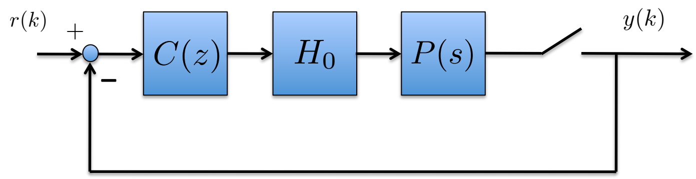
Esame di CONTROLLO DIGITALE

Durata della prova: 2 ore.

Quesito 1. Si consideri l'interconnessione in Figura, con $T = 0.001$ secondi, e

$$P(s) = \frac{10(s-1)}{(s+5)(s+0.5)}.$$

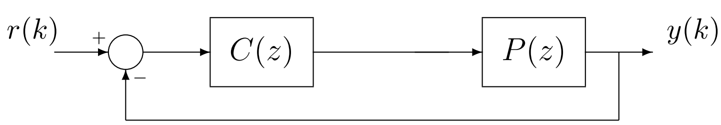


Si progetti $C(z)$ utilizzando la sintesi diretta in modo che il sistema in catena chiusa sia internamente stabile e soddisfi le specifiche $t_r = 0.09$ secondi, e $m_p = 1/40$.

Si dica se il controllore progettato garantisce l'inseguimento asintotico di segnali a gradino. Se sì, si dica anche se tale proprietà è robusta rispetto a piccole variazioni del guadagno di $P(s)$, ossia se si mantiene anche nel caso in cui $P(s) = \frac{(10+\delta)(s-1)}{(s+5)(s+0.5)}$ con δ sufficientemente piccolo.

Quesito 2. Si consideri l'interconnessione in figura, con $T = 0.001$ secondi, e

$$P(z) = \frac{10(z-0.4)}{z-1}.$$



Si progetti una funzione di trasferimento $C(z)$ strettamente causale in modo che la funzione di trasferimento a catena chiusa abbia tempo di salita inferiore ma circa pari a 0.05 secondi e massima sovraelongazione inferiore al 10%.

Soluzione.

Quesito 1.

Per prima cosa calcoliamo $\tilde{P}(z)$ ottenuta da $P(s)$ per tenuta e campionamento.

$$\begin{aligned}\tilde{P}(z) &= \frac{z-1}{z}\mathscr{Z}\left[\mathscr{S}_T\left[\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{s}\right]\right]\right] \\ &= K\frac{z-z_1}{(z-p_1)(z-p_2)},\end{aligned}$$

dove

$$K = 0.009968, \quad z_1 = 1.001, \quad p_1 = e^{-5T} = 0.995, \quad p_2 = e^{-0.5T} = 0.9995.$$

Per avere interna stabilità della catena chiusa, è sufficiente garantire che z_1 sia anche zero della relativa funzione di trasferimento (infatti p_1 e p_2 si trovano all'interno della circonferenza unitaria). Inoltre, per la fisica realizzabilità del controllore la funzione di trasferimento $W(z)$ a catena chiusa deve avere grado relativo almeno pari ad 1. Posso dunque considerare una funzione di trasferimento a catena chiusa del tipo

$$W(z) = K_W\frac{z-z_1}{(z-p)(z-\bar{p})}$$

che garantisce fisica realizzabilità di $C(z)$ e interna stabilità (purché $|p| < 1$), dove la coppia di poli complessi coniugati p e $\bar{p}$ viene fissata in modo da soddisfare le specifiche sul transitorio e K_W viene fissato in modo da garantire inseguimento asintotico del riferimento a gradino. Quest'ultima specifica è facile da imporre basta infatti porre $W(1) = 1$ ossia

$$K_W = \frac{(1-p)(1-\bar{p})}{1-z_1} = \frac{|1-p|^2}{1-z_1}.$$

Per calcolare p traduciamo le specifiche assegnate nel dominio del tempo in specifiche sullo smorzamento ξ e sulla pulsazione naturale ω_n. Applicando le formule note otteniamo

$$\xi = -\frac{\ln(m_p)}{\sqrt{\pi^2+\ln^2(m_p)}} = 0.79,$$

e

$$\omega_n = 1.8/t_r = 20.$$

Possiamo dunque fissare i poli dominanti a tempo continuo in

$$p_{c1/2} = \omega_n\xi \pm \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 15.8 \pm j12.26$$

e quindi possiamo fissare i poli complessi coniugati a tempo discreto ai valori

$$p = e^{p_{c1}T} = 0.9843 + j0.0121, \qquad \bar{p} = e^{p_{c2}T} = 0.9843 - j0.0121$$

In conclusione,

$$W(z) = -0.3929\frac{z-1.001}{z^2-1.969z+0.969}$$

e quindi

$$C(z) = \frac{1}{P(z)}\frac{W(z)}{1-W(z)} = \frac{K_W}{K}\frac{(z-p_1)(z-p_2)}{(z-p)(z-\bar{p})-K_W(z-z_1)}.$$

Si osserva che il progetto è stato fatto solo tenendo conto dei poli dominanti di $W(z)$ però in questo caso siamo stati costretti a inserire lo zero instabile che è molto vicino ad 1. Questo potrebbe provocare una sottoelongazione notevole con conseguente allungamento del tempo di ritardo e aumento della sovraelongazione. A questo punto, prima di implementare il controllore sarà opprtuno verificarne il comportamento in simulazione ed, eventualmente, apportare le dovute modifiche al progetto.

Riguardo al fatto che il controllore insegua con errore asintotico nullo riferimenti a gradino, abbiamo progettato K_W appositamente a questo scopo e quindi l'inseguimento è garantito.

Infine, riguardo alla robustezza, abbiamo progettato il controllore in modo da avere inseguimento asintotico di riferimenti a gradino. Come conseguenza, la relativa funzione di trasferimento deve avere un polo in $z = 1$, e, in effetti, ponendo $z = 1$, si vede che il denominatore di $C(z)$ vale

$$(1-p)(1-\bar{p}) - K_W(1-z_1) = |1-p|^2 - K_W(1-z_1) = 0,$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che abbiamo posto

$$K_W = \frac{(1-p)(1-\bar{p})}{1-z_1} = \frac{|1-p|^2}{1-z_1}.$$

Piccole variazioni del guadagno di $P(s)$ non modificano questo fatto e quindi la proprietà di inseguimento di gradini è verificata in modo robusto.

Quesito 2.

La funzione di trasferimento $P(z)$ ha grado relativo nullo, pertanto, per avere $C(z)$ strettamente propria, la funzione di trasferimento $W(z)$ a catena chiusa deve essere essa stessa strettamente propria. Posso dunque considerare una funzione di trasferimento a catena chiusa del tipo

$$W(z) = K_W\frac{z}{(z-p)(z-\bar{p})}$$

dove la coppia di poli complessi coniugati p e $\bar{p}$ viene fissata in modo da soddisfare le specifiche sul transitorio e K_W viene fissato in modo da garantire stabilità interna. L'unico zero di $P(z)$ si trova all'interno della circonferenza unitaria mentre il polo si trova in 1 e deve pertanto essere zero di $[(z-p)(z-\bar{p})-K_W z]$ affinché sia garantita la stabilità interna dell'interconnessione. Dunque, la stabilità interna è garantita se e solo se

$$K_W = (1-p)(1-\bar{p}) = |1-p|^2.$$

Si noti che la stessa condizione garantisce anche

$$W(1) = 1$$

ossia inseguimento asintotico perfetto di riferimenti a gradino. Questo fatto non sorprende visto che la stabilità interna viene garantita dall'assenza di cancellazioni nella regione instabile. In questo caso, $P(z)$ non ha zeri in tale regione e l'unico polo è proprio quello che garantisce l'inseguimento asintotico di riferimenti a gradino. Tale garanzia viene meno solo se il polo viene cancellato da uno zero di $C(z)$ cosa che corrisponde alla perdita di stabilità interna.

Per calcolare p traduciamo le specifiche assegnate nel dominio del tempo in specifiche sullo smorzamento ξ e sulla pulsazione naturale ω_n. Applicando le formule note otteniamo

$$\xi = -\frac{\ln(m_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(m_p)}} - \frac{\ln(0.1)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.1)}} = 0.59$$

e

$$\omega_n = 1.8/t_r = 36.$$

Possiamo dunque fissare i poli dominanti a tempo continuo a

$$p_{c1/2} = \omega_n \xi \pm \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

e quindi possiamo fissare i poli complessi coniugati a tempo discreto ai valori

$$p = e^{p_{c1}T}, \qquad \bar{p} = e^{p_{c2}T}$$

In conclusione,

$$W(z) = |1 - p|^2 \frac{z}{(z - p)(z - \bar{p})}$$

e quindi

$$C(z) = \frac{1}{P(z)} \frac{W(z)}{1 - W(z)}.$$

Si noti, che ci deve essere una cancellazione "esatta" fra lo zero in 1 di $\frac{1}{P(z)}$ e un polo in 1 di $\frac{W(z)}{1-W(z)}$. Tale cancellazione va fatta *prima* di implementare il controllore in modo che sia garantita la stabilità interna.