Esame di CONTROLLO DIGITALE

Durata della prova: 2 ore.

Quesito 1.

1. Si consideri un segnale a tempo continuo $w(t) = -e^{-3t} + 1(t)$, $t \geq 0$. Si calcoli la $\mathscr{Z}$-trasformata $\tilde{W}(z)$ della sua versione campionata $\tilde{W}(k)$ con periodo di campionamento T (lasciare indicato).

2. Se $w(t)$ è la risposta impulsiva di un sistema LTI, si dica qual è la funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto ottenuto per tenuta e campionamento da quello continuo, sempre con periodo T.

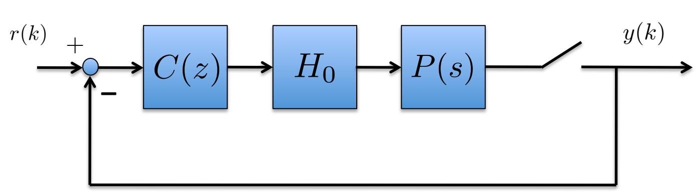
3. Se $w(t)$ è la risposta impulsiva di un sistema LTI, si dica qual è la funzione di trasferimento $\tilde{W}(z)$ del sistema a tempo discreto ottenuto per emulazione con il metodo MPZ, in maniera che abbia un passo di ritardo.

4. Si dica se è possibile progettare un controllore deadbeat per inseguimento al gradino, con funzione di trasferimento strettamente propria e che stabilizza internamente il sistema ottenuto al punto 3, che renda la funzione di trasferimento della catena chiusa della forma:
$$W_{cc} = \frac{K}{z},$$
per qualche K. Dire inoltre se la risposta cambierebbe considerando controllori con funzione di trasferimento propria (non necessariamente strettamente propria).

Quesito 2. Si consideri l'interconnessione in Figura, con $T = 0.001$ secondi, con:

$$P(s) = \frac{10}{(s+5)^2}.$$

Progettare un controllore standard PD o PI a tempo continuo utilizzando le tecniche basate sul margine di fase in maniera che il sistema in catena chiusa soddisfi le specifiche $t_r = 0.1$ secondi, e $m_p = 1/40$. Si calcoli la corrispondente funzione di trasferimento $\tilde{C}(z)$ discreta utilizzando il metodo di Eulero all'Indietro.



Soluzione.

Quesito 1.

1. La versione campionata $\tilde{w}(k)$ del segnale $w(t)$ è

$$\tilde{w}(k) = -(e^{-3T})^k + \delta_{-1}(k)$$

la cui trasformata è

$$\tilde{W}(z) = \mathscr{Z}[\tilde{w}(k)] = -\frac{z}{z-e^{-3T}} + \frac{z}{z-1} = \frac{z(1-e^{-3T})}{(z-e^{-3T})(z-1)}$$

2. La funzione di trasferimento del sistema di cui $w(t)$ è risposta impulsiva è la trasformata di Laplace $W(s)$ di $w(t)$, ossia

$$W(s) = \mathscr{L}[w(t)] = -\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s} = \frac{3}{s(s+3)}$$

Dunque

$$\frac{W(s)}{s} = \frac{3}{s^2(s+3)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+3},$$

dove

$$A = \lim_{s\to 0} s^2 \frac{W(s)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{3}{s+3} = 1,$$

$$B = \lim_{s\to 0} s[\frac{W(s)}{s} - \frac{A}{s^2}] = \lim_{s\to 0} \frac{3}{s(s+3)} - \frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{-s}{s(s+3)} = \lim_{s\to 0} \frac{-1}{s+3} = -1/3,$$

$$C = \lim_{s\to -3} (s+3)\frac{W(s)}{s} = \lim_{s\to -3} \frac{3}{s^2} = 1/3.$$

Dunque, denotando ora con $\tilde{W}(z)$ la funzione di trasferimento a tempo discreto ottenuta per tenuta e campionamento da $W(s)$,[1]

$$\begin{aligned}
\tilde{W}(z) &= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right]\right]\right] = \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{\frac{1}{3}}{s} + \frac{\frac{1}{3}}{s+3}\right]\right]\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[t - \frac{1}{3}1(t) + \frac{1}{3}e^{-3t}\right]\right] = \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[Tk - \frac{1}{3}\delta_1(k) + \frac{1}{3}(e^{-3T})^k\right] \\
&= \frac{z-1}{z}\left[T\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{1}{3}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{3}\frac{z}{z-e^{-3T}}\right] \\
&= \frac{(T+\frac{1}{3}e^{-3T}-\frac{1}{3})z - (T+\frac{1}{3})e^{-3T} + \frac{1}{3}}{(z-1)(z-e^{-3T})}
\end{aligned}$$

Si noti la presenza di un zero evocato in $\frac{(T+\frac{1}{3})e^{-3T}-\frac{1}{3}}{T+\frac{1}{3}e^{-3T}-\frac{1}{3}}$. Tale zero, è presente per ogni valore ammissibile di T: si verifica facilmente infatti che $T+\frac{1}{3}e^{-3T}-\frac{1}{3} > 0$ per ogni $T > 0$.

[1] Nonostante si sia usata la stessa notazione, non si confonda questa $\tilde{W}(z)$ con la trasformata zeta di $\tilde{w}(k)$ calcolata al punto precedente.

3. Abbiamo già calcolato la funzione di trasferimento

$$W(s) = \mathscr{L}[w(t)] = -\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s} = \frac{3}{s(s+3)}$$

al punto precedente. Dunque, denotando ora con $\tilde{W}(z)$ la funzione di trasferimento a tempo discreto ottenuta per approssimazione MPZ da $W(s)$,[2] si ha

$$\tilde{W}(z) = \frac{K_d(z+1)}{(z-1)(z-e^{-3T})},$$

dove

$$K_d = T\ 3\ \frac{1}{3}\ \frac{1-e^{-3T}}{2} = T\frac{1-e^{-3T}}{2}.$$

4. La funzione di trasferimento a catena chiusa $W_{cc}(z) = K/z$ che viene imposta ha grado relativo pari ad 1 uguale a quello della funzione di trasferimento

$$\tilde{W}(z) = \frac{K_d(z+1)}{(z-1)(z-e^{-3T})}$$

del sistema da controllare. Pertanto, la funzione di trasferimento del controllore ha necessariamente grado relativo nullo e non introduce quindi alcun passo di ritardo; in conclusione, il problema posto non ha soluzione (per avere $C(z)$ strettamente propria la funzione di trasferimento a catena chiusa $W_{cc}(z)$ deve avere grado relativo strettamente maggiore di quello della funzione di trasferimento $\tilde{W}(z)$ del sistema da controllare).

Se invece, si rilassa la richiesta imponendo solo che $C(z)$ sia propria, il problema appena visto non sussiste e si verifica facilmente che

$$C(z) = \frac{1}{\tilde{W}(z)} \frac{K/z}{1-K/z}$$

ha grado relativo nullo (e quindi è propria anche se non strettamente) e produce la funzione di trasferimento a catena chiusa desiderata. Si deve tuttavia ancora verificare il vincolo di interna stabilità dell'interconnessione. Nel caso considerato la funzione di trasferimento

$$\tilde{W}(z) = \frac{K_d(z+1)}{(z-1)(z-e^{-3T})}$$

del sistema da controllare ha uno zero in -1 (di modulo pari a 1 e quindi esterno al cerchio aperto di raggio unitario) e dunque per avere stabilità interna dell'interconnessione, tale zero deve anche essere uno zero della funzione di trasferimento a catena chiusa $W_{cc}(z)$. Quest'ultima, però, è priva di zeri per ogni valore di K; pertanto nemmeno il problema rilassato ha soluzione.

[2] Come prima, non si confonda questa $\tilde{W}(z)$ con quelle calcolate ai punti precedenti.

Quesito 2.

Per prima cosa traduciamo le specifiche assegnate nel dominio del tempo in specifiche sulla pulsazione di attraversamento desiderata ω_a^* e sul margine di fase desiderato m_φ^*:

$$m_\varphi^* = 1.04 - 0.8 m_p = 1.04 - 0.8/40 = 1.04 - 0.8/40 = 1.04 - 0.02 = 1.02,$$

$$\omega_a^* = 2/t_r = 20.$$

Consideriamo ora $P_0(s) := e^{-\frac{sT}{2}} P(s)$ e calcoliamo modulo M e fase φ del controllore alla pulsazione di attraversamento:

$$M := \frac{1}{|P_0(j\omega_a^*)|} = \frac{(\omega_a^*)^2 + 25}{10} = 42.5,$$

$$\varphi := m_\varphi^* - \pi - \mathrm{Arg}[P_0(j\omega_a^*)] = 1.02 - \pi - (-\omega_a^* T/2 - 2\mathrm{arctg}(\omega_a^*/5)) = 1.02 - \pi + \frac{1}{100} + 2.65 = 0.53.$$

L'angolo φ è positivo pertanto devo anticipare e quindi un controllore PI non va bene (ritarda) e devo quindi usare un PD. Poiché per la fisica realizzabilità del PD dovrò comunque introdurre un polo remoto che aumenterà un po' il ritardo, decido di anticipare un po' di più imponendo

$$\varphi = 0.55 \quad (\text{invece che } \varphi = 0.53 \text{ }).$$

In conclusione, la funzione di trasferimento del PD sarà

$$C'_{PD}(s) = K_P(1 + sT_D)$$

con

$$K_P = M\cos(\varphi) = 42.5\cos(0.55) = 36.23$$

e

$$T_D = \frac{M\sin(\varphi)}{\omega_a^* K_P} = \frac{\tan(\varphi)}{\omega_a^*} = \frac{\tan(0.55)}{20} = 0.031$$

Ora aggiungo un polo remoto con costante di tempo $T_L = 0.003$ dieci volte più piccola di T_D e ottengo il controllore

$$C_{PD}(s) = K_P \frac{1 + sT_D}{1 + sT_L} = 36.23 \frac{1 + s\ 0.031}{1 + s\ 0.003}.$$

Infine, il controllore $\tilde{C}_{PD}(z)$ discreto si ottiene con l'approssimazione di Eulero all'indietro, ossia sostituendo ad s l'espressione $\frac{z-1}{Tz}$:

$$\tilde{C}_{PD}(z) = 36.23\ \frac{1 + s\ 0.031}{1 + s\ 0.003}\bigg|_{s=\frac{z-1}{Tz}} = 36.23 \frac{1 + \frac{z-1}{Tz} 0.031}{1 + \frac{z-1}{Tz} 0.003} = 36.23 \frac{z + (z-1)31}{z + (z-1)3}.$$