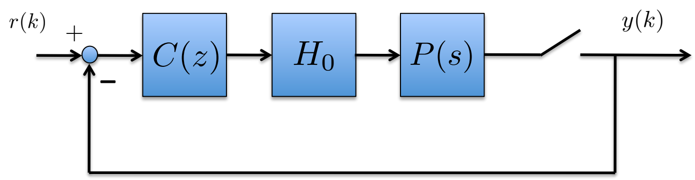
I prova in itinere di CONTROLLO DIGITALE

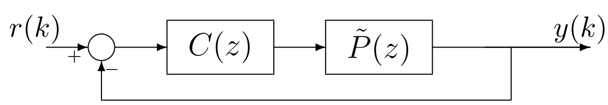
Oltre ai necessari articoli di cancelleria (penna, matita, etc.) si può utilizzare **solo** una calcolatrice non programmabile. Non si possono, in particolare, tenere con sé libri, appunti o quaderni. Le risposte **vanno giustificate**. Saranno rilevanti per la valutazione anche la **concisione**, l'**ordine**, la **chiarezza di esposizione** e la **precisione** delle risposte.
Durata della prova: 2 ore.

Esercizio 1. [10 pt.] Si consideri lo schema rappresentato in figura dove $P(s) = \frac{s+2}{s+1}$ e il periodo di campionamento è pari a $T = \ln(2)$.



A. Si progetti la funzione di trasferimento $C(z)$ di un controllore in modo che siano soddisfatte contemporaneamente le seguenti condizioni:
1. il controllore introduca almeno un passo di ritardo e
2. l'uscita $y(k)$ insegua con errore asintotico nullo un ingresso $r(k) = A\delta_{-1}(k)$ con A costante reale.

B. Sia $\hat{C}(z)$ la funzione di trasferimento del controllore calcolata al punto precedente. Si consideri un nuovo controllore di funzione di trasferimento $C(z) = K\hat{C}(z)$. Si dica per quali valori di $K > 0$ l'interconnessione rappresentata nella figura seguente (dove $\tilde{P}(z)$ è la funzione di trasferimento della serie: $H_0 - P(s) -$ campionatore) è internamente stabile.



Esercizio 2. [4 pt.] Si calcoli l'antitrasformata Z di

$$H(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z+2)}.$$

Domanda di teoria. [4 pt.] Si consideri il sistema lineare Σ descritto dalle equazioni

$$\Sigma : \qquad y(k) = \sum_{l=1}^{n} a_l y(k-l) + \sum_{l=0}^{n} b_l u(k-l)$$

la cui funzione di trasferimento ha n poli distinti a parte reale pari a $1/2$. Si dica, argomentando brevemente (max. 5 righe) la risposta, se la seguente affermazione è vera o falsa: "Se il sistema Σ è BIBO stabile allora è anche asintoticamente stabile.

SOLUZIONE. A cura di: Gloria Gambaretto, Samuele Speranza, Alessia Tagliapietra (edited by AF).

Esercizio 1.
A. L'uscita del sistema retroazionato è data da $Y(z) = R(z)\frac{C(z)\tilde{P}(z)}{1+C(z)\tilde{P}(z)}$, dove $\tilde{P}(z)$ è la funzione di trasferimento della serie: $H_0 - P(s) -$ campionatore.

Calcolo $\tilde{P}(z)$:

$$\tilde{P}(z) = \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\Big[S_T\Big[\mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{P(s)}{s}\Big]\Big]\Big]$$

$$\frac{P(s)}{s} = \frac{s+2}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

Calcolo A e B con il metodo dei residui:

- $A = \lim_{s\to 0} s\frac{P(s)}{s} = 2$
- $B = \lim_{s\to -1}(s+1)\frac{P(s)}{s} = -1$

Quindi

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(z) &= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\Big[S_T\Big[\mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{2}{s} - \frac{1}{s+1}\Big]\Big]\Big] \\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\Big[S_T\Big[2\cdot 1(t) - e^{-t}\Big]\Big] \\
&= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\Big[2\cdot\delta_{-1}(k) - e^{-kT}\Big] \\
&= \frac{z-1}{z}\Big[2\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}\Big] \\
&= 2 - \frac{z-1}{z-e^{-T}}
\end{aligned}$$

Si noti che $S_T[1(t)] = \delta_{-1}(kT) = \delta_{-1}(k)$ dal momento che il valore campionato è sempre pari a 1, qualunque periodo di campionamento T si usi.

Sostituendo $T = \ln(2)$ ottengo:

$$\tilde{P}(z) = 2 - \frac{z-1}{z-e^{-T}} = \frac{z-2e^{-T}+1}{z-e^{-T}} = \frac{z}{z-1/2}$$

Si noti che il grado relativo di $\tilde{P}(z)$ è $r=0$; potevo giungere a questa conclusione anche senza calcolare $\tilde{P}(z)$ perché il grado relativo di $P(s)$ è 0, e quindi anche quello di $\tilde{P}(z)$ è zero. Infatti, in questa conversione la risposta al gradino del sistema discreto è la versione campionata della risposta al gradino del sistema continuo corrispondente; inoltre, se il grado relativo del sistema continuo è diverso da zero, la corrispondente risposta al gradino ha una discontinuità in zero ossia è non nulla in $t=0$. Ma allora la versione campionata di tale risposta al gradino ha il primo campione (corrispondente a $k=0$) che è non nullo e ciò significa che il sistema discreto corrispondente non introduce alcun ritardo ossia ha grado relativo nullo.

Partiamo dalla condizione (2), cioè che sia inseguito con errore asintotico nullo l'ingresso $r(k) = A\delta_{-1}(k)$. Si ha:

$$\mathscr{Z}[r(k)] = R(z) = A\frac{z}{z-1}$$

Si può immediatamente notare che il segnale di ingresso ha il polo di modulo esattamente uguale a 1, ed è perciò un polo instabile. Come si è visto nella teoria, per avere errore asintotico nullo, la funzione di trasferimento della catena di azione diretta deve avere anch'essa un polo in $z = 1$. Visto che tale polo non è presente in $\tilde{P}(z)$, deve essere presente in $C(z)$.

Il più semplice $C(z)$ con questa caratteristica è:

$$C(z) = \frac{1}{z-1}.$$

Tale funzione di trasferimento ha grado relativo pari ad 1 e quindi introduce un passo di ritardo; pertanto viene anche automaticamente soddisfatta la condizione (1) che richiede che $C(z)$ introduca almeno un passo di ritardo (ingegneristicamente $r = 1$ è la soluzione migliore : con $r = 1$ il sistema è reattivo e lascia il tempo necessario al microcontrollore di svolgere i calcoli. Se invece volessi aumentare i passi di ritardo, basterebbe inserire dei poli nell'origine per non alterare la dinamica a tempo continuo).

Rimane solo da verificare, **cosa importantissima in assenza della quale tutto quanto fatto fino a questo momento è privo di senso**, che il sistema retroazionato con questo controllore sia BIBO-stabile. Lo verifico scrivendo la funzione di trasferimento $W(z)$ e calcolandone i poli.

$$W(z) = \frac{C(z)\tilde{P}(z)}{1 + C(z)\tilde{P}(z)} = \frac{z}{z + (z-1)(z-1/2)} = 2\frac{z}{2z^2 - z + 1}$$

i cui poli sono:

$$z_{1,2} = \frac{1}{4} \pm j\frac{1}{4}\sqrt{7}$$

di modulo pari a 1/2, perciò il sistema retroazionato è BIBO-stabile.

B. Considero

$$C(z) = \frac{k}{z-1}.$$

Lo schema proposto dall'esercizio appartiene alla classe di interconnessioni con un unico anello di retroazione negativa, che è internamente stabile se e solo se:

1. $\bar{D} = \prod_{i=1}^{n} D_i + \prod_{i=1}^{m} N_i$ è un polinomio di Schur (in questo esercizio ho un unico anello di retroazione, $i = 2$, e $N_1/D_1 = k/(z-1)$ e $N_2/D_2 = z/(z-1/2)$)

2. $deg\bar{D} = deg \prod D_i$

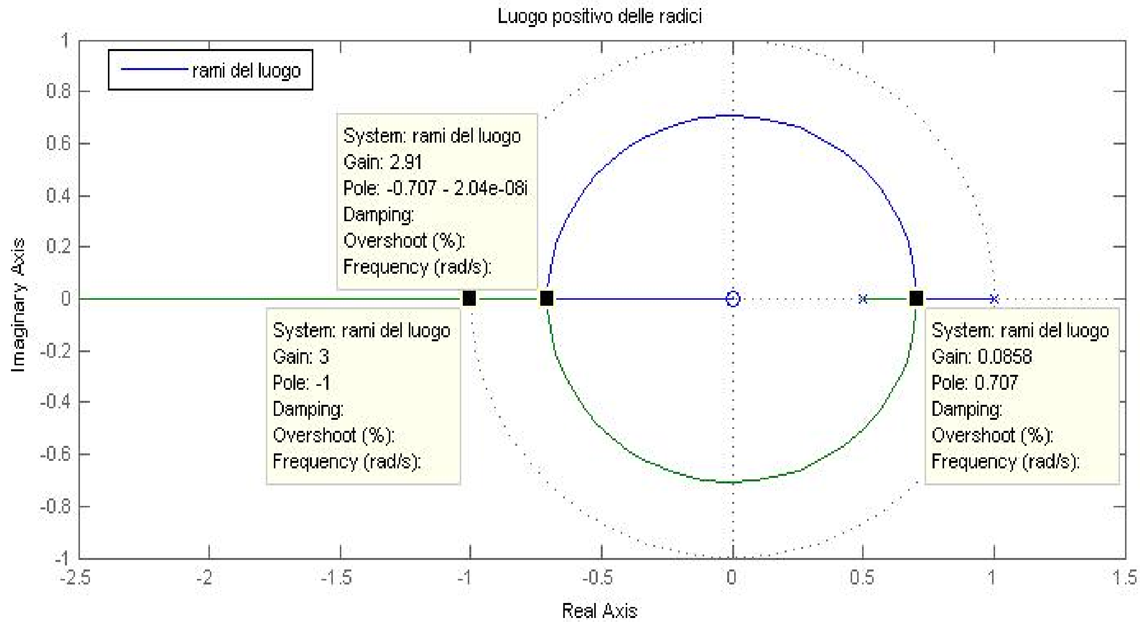
In questo caso, dato che l'interconnessione è espressa dalla formula

$$H(z) = C(z)\tilde{P}(z) = \frac{k \cdot z}{(z-1)(z-1/2)},$$

otterrò:

$$\bar{D}(z) = (z-1)(z-1/2) + k \cdot z = z^2 + (k - 3/2)z + 1/2.$$

che è proprio l'espressione che identifica anche il luogo delle radici di $H(z)$. Posso allora studiare per quali valori di k, il polinomio $\bar{D}(z)$ è di Schur studiando il luogo delle radici, in particolare il luogo positivo, dato che è richiesta la stabilità interna per $k > 0$. Il luogo ha la forma rappresentata in figura



Per calcolare i punti doppi, imponiamo: $ND' = ND'$, ossia,

$$k(z-1)(z-1/2) = k \cdot z[(z-1/2)+(z-1)]$$

da cui si ottiene: $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$: punti all'interno della circonferenza unitaria. I rispettivi valori di k sono $k = \frac{3}{2} \mp \sqrt{2}$.

Si può indovinare che le parti dei rami del luogo a parte immaginaria non nulla, resteranno all'interno del cerchio di raggio unitario. Per verifica, imponiamo che gli zeri di $\bar{D}(z)$ abbiano parte immaginaria non nulla e calcoliamone il modulo: gli zeri di $\bar{D}(z)$ hanno parte immaginaria non nulla se $(k-3/2)^2-2 < 0$ ossia se $k \in (\frac{3}{2}-\sqrt{2}, \frac{3}{2}+\sqrt{2})$. In tal caso, tali zeri sono dati da

$$z_{1/2} = \frac{\frac{3}{2} - k \pm j\sqrt{-(k-3/2)^2+2}}{2}.$$

Il modulo di tali zeri è:

$$\frac{\sqrt{(\frac{3}{2}-k)^2 + 2 - (\frac{3}{2}-k)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

da cui si deduce non solo che le parti dei rami del luogo a parte immaginaria non nulla sono confinate all'interno del cerchio di raggio unitario, ma anche che descrivono una circonferenza.

Come si vede dalla figura, c'è un solo asintoto a $-\infty$: infatti, il grado relativo di $H(z)$ è $r = 1$.

In conclusione, il polinomio $\bar{D}(z)$ è di Schur se e solo se $k < k_{cr}$, dove k_{cr} è il valore di k per il quale il luogo interseca il punto $z_{cr} = -1$. Dunque posso calcolare k_{cr} imponendo

$$P(-1) = D(-1) + k_{cr}N(-1) = 0$$

da cui

$$k_{cr} = \frac{-D(-1)}{N(-1)} = 3$$

Quindi, c'è BIBO-stabilità per $0 < k < 3$. Si noti inoltre che il punto (2) è soddisfatto, poichè $deg\bar{D} = deg\prod D_i = 2$ per ogni k. Pertanto, per ogni $0 < k < 3$ vi è anche stabilità interna.

Esercizio 2. Per il calcolo dell'antitrasformata si può utilizzare il metodo visto a lezione, sfruttando la funzione di trasferimento ausiliaria $H^{'}(z)$

$$H^{'}(z) = \frac{H(z)}{z} = \frac{1}{z(z+1)^2(z+2)}$$

L'espressione può essere riscritta così mediante l'utilizzo dei fratti semplici:

$$H^{'}(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{(z+1)^2} + \frac{B^{'}}{(z+1)} + \frac{C}{(z+2)}$$

Utilizzando il metodo dei residui andiamo a calcolare le quattro costanti:

- $A = \lim_{z \to 0} zH^{'}(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z+2)}|_{z=0} = \frac{1}{2} = 0.5$
- $B = \lim_{z \to -1} (z+1)^2 H^{'}(z) = \frac{1}{z(z+2)}|_{z=-1} = -1$
- $B^{'} = \lim_{z \to -1} (z+1)(H^{'}(z) - \frac{B}{(z+1)^2}) = \frac{z+1}{z(z+2)}|_{z=-1} = 0$
- $C = \lim_{z \to -2} (z+2)H^{'}(z) = \frac{1}{z(z+1)^2}|_{z=-2} = -\frac{1}{2}$

Ora possiamo esprimere la funzione $H^{'}(z)$ nella seguente forma:

$$H^{'}(z) = \frac{0.5}{z} - \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{0.5}{(z+2)}$$

Da cui possiamo ricavare $H(z)$ moltiplicando per z:

$$H(z) = 0.5 - \frac{z}{(z+1)^2} - 0.5\frac{z}{(z+2)}$$

Per il calcolo di $h(k)$ vengono utilizzate le seguenti antitrasformate:

$$\mathscr{L}^{-1}\Big[1\Big] = \delta(k)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{z}{z-p}\Big] = p^k\delta_{-1}(k)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\Big[\frac{z}{(z-p)^2}\Big] = kp^{k-1}\delta_{-1}(k)$$

Risulta perciò il seguente segnale discreto:

$$h(k) = \frac{1}{2}\delta(k) - k(-1)^{k-1} - \frac{1}{2}(-2)^k = \frac{1}{2}\delta(k) + k(-1)^k - \frac{1}{2}(-2)^k$$

È possibile fare una verifica dei risultati, poiché il grado relativo di $H(z)$ indica quanti dei primi coefficienti dell'antitrasformata sono nulli, cioè qual è il ritardo intrinseco del sistema. In generale infatti si ottiene che:

$$f(0) = f(1) = ... = f(r-1) = 0$$

$$f(r) \neq 0$$

In questo caso, avendo $r = 3$, dovrebbe risultare:

$$h(0) = h(1) = h(2)) = 0 \qquad h(3) \neq 0$$

Lo verifico:

- $h(0) = \frac{1}{2}\delta(0) + 0(-1)^0 - \frac{1}{2}(-2)^0 = 0 \qquad \surd$
- $h(1) = \frac{1}{2}\delta(1) + 1(-1)^1 - \frac{1}{2}(-2)^1 = 0 \qquad \surd$
- $h(2) = \frac{1}{2}\delta(2) + 2(-1)^2 - \frac{1}{2}(-2)^2 = 0 \qquad \surd$
- $h(3) = \frac{1}{2}\delta(3) + 3(-1)^3 - \frac{1}{2}(-2)^3 = 1 \neq 0 \qquad \surd$

Esercizio 3. Prendendo la trasformata zeta del sistema discreto $\sum$:

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z) + \frac{C(z)}{A(z)}$$

dove:

- $A(z)$ è un polinomio in z^{-1} di grado n;
- $B(z)$ è un polinomio in z^{-1} di grado m;
- $C(z)$ è un polinomio in z^{-1} di grado $\leq n-1$;
- $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ è la funzione di trasferimento (FdT).

L'affermazione "se il sistema $\sum$ è BIBO-stabile allora è anche asintoticamente stabile" in generale non è vera: questo accade solo quando nella FdT non sono avvenute cancellazioni di poli instabili. Nel nostro caso dire che la FdT ha n poli distinti significa proprio che non ci sono state cancellazioni, pertanto i poli di $H(z)$ sono esattamente le radici di $A(z)$, quindi l'affermazione è vera.