Esame di CONTROLLO DIGITALE

Durata della prova: 2 ore.

Quesito 1.

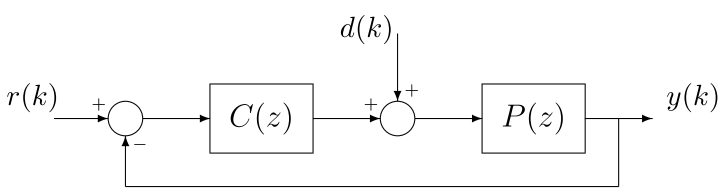
1. Si consideri il segnale a tempo continuo $w(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}1(t)$ e si calcoli la $\mathscr{Z}$-trasformata $\tilde{W}(z)$ della sua versione campionata $\tilde{w}(k)$ con periodo di campionamento T.
2. Sia $w(t)$ (definita al punto precedente) la risposta impulsiva di un sistema LTI a tempo continuo; si dica qual è la funzione di trasferimento del sistema a tempo discreto ottenuto, da quello continuo, per tenuta e campionamento con periodo T.
3. Sia ancora $w(t)$ (definita al punto 1.) la risposta impulsiva di un sistema LTI a tempo continuo; si dica qual è la funzione di trasferimento $\tilde{W}(z)$ del sistema a tempo discreto ottenuto per emulazione con il metodo MPZ sia con grado relativo pari a 1 sia con grado relativo pari a 0.
4. Si dica se è possibile progettare un controllore deadbeat per inseguimento al gradino, con funzione di trasferimento strettamente propria, che stabilizza internamente il sistema ottenuto al punto 2. e che renda la funzione di trasferimento della catena chiusa della forma:

$$W_{cc}(z) = \frac{K}{z},$$

per qualche K reale e positivo. Si dica inoltre se la risposta cambierebbe considerando controllori con funzione di trasferimento propria (non necessariamente strettamente propria).

Quesito 2. Si consideri l'interconnessione in figura, con $T = 0.001$ secondi, e

$$P(z) = \frac{10(z - 0.4)}{z - 1}.$$



Si progetti un controllore in modo che il sistema a catena chiusa abbia solo poli nell'origine e insegua asintoticamente segnali del tipo $r(k) = A\sin(k\pi/3)$, con $A \in \mathbb{R}$.

Si consideri il sistema a catena chiusa ottenuto e si dica se la sua risposta impulsiva si esaurisce in un numero finito di passi e in caso affermativo si determini tale numero.

Si dica se il sistema a catena chiusa assicura anche reiezione asintotica di disturbi del tipo $d(k) = B\delta_{-1}(k)$, $B \in \mathbb{R}$.

Soluzione.

Quesito 1.

1. Il segnale discreto ottenuto per campionamento di periodo T è:

$$\tilde{w}(k) := w(kT) = \frac{1}{2}(e^{-T})^k + \frac{1}{2}\delta_{-1}(k)$$

e quindi la sua trasformata è

$$\tilde{W}(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z-e^{-T}} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} = \frac{z^2 - \frac{1}{2}z(1+e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}.$$

2. La funzione di trasferimento del sistema LTI a tempo continuo di cui $w(t)$ è risposta impulsiva è chiaramente

$$W(s) = \mathscr{L}[w(t)] = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s} = \frac{s+1/2}{s(s+1)}.$$

La funzione di trasferimento discreta ottenuta da $W(s)$ per tenuta e campionamento è

$$\tilde{W}(z) = \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right]\right]\right]$$

La funzione $\frac{W(s)}{s}$ ammette l'espansione in fratti semplici del tipo

$$\frac{W(s)}{s} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s^2} + \frac{B}{s+1}$$

Dove

$$A_1 = \lim_{s\to 0} s^2\frac{W(s)}{s} = 1/2,$$

$$A_0 = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{W(s)}{s} - \frac{A_1}{s^2}\right] = 1/2,$$

$$B = \lim_{s\to -1}(s+1)\frac{W(s)}{s} = -1/2.$$

Dunque si ha

$$\begin{aligned}
\tilde{W}(z) &= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1/2}{s} + \frac{1/2}{s^2} - \frac{1/2}{s+1}\right]\right]\right]\\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[1/2t + 1/2\cdot 1(t) - 1/2e^{-t}\right]\right]\\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[1/2Tk + 1/2\delta_{-1}(k) - 1/2(e^{-T})^k\right]\\
&= \frac{z-1}{z}\left[1/2T\frac{z}{(z-1)^2} + 1/2\frac{z}{z-1} - 1/2\frac{z}{z-e^{-T}}\right]\\
&= 1/2T\frac{1}{z-1} + 1/2 - 1/2\frac{z-1}{z-e^{-T}}\\
&= \frac{1}{2}\frac{(T-e^{-T}+1)z + e^{-T}(1-T) - 1}{(z-1)(z-e^{-T})}
\end{aligned}$$

3. La funzione di trasferimento del sistema LTI a tempo continuo di cui $w(t)$ è risposta impulsiva è chiaramente quella di prima, ossia

$$W(s) = \mathscr{L}[w(t)] = \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s} = \frac{s+1/2}{s(s+1)}.$$

La funzione di trasferimento discreta ottenuta da $W(s)$ per emulazione MPZ e grado relativo pari a 1 è dunque

$$\tilde{W}(z) = K\frac{z-z_0}{(z-1)(z-p_1)}$$

con

$$z_0 = e^{-T/2}, \quad p_1 = e^{-T}, \quad K = T\cdot(1/2)\frac{1-p_1}{1-z_0} = \frac{T}{2}\frac{1-e^{-T}}{1-e^{-T/2}}$$

La funzione di trasferimento discreta ottenuta da $W(s)$ per emulazione MPZ e grado relativo pari a 0 è invece

$$\tilde{W}(z) = K\frac{(z-z_0)(z+1)}{(z-1)(z-p_1)}$$

con

$$z_0 = e^{-T/2}, \quad p_1 = e^{-T}, \quad K = T\cdot(1/2)\frac{1-p_1}{2(1-z_0)} = \frac{T}{4}\frac{1-e^{-T}}{1-e^{-T/2}}$$

4. La funzione di trasferimento a catena chiusa $W_{cc}(z) = K/z$ che viene imposta ha grado relativo pari ad 1 uguale a quello della funzione di trasferimento (ottenuta al punto 2.)

$$\tilde{W}(z) = \frac{1}{2}\frac{(T-e^{-T}+1)z + e^{-T}(1-T) - 1}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

del sistema da controllare.

Pertanto, la funzione di trasferimento del controllore ha necessariamente grado relativo nullo e non può quindi essere strettamente propria.

Se invece, si rilassa la richiesta imponendo solo che $C(z)$ sia propria, il problema appena visto non sussiste. Si noti, a tal proposito che che per ogni valore del periodo di campionamento T, si ha $T - e^{-T} + 1 \neq 0$ e quindi il grado relativo di $\tilde{W}(z)$ è certamente pari a 1. Quindi, si verifica facilmente che

$$C(z) = \frac{1}{\tilde{W}(z)}\frac{K/z}{1-K/z}$$

ha grado relativo nullo (e quindi è propria anche se non strettamente) e produce la funzione di trasferimento a catena chiusa desiderata. Si deve tuttavia ancora verificare il vincolo di interna stabilità dell'interconnessione. Nel caso considerato la funzione di trasferimento

$$\tilde{W}(z) = \frac{(T-e^{-T}+1)z + e^{-T} - Te^{-T} - 1}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

del sistema da controllare ha uno zero in

$$z_0 := \frac{Te^{-T}+1-e^{-T}}{T-e^{-T}+1},$$

il cui modulo è evidentemente minore di 1 per per ogni valore del periodo di campionamento T. Pertanto, lo zero non può comportare alcun problema alla stabilità interna dell'interconnessione. Invece, dei due poli di $\tilde{W}(z)$, quello in e^{-T} ha modulo minore di 1 e quindi non comporta alcun problema, ma quello in 1 è potenzialmente critico. La stabilità interna si ha se e solo se tale polo è anche zero di $z - K$ ossia se e solo se si sceglie

$$K = 1.$$

Dunque,

$$C(z) = \frac{1}{\tilde{W}(z)} \frac{1}{z-1} = \frac{z - e^{-T}}{(T - e^{-T} + 1)z + e^{-T} - Te^{-T} - 1}$$

risolve il problema posto.

Quesito 2.

Affinché il a catena chiusa insegua asintoticamente segnali del tipo $r(k) = A\sin(k\pi/3)$, con $A \in \mathbb{R}$, la funzione di trasferimento della catena di azione diretta deve avere gli stessi poli "instabili" della trasformata Zeta di $r(k)$ (principio del modello interno). Nel caso in esame la trasformata Zeta di $r(k)$ ha una coppia di poli complessi coniugati sulla circonferenza unitaria in $e^{\pm j\pi/3}$. Dunque la funzione di trasferimento della catena di azione diretta deve avere a denominatore il fattore

$$(z - e^{j\pi/3})(z - e^{-j\pi/3}) = z^2 - 2\mathbb{R}e[e^{j\pi/3}]z + 1 = z^2 - 2\cos(\pi/3)z + 1 = z^2 - z + 1$$

Consideriamo dunque il sistema ausiliario di funzione di trasferimento

$$P_1(z) := \frac{1}{z^2 - z + 1} P(z) = \frac{10(z - 0.4)}{(z^2 - z + 1)(z - 1)} = \frac{N_{P_1}(z)}{D_{P_1}(z)}$$

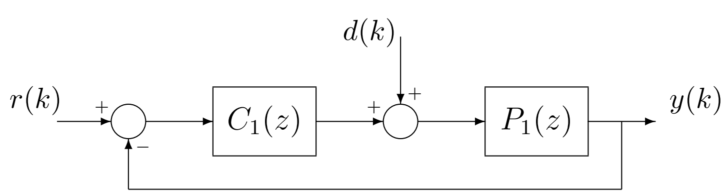
dove abbiamo incorporato in $P(z)$ il termine $\frac{1}{z^2-z+1}$ che, in realtà è un fattore del controllore. Si ha dunque

$$N_{P_1}(z) = 10z - 4$$

e

$$D_{P_1}(z) = z^3 - 2z^2 + 2z - 1.$$

Calcoliamo ora la funzione di trasferimento $C_1(z)$ del controllore ausiliario che nello schema a catena chiusa



dà una funzione di trasferimento a catena chiusa con il solo polo nell'origine (di molteplicità adeguata). Poiché $D_{P_1}(z)$ ha grado $n = 3$, possiamo progettare un controllore del tipo

$$C_1(z) = \frac{N_{C_1}(z)}{D_{C_1}(z)}$$

dove

$$N_{C_1}(z) = y_2 z^2 + y_1 z + y_0,$$
$$D_{C_1}(z) = x_2 z^2 + x_1 z + x_0$$

e x_i e y_i sono i parametri incogniti che dobbiamo calcolare imponendo che il denominatore della funzione di trasferimento a catena chiusa sia $D_W(z) = z^{2n-1} = z^5$:

$$D_{C_1}(z)D_{P_1}(z) + N_{C_1}(z)N_{P_1}(z) = D_W(z) = z^5.$$

Eguagliando i coefficienti dei termini di grado i, con $i = 0, 1, \ldots, 5$, si può riscrivere questa equazione in forma matriciale come un sistema lineare in 6 equazioni e 6 incognite della forma

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 10 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -4 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui si vede subito che $x_2 = 1$, $x_1 = 2$. Inoltre, si ha

$$x_0 + 10y_2 = 2$$

e

$$x_0 = -4y_0$$

da cui

$$-4y_0 + 10y_2 = 2$$

ossia

$$y_2 = \frac{1}{5}(1 + 2y_0)$$

In altre parole, sia x_0 sia y_2 si possono esprimere in funzione di y_0 e quindi mi rimangono solo le due equazioni

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -2 & -4 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -4 & 10 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4y_0 \\ \frac{1}{5}(1 + 2y_0) \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nelle due incognite y_1 e y_0. Dunque, si ha

$$\begin{bmatrix} 3 + 8y_0 - \frac{4}{5}(1 + 2y_0) + 10y_1 \\ -2 - 8y_0 - 4y_1 + 10y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$y_0 = 2y_1 + 1$$

e

$$3 + 8(2y_1 + 1) - \frac{4}{5}(1 + 2(2y_1 + 1)) + 10y_1 = 3 + 16y_1 + 8 - \frac{4}{5} - \frac{16}{5}y_1 - \frac{8}{5} + 10y_1 = \frac{114}{5}y_1 + \frac{43}{5} = 0$$

da cui, finalmente,

$$y_1 = -\frac{43}{114},$$

$$y_0 = 2y_1 + 1 = \frac{14}{57},$$

$$y_2 = \frac{1}{5}(1 + 2y_0) = \frac{1}{5}(1 + \frac{28}{57}) = \frac{17}{57},$$

e

$$x_0 = -4y_0 = -\frac{56}{57}.$$

In conclusione, il controllore ausiliario ha funzione di trasferimento

$$C_1(z) = \frac{N_{C_1}(z)}{D_{C_1}(z)} = \frac{(17/57)z^2 - (43/114)z + 14/57}{z^2 + 2z - 56/57}$$

e il controllore complessivo ha funzione di trasferimento

$$C(z) = \frac{1}{z^2 - z + 1}C_1(z) = \frac{(17/57)z^2 - (43/114)z + 14/57}{(z^2 + 2z - 56/57)(z^2 - z + 1)}$$

La risposta impulsiva del sistema a catena chiusa si esaurisce chiaramente in un numero finito di passi, visto che l'unico polo della relativa funzione di trasferimento è in zero. In effetti, abbiamo progettato il controllore $C(z)$ in modo che la funzione di trasferimento del sistema a catena chiusa sia della forma

$$W(z) = \frac{N_W(z)}{z^5}$$

dove $N_W(z)$ è un polinomio (per completezza notiamo, anche se non è richiesto, che il grado relativo di $W(z)$ deve essere pari alla somma di grado relativo di $P(z)$ e di quello di $C(z)$, ossia $0 + 2 = 2$; pertanto possiamo dire che $N_W(z)$ è un polinomio di grado $5 - 2 = 3$). Dunque la risposta impulsiva del sistema a catena chiusa (che è l'antitrasformata Zeta di $W(z)$) ha i primi due campioni nulli, ossia $w(0) = w(1) = 0$ (perchè il sistema introduce complessivamente un ritardo di due passi) poi ha 4 campioni $w(2)$, $w(3)$, $w(4)$ e $w(5)$ che possono essere non nulli e dal campione $w(6)$ in poi è identicamente nulla. Dunque la risposta impulsiva si esaurisce **al più** dopo sei passi.

Per essere più precisi, possiamo calcolare esplicitamente

$$N_W(z) = N_C(z)N_P(z) = ((17/57)z^2 - (43/114)z + 14/57)(10z - 4) = \frac{1}{57}[170z^3 - 293z^2 + 226z - 56]$$

e quindi

$$W(z) = \frac{N_W(z)}{z^5} = \frac{170}{57}z^{-2} - \frac{293}{57}z^{-3} + \frac{226}{57}z^{-4} - \frac{56}{57}z^{-5}$$

e poichè il coefficiente di z^{-5} è non nullo possiamo concludere che la risposta impulsiva si esaurisce **esattamente** dopo sei passi.

Infine, il comportamento del sistema a catena chiusa con riferimento a disturbi a gradino. Per avere reiezione asintotica a tali disturbi, la funzione di trasferimento dal disturbo all'uscita dovrebbe contenere tra i suoi zeri $z_0 = 1$. Si verifica subito che tale funzione di trasferimento

$$W_d(z) = \frac{N_P(z) D_C(z)}{z^5}$$

non contiene tale zero e quindi non vi è reiezione asintotica di disturbi a gradino.