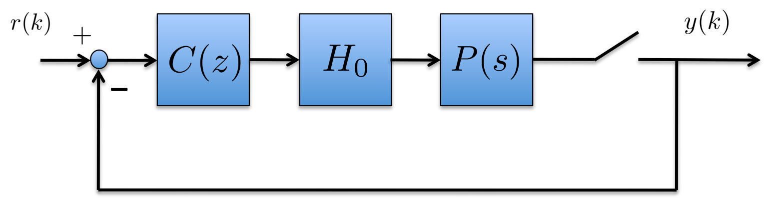
I prova in itinere di CONTROLLO DIGITALE

Oltre ai necessari articoli di cancelleria (penna, matita, etc.) si può utilizzare **solo** una calcolatrice non programmabile. Non si possono, in particolare, tenere fotocopie di alcun tipo, appunti, quaderni, etc. Le risposte **vanno giustificate**. Saranno rilevanti per la valutazione anche la **concisione**, l'**ordine**, la **chiarezza di esposizione** e la **precisione** delle risposte.
Durata della prova: 2 ore.

Esercizio 1. [10 pt.] Si consideri lo schema rappresentato in figura dove $P(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$.



A. Fissato $T = \ln(3)$, si progetti la funzione di trasferimento $C(z)$ di un controllore in modo che:
1. vi sia almeno un passo di ritardo fra ingresso e uscita del controllore e
2. a catena chiusa, l'uscita $y(k)$ insegua con errore asintotico nullo un ingresso a gradino discreto.

B. Fissato $C(z) = 4$, si dica se esiste un valore del periodo di campionamento T per il quale la funzione di trasferimento del sistema a catena chiusa non ha zeri.

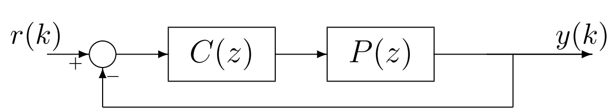
Esercizio 2. [4 pt.] Si calcoli la trasformata Z di

$$f(k) = k\sin(2k)\mathrm{e}^{-k}.$$

Domanda di teoria. [4 pt.] Si consideri lo schema di figura dove

$$P(z) := \frac{(z^2-1/2)^{15}}{(z-2)^{13}(z+2)(z+3)(z+4)^{15}}.$$

Si dica se esiste un controllore proporzionale $C(z) = K$, con $K \geq 0$, che rende l'interconnessione in figura **internamente** stabile (suggerimento: si usi il luogo delle radici).



Soluzione. A cura di Matteo Boscolo Fiore, Sara Casagrande, Roberta Lazzari (edited by AF)

Esercizio 1.
A. L'esercizio richiede il progetto di una funzione di trasferimento $C(z) = \frac{N_C(z)}{D_C(z)}$ di un controllore, che soddisfi simultaneamente due condizioni:

- si introduca almeno un passo di ritardo tra ingresso e uscita del controllore;
- l'uscita $y(k)$ del sistema a catena chiusa insegua con errore asintotico nullo un riferimento a gradino.

La prima richiesta, di avere almeno un passo di ritardo, è soddisfatta imponendo il grado relativo del controllore $C(z)$, $r = \deg[D_C(z)] - \deg[N_C(z)]$, ≥ 1.
Per soddisfare la seconda, è necessario che il denominatore del controllore contenga il fattore $z - 1$ se esso non è già presente (a numeratore o a denominatore) nella funzione di trasferimento $\tilde{P}(z)$ della serie H_0 – $P(s)$ – campionatore.
Eseguo prima il calcolo di $\tilde{P}(z)$, alla quale poi verrà applicato il controllore. Si ha:

$$\tilde{P}(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left[S_T\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right]\right]\right]$$

Dove

$$P(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)},$$

$\mathcal{L}^{-1}$ l'antitrasformata secondo Laplace, S_T l'operatore di campionamento con passo T, e $\mathcal{Z}$ la trasformata zeta.

Riscrivo la funzione $\frac{P(s)}{s}$ in fratti semplici:

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}.$$

I residui sono:

$$A = \lim_{s \longrightarrow 0} s \cdot \frac{P(s)}{s} = \lim_{s \longrightarrow 0} \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} = -\frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{s \longrightarrow -1} (s+1) \cdot \frac{P(s)}{s} = \lim_{s \longrightarrow -1} \frac{s-1}{s(s+2)} = 2$$

$$C = \lim_{s \longrightarrow -2} (s+2) \cdot \frac{P(s)}{s} = \lim_{s \longrightarrow -2} \frac{s-1}{(s+1)(s)} = -\frac{3}{2}$$

Quindi antitrasformando:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s+2}\right] = -\frac{1}{2} \cdot \delta_{-1}(t) + 2 \cdot e^{-t} - \frac{3}{2} \cdot e^{-2t}$$

Poi passando nell'operatore di campionamento:

$$S_T[-\frac{1}{2} \cdot \delta_{-1}(t) + 2 \cdot e^{-t} - \frac{3}{2} + 2 \cdot e^{-2t}] = -\frac{1}{2} \cdot \delta_{-1}(k) + 2 \cdot \left(e^{-T}\right)^k - \frac{3}{2} \cdot \left(e^{-2T}\right)^k$$

Trasformando nel discreto attraverso la trasformata Zeta, ponendo $p = e^{-T}$:

$$\mathcal{Z}\left[-\frac{1}{2}\cdot\delta_{-1}(k) + 2\cdot\left(e^{-T}\right)^k - \frac{3}{2} + 2\cdot\left(e^{-2T}\right)^k\right] = -\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-1} + 2\cdot\frac{z}{z-p} - \frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-p^2}$$

infine:

$$\begin{aligned}\tilde{P}(z) &= \frac{z-1}{z}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-1} + 2\cdot\frac{z}{z-p} - \frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-p^2}\right]\\ &= \frac{z[-3p^2+4p-1] - p^3 + 4p^2 - 3p}{2(z-p)(z-p^2)}\end{aligned}$$

e sostituendo $p = e^{-\ln 3} = \frac{1}{3}$:

$$\tilde{P}(z) = \frac{\frac{-8}{27}}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{9}\right)} = \frac{-8}{(3z-1)(9z-1)}$$

Pochè $\tilde{P}(z)$ non ha poli né zeri in 1, il fattore di inseguimento al gradino $(z-1)$ viene imposto nel denominatore del controllore; volendolo con $r \geq 1$ al numeratore è sufficiente imporre un parametro numerico $K \in \mathbb{R}$: la cosa più semplice è porre

$$C(z) = \frac{K}{z-1}.$$

Quindi la funzione di trasferimento della catena di azione diretta risulta:

$$G(z) = \frac{-8K}{(z-1)(3z-1)(9z-1)}.$$

Per semplificare i calcoli, essendo il numeratore una costante, lo imponiamo: $N_G(z) = -8K = A$.

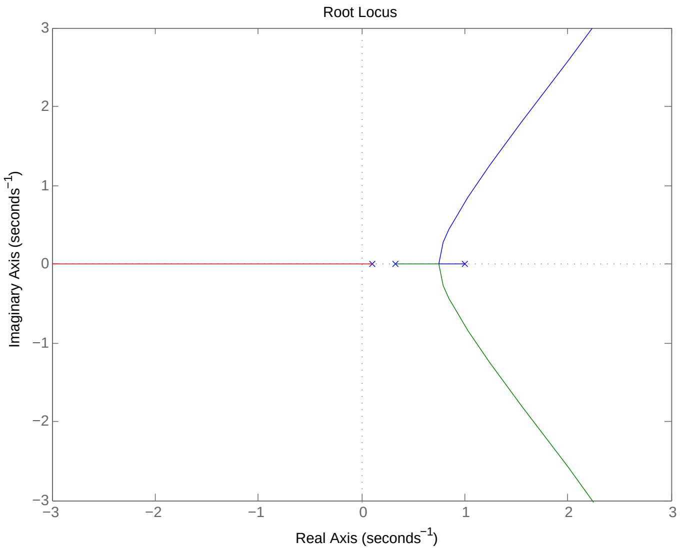
A questo punto dobbiamo vedere se ci sono valori di A (e quindi di K) per i quali il sistema a catena chiusa è BIBO stabile. Infatti, **in assenza di tale proprietà quanto fatto fino a questo momento è privo di valore**. Per studiare per quali A è stabile è stato utilizzato il luogo delle radici relativo a

$$P_G(z) = N_G(z) + D_G(z) = A + (z-1)(3z-1)(9z-1) = 27z^3 - 39z^2 + 13z - 1 + A.$$

Il luogo negativo (ossia corrispondente a valori di A compresi tra 0 e $-\infty$) ha uno dei suoi rami che descrive una semiretta che origina dal punto 1 e rimane sovrapposta al semiasse reale positivo. Dunque questo ramo è interamente contenuto nella regione di instabilità e quindi non vi sono possibilità che il polinomio $P_G(z)$ sia di Schur per valori negativi di A.
Per tracciare il luogo positivo, osserviamo che il grado relativo di $G(z)$ è $r = 3$, quindi tutti e tre i rami tendono all'infinito: uno sull'asse delle ascisse negative, e gli altri due lungo asintoti inclinati di $\pm 120°$ rispetto al semiasse reale negativo. Il centro stella è stato calcolato:

$$c = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}}{3} = \frac{13}{27}.$$

Il luogo ha la forma rappresentata in figura da cui risulta immediato che per valori positivi e sufficientemente piccoli di A il polinomio $P_G(z)$ è di Schur.



Si può ora procedere per tentativi e scegliere, per esempio, $A = 1$. In questo caso $P_G(z) = z(27z^2 - 39z + 13)$ i cui zeri sono $z_1 = 0$ $z_2 \simeq 0.92$ e $z_3 \simeq 0.52$. Pertanto, $A = 1$, ossia $K = -1/8$ risolve il problema. In conclusione, un controllore che risolve il problema posto è

$$C(z) = \frac{-1/8}{z-1}.$$

Per completezza (anche se non è richiesto dall'esercizio) calcoliamo quali sono tutti i valori di A e, quindi, di K che garantiscono la BIBO stabilità della catena chiusa e quindi risolvono il problema. Utilizziamo la trasformazione bilineare di Moebius: ponendo $z = \frac{1+s}{1-s}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} P_G(s) &= 27\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^3 - 39\left(\frac{1+s}{1-s}\right)^2 + 13\left(\frac{1+s}{1-s}\right) - 1 + A \\ &= \frac{1}{(1-s)^3}[s^3(80-A) + s^2(104+3A) + s(32-3A) + A] \end{aligned}$$

Per studiare la stabilità del polinomio sfrutto il criterio di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & \text{(80-A)} & \text{(32-3A)} \\ 2 & \text{(104+3A)} & \text{A} \\ 1 & -\frac{8A^2+296A-3328}{104+3A} & \\ 0 & A & \end{array}$$

Per il criterio devo imporre che tutti i termini della prima colonna della tabella abbiano ugual segno:

$$\begin{cases} A < 80 \\ A > -\frac{104}{3} \\ 8A^2 + 296A - 3328 < 0 \\ A > 0 \end{cases}$$

ossia

$$0 < A < 9.04.$$

Quindi la catena chiusa è BIBO stabile se e solo se $0 < A < 9.04$, ossia se e solo se $-1.1295 < K < 0$.

In conclusione una classe di controllori che soddisfa le specifiche richieste è

$$C(z) = \frac{K}{z-1}, \qquad -1.1295 < K < 0.$$

Per completezza calcoliamo anche i valori critici di s e quindi di z. Andando a sostituire i valori di K critici, ovvero quelli agli estremi dell'intervallo di stabilità, si ottengono gli $s_{critici}$, e di conseguenza gli $z_{critici} = \frac{1+s}{1-s}$ per cui si perde la stabilità.
Per $K = 0$ si ottiene:

$$\begin{cases} s = 0 & \longrightarrow z = 1 \\ s = -\frac{1}{2} & \longrightarrow z = \frac{1}{3} \\ s = -\frac{4}{5} & \longrightarrow z = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Per $K = -1.1295$ si ottiene:

$$\begin{cases} s = -1.844 & \longrightarrow z = -0.2968 \\ s = -0.0005 \pm 0.262j & \longrightarrow z = 0.8706 \pm 0.49j. \end{cases}$$

Quindi i punti z trovati corrispondono al punto di intersezione del luogo con il cerchio unitario che delimita la regione di stabilità a tempo discreto.

B. Data la funzione $C(z) = 4$ calcolare T affinché la funzione di trasferimento in catena chiusa non abbia zeri.

Detto

$$G(z) := C(z)\tilde{P}(z) = 4\tilde{P}(z) = \frac{N_G(z)}{D_G(z)} = \frac{4N_{\tilde{P}}(z)}{D_{\tilde{P}}(z)},$$

si ha

$$W(z) = \frac{C(z)\tilde{P}(z)}{1 + C(z)\tilde{P}(z)} = \frac{N_G(z)}{N_G(z) + D_G(z)} = \frac{4N_{\tilde{P}}(z)}{N_G(z) + D_G(z)}.$$

Pertanto $W(z)$ è privo di zeri se e solo se lo è $\tilde{P}(z)$. Ma abbiamo visto al punto precedente che per $T = \ln(3)$

$$\tilde{P}(z) = \frac{\frac{-8}{27}}{\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{1}{9}\right)} = \frac{-8}{(3z-1)(9z-1)}$$

è privo di zeri. Pertanto $T = \ln(3)$ risolve il problema.

Anche se non è richiesto dall'esercizio, osserviamo che questa è l'unica soluzione. Infatti, prendendo un generico T e ponendo $p := e^{-T}$, si trova che

$$N_G(z) = N_W(z) = 4N_{\tilde{P}}(z) = 4\left[(4p - 3p^2 - 1)z - p^3 + 4p^2 - 3p\right]$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché $N_G(z)$ non abbia zeri è che il coefficiente di zeta sia uguale a zero; cioè:

$$4p - 3p^2 - 1 = (3p-1)(p-1) = 0.$$

Questa condizione è soddisfatta per due valori di p; rispettivamente:

$$\begin{cases} p = \frac{1}{3} & \longrightarrow T = ln3 \quad \text{come nel punto A} \\ p = 1 & \longrightarrow T = 0 \quad \text{condizione non accettabile} \end{cases}$$

Il secondo valore di T trovato risulta non accettabile in quanto non è implementabile fisicamente perché è impossibile avere un tempo di campionamento nullo.

Notiamo infine che il punto B. chiede di determinare T in modo che "la catena chiusa non abbia zeri". Questa richiesta è un po' vaga ed è stata qui interpretata nel senso che "la catena chiusa non abbia zeri nel piano complesso". Infatti, ovviamente lo zero all'infinito è sempre presente.

Esercizio 2. Per calcolare la trasformata Zeta di

$$f(k) = k\sin(2k)e^{-k}$$

si utilizzano le proprietà delle trasformate. In particolare le proprietà di traslazione logaritmica in Z e di analiticità e derivazione. Inizialmente si deve dunque trasformare:

$$x(k) = \sin(2k)$$

Risulta:

$$X(z) = \mathcal{Z}\left[\sin(2k)\right] = \frac{z\sin 2}{z^2 - 2z\cos(2) + 1}$$

Per la proprietà di riscalamento:

$$\mathcal{Z}\left[y(k)\right] = \mathcal{Z}\left[p^k x(k)\right] = X\left[\frac{z}{p}\right]$$

in questo esercizio risulta $p^k = e^{-k}$ e quindi:

$$\mathcal{Z}\left[x(k)e^{-k}\right] = X\left[z \cdot e\right] = \frac{ze\sin 2}{z^2e^2 - 2ez\cos 2 + 1}$$

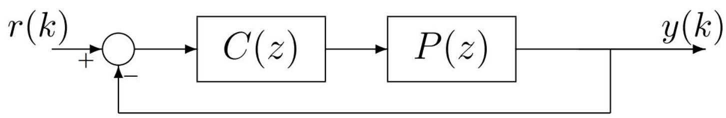
Ora per la proprietà di derivazione risulta:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left[ky(k)\right] = F(z) &= -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{ze\sin 2}{z^2e^2 - 2ze\cos 2 + 1}\right] \\
&= -z\left[\frac{e\sin 2(z^2e^2 - 2ze\cos 2 + 1) - ze\sin 2(2ze^2 - 2e\cos 2)}{(z^2e^2 - 2ze\cos 2 + 1)^2}\right] \\
&= -z\left[\frac{z^2e^3\sin 2 - 2e^2z\sin 2\cos 2 + e\sin 2 - 2z^2e^3\sin 2 + 2ze^2\sin 2\cos 2}{(z^2e^2 - 2ze\cos 2 + 1)^2}\right] \\
&= -z\left[\frac{e\sin 2 - z^2e^3\sin 2}{(z^2e^2 - 2ze\cos 2 + 1)^2}\right] \\
&= ze\sin 2\frac{z^2e^2 - 1}{(z^2e^2 - 2ze\cos 2 + 1)^2}
\end{aligned} \tag{0.1}$$

Domanda di teoria. Nel terzo quesito viene fatta richiesta di verificare, dato

$$P(z) = \frac{(z^2 - \frac{1}{2})^{15}}{(z-2)^{13}(z+2)(z+3)(z+4)^{15}},$$

se esiste un controllore puramente proporzionale $C(z) = k$ tale che renda l'interconnessione presente nella figura sottostante internamente stabile.



Sappiamo che dalla teoria che l'interconnessione è internamente stabile se e solo se
1.

$$Q_k(z) := k(z^2 - \frac{1}{2})^{15} + (z-2)^{13}(z+2)(z+3)(z+4)^{15}$$

è polinomio di Schur e
2.

$$\deg[k(z^2 - \frac{1}{2})^{15} + (z-2)^{13}(z+2)(z+3)(z+4)^{15}] = \deg[(z-2)^{13}(z+2)(z+3)(z+4)^{15}] = 30.$$

La seconda condizione è chiaramente verificata per ogni $k \neq -1$.
Riguardo alla prima possiamo considerare il luogo delle radici relativo alla funzione di trasferimento della catena di azione diretta

$$C(z)P(z) = k\frac{N(z)}{D(z)} = \frac{k(z - \frac{1}{\sqrt{2}})^{15}(z + \frac{1}{\sqrt{2}})^{15}}{(z-2)^{13}(z+2)(z+3)(z+4)^{15}}.$$

Infatti tale luogo, coincide con il luogo degli zeri del polinomio $Q_k(z)$ al variare di k.
Osserviamo che il grado relativo è pari a zero e quindi tutti i rami del luogo tendono, per $k \to +\infty$, agli zeri di $N(z)$ che si trovano tutti nel cerchio unitario aperto.
Esisterà quindi un k abbastanza elevato tale da rendere stabili gli zeri di $D(z) + kN(z)$ e che rende di conseguenza internamente stabile l'interconnessione.