determini la funzione di trsferimento tra u e y.

Esercizio 2. Si consideri lo schema della figura seguente



dove $C(s) = K$, $h(y) = y$ e

$$G(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s^2 - s + a)} .$$

1. Si determini il valore di a, sapendo che 1 é punto doppio del luogo dei poli in catena chiusa.
2. Si disegni il luogo dei poli in catena chiusa per $K > 0$ e per $K < 0$.

Esercizio 3. Si consideri lo schema della figura precedente dove $C(s) = K$ e

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2} .$$

1. Tracciare i diagrammi di Bode e di Nyquist di $G(s)$;

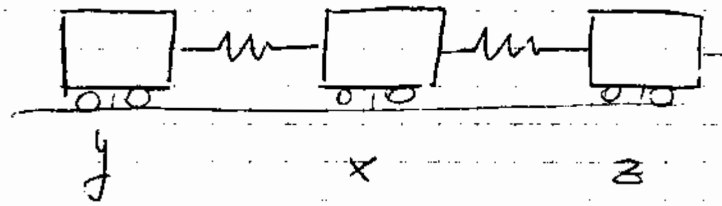
2. Supponendo che $h(y) = y$, studiare (tramite il criterio di Nyquist) la stabilitá del sistema in catena chiusa, al variare del parametro reale K (negativo e positivo);
3. Supponendo che $1 < h(y)/y < 2$ e $h(0) = 0$, studiare (tramite il criterio del cerchio) la stabilitá del sistema in catena chiusa per $K = 1$.
4. Supponendo che $1 < h(y)/y < 2$ e $h(0) = 0$, studiare (tramite il criterio del cerchio) la stabilitá del sistema in catena chiusa, al variare di $K > 0$.

Esercizio 4. Si consideri lo schema della figura precedente dove

$$G(s) = \frac{1}{s + 10}$$

1. Attraverso la sintesi di Bode si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:
   (a) errore a regime in risposta al gradino ≥ 0.001;
   (b) margine di fase $m_\phi \geq 60^0$;
   (c) pulsazione di attraversamento $\omega_A = 100$.
2. Attraverso la sintesi diretta si determini un compensatore $C(s)$ in grado di soddisfare alle seguenti specifiche:
   (a) errore a regime in risposta al gradino $= 0$;
   (b) poli in catena chiusa tutti in -1.

$\boxed{\text{ES } 1}$



$$\begin{cases} m\ddot{y} = -k(y-x) \\ m\ddot{x} = -k(x-y) - k(x-z) \\ m\ddot{z} = -k(z-x) + u \end{cases}$$

$m = 1 \quad k = 1$

$$\begin{cases} (S^2+1)\,Y(s) = \cancel{k}\,X(s) \\ (S^2+2)\,X(s) = \cancel{k}\,Y(s) + Z(s) \\ (S^2+1)\,Z(s) = X(s) + U \end{cases}$$

$$\begin{cases} (S^2+1)Y = X \\ (S^2+2)X = Y + \dfrac{X+U}{S^2+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} (S^2+1)Y = X \\ \left[(S^2+1)(S^2+2)-1\right]X = (\cancel{S}^2+1)Y + U \end{cases}$$

$$(S^2+1)Y = \frac{(S^2+1)Y + U}{(S^2+1)(S^2+2)-1}$$

$$\left\{\left[(S^2+1)(S^2+2)-1\right](S^2+1) - (S^2+1)\right\}Y = U$$

$$(S^2+1)(S^4+3S^2+\cancel{2}-\cancel{1}-\cancel{1})Y = U$$

$$\frac{Y}{U} = \frac{1}{(S^2+1)(S^2+3)S^2}$$

ES 2

1) Dobbiamo tracciare il luogo di

$$(s+1)(s^2-s+a)+ks^2=0$$

Punti doppi

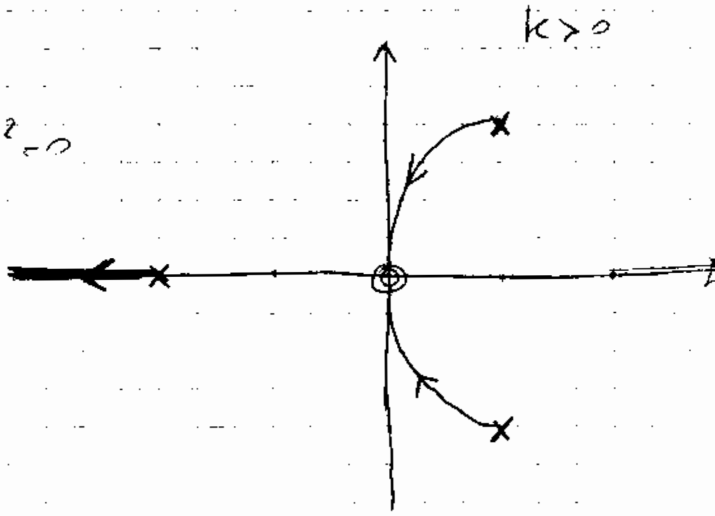
$$\begin{cases}(s+1)(s^2-s+a)+ks^2=0\\ (s^2-s+a)+(s+1)(2s-1)+2ks=0\end{cases}$$

Sappiamo che $s=1$ è soluzione e quindi sostituiamo

$$\begin{cases}2(a)+k=0\\ a+2+2k=0\end{cases}\qquad \begin{cases}k=-2a\\ a-4a+2=0\end{cases}\qquad \begin{matrix}k=-4/3\\ a=2/3\end{matrix}$$

2) $(s+1)(s^2-s+2/3)+ks^2=0$

$$(s+1)\left(s-\frac{1}{2}-j\sqrt{\frac{5}{12}}\right)\left(s-\frac{1}{2}+j\sqrt{\frac{5}{12}}\right)+ks^2=0$$



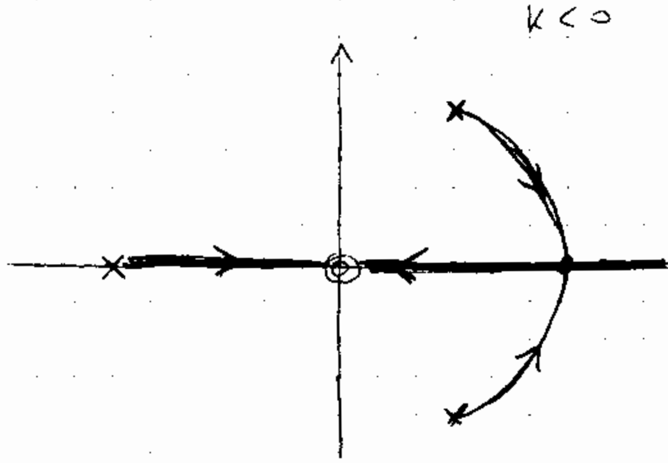
Campo di stabilità

$$s^3+ks^2-\frac{1}{3}s+\frac{2}{3}=0$$

Tabella di Routh

$$\begin{array}{ll} 1 & -1/3 \\ k & 2/3 \\ -\frac{k+2}{3k} & \\ 2/3 & \end{array}$$

	-2		0	
+		+		+
−		−		+
−		+		−
+		+		+
2V		2V		2V



Ci sono sempre 2 radici instabili come confermato dai luoghi positivi e negativi

Altri punti doppi

$$\begin{cases}(s+1)(s^2-s+2/3)+ks^2=0\\ (s^2-s+2/3)+(s+1)(2s-1)+2ks=0\end{cases}$$

$$K=-\frac{3s^2-1/3}{2s}$$

$$(s+1)(s^2-s+2/3)-\frac{3s^2-1/3}{2\cancel{s}}s^{\cancel{2}}=0$$

$$s^3-1/3\,s+2/3-\frac{3}{2}s^3+\frac{1}{6}s=0$$

$$-\frac{1}{2}s^3-\frac{1}{6}s+\frac{2}{3}=0$$

$$\begin{array}{l|l} -1/2\,s^3+0\,s^2-\frac{1}{6}s+\frac{2}{3} & s-1 \\ \hline -1/2\,s^3+\frac{1}{2}s^2 & -1/2\,s^2-\frac{1}{2}s-\frac{2}{3} \\ \hline \quad -\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{6}s+2/3 & \\ \quad -\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}s & \\ \hline \qquad -\frac{4}{6}s+2/3 & \end{array}$$

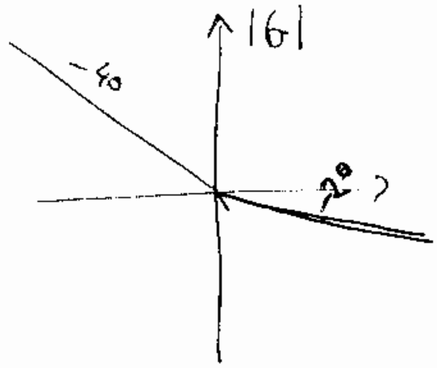
$$\downarrow$$

$$\Delta=\frac{1}{4}-4\,\frac{1}{2}\,\frac{2}{3}<0$$

non ci sono altri punti doppi

$\boxed{\text{Es 3}}$

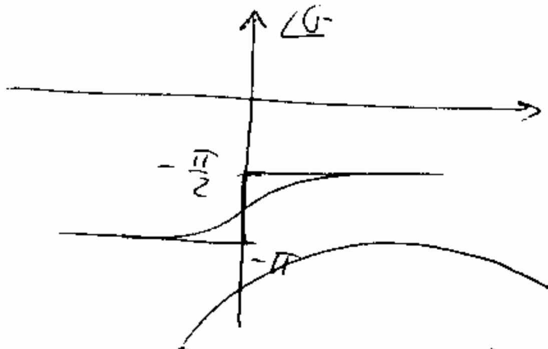
1) $G(j\omega) = \dfrac{1+j\omega}{-\omega^2}$



BODE

$Re = -\dfrac{1}{\omega^2}$

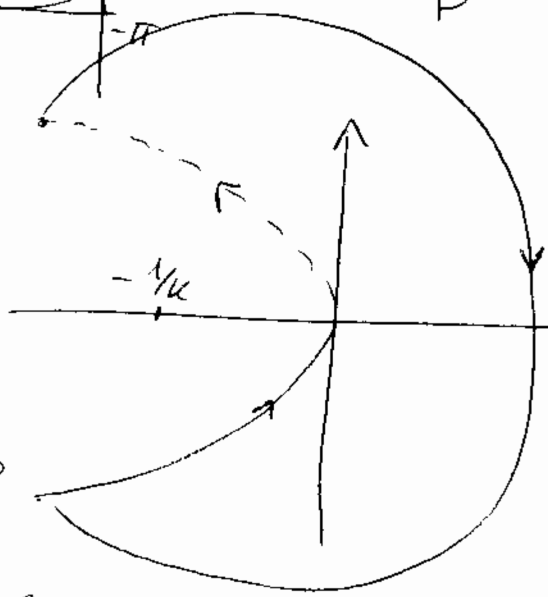
$Im = -\dfrac{1}{\omega}$



2) Criterio di Nyquist

$P = 0$

Nyquist



$-\frac{1}{k} < 0 \; (k > 0)$ $N = 0$ $Z = 0$ stabile

$-\frac{1}{k} \geq 0 \; (k < 0)$ $N = -1$ $Z = 1$ instabile

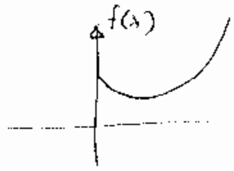
3,4) $F(s) = \dfrac{1+2kG(s)}{1+kG(s)} = \dfrac{s^2+2ks+2k}{s^2+ks+k}$ è PR?

Se $k > 0$ allora $F(s)$ non ha poli in $Re\, s \geq 0$

Quindi basta verificare che $Re\, F(j\omega) \geq 0$

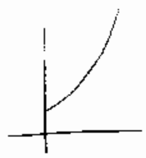
$$F(j\omega) = \frac{(2k-\omega^2)+2j\omega k}{(k-\omega^2)+j\omega k} = \frac{[(2k-\omega^2)+2j\omega k][(k-\omega^2)-j\omega k]}{(k-\omega^2)^2+\omega^2k^2}$$

$$Re\, F(j\omega) = \frac{(2k-\omega^2)(k-\omega^2)+2\omega^2k^2}{(k-\omega^2)^2+\omega^2k^2} \geq 0 \quad ? \qquad \omega^2 = x$$



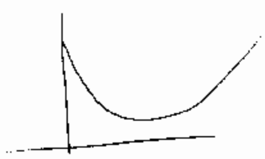
$f(x) = (2k-x)(k-x)+2xk^2 \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

$= x^2 + (2k^2-3k)x + 2k^2$



Caso 1 $2k^2-3k \geq 0 \iff k \geq \frac{3}{2}$ ok

Caso 2 $2k^2-3k < 0 \iff k < 3/2$. In questo caso



$f(x) \geq 0$ se e solo se

$\Delta = (2k^2-3k)^2 - 8k^2 \leq 0$

$4k^2-12k+1 \leq 0$

$\frac{3}{2}-\sqrt{2} \leq k \leq \frac{3}{2}+\sqrt{2}$

L'unione dei due insiemi dà

$k \geq \frac{3}{2} - \sqrt{2}$

$\boxed{\text{ES 4}}$

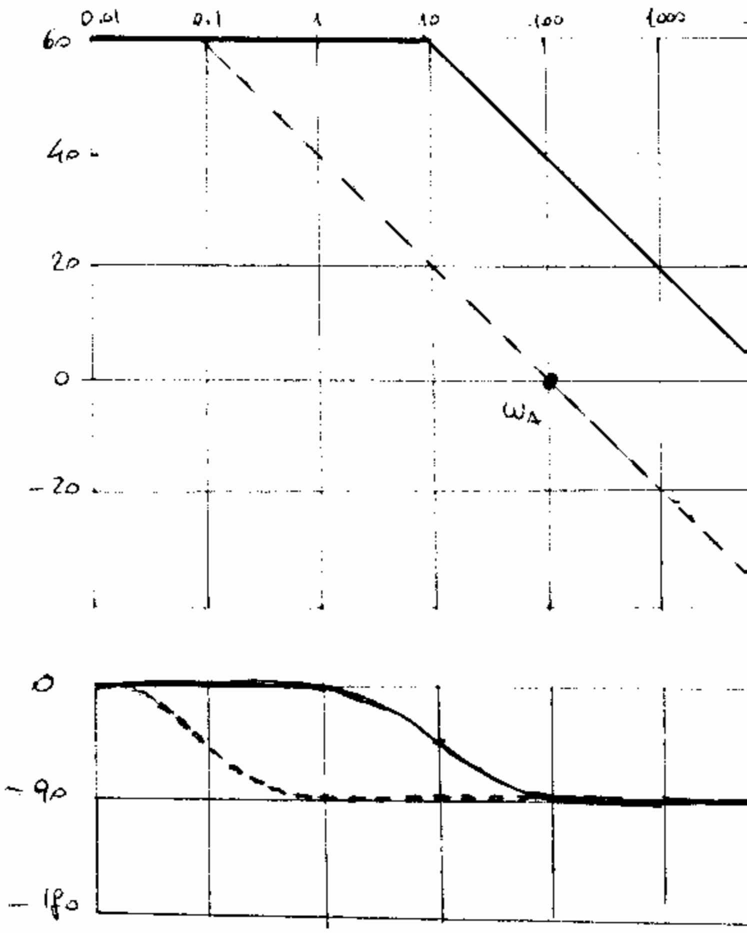
1) errore a regime $\leq 0.001 = \frac{1}{1000}$ $\Longleftrightarrow$ guadagno di Bode ≥ 1000

$$C(s) = \frac{K_c}{s^{h_c}} \bar{C}(s)$$

$h_c = 0$

$K_c = \frac{\cdots}{K_G} = 10.000 \qquad K_G = \frac{1}{10}$

$$\hat{W}(s) = 10000 \; \frac{1}{s+10} = \frac{1000}{1+s/10}$$



Dal grafico si vede che la pulsazione di attraversamento di $\hat{W}(s)$ è 10.000 e quindi bisogna abbassare. Siccome c'è margine di fase in abbondanza basta una rete attenuatrice

Ad esempio

$$\bar{C}(s) = \frac{1+s/10}{1+10s}$$

2) $C(s) = \frac{1}{s}\bar{C}(s)$

$$W(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{1}{s(s+10)}$$

$n = 2 \qquad 2n+1 = 3 \qquad d(s) = (s+1)^3$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x_0 = 1$
$x_1 = 73$
$y_0 = -7$
$y_1 = 1$

$$C(s) = \frac{1}{s}\,\frac{73s+1}{s-7}$$