Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 31 Gennaio 2014 (Primo appello, a.a. 2013-2014)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = e^{\frac{2}{\log(9-x^2)}}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x) + \sin x}{\cos^2 x - 5\cos x - 6}\, dx.$$

Esercizio 3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x} - \tan(\sqrt{x}))}{(e^x - 1)\sqrt{x}}.$$

Esercizio 4. Per ogni $\alpha > 0$, determinare il carattere di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to(-3)^+} f(x) = 4$.

(5.b) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Tempo: 3 ore.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo libretto universitario e penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 31 Gennaio 2014 (Primo appello, a.a. 2013-2014)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = e^{\frac{3}{\log(x^2-4)}}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Lo studio della convessità non è richiesto

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x) + 3\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 8}\, dx.$$

Esercizio 3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin(x - \tan x)}{(1 - \cos x)}.$$

Esercizio 4. Per ogni $\alpha > 0$, determinare il carattere di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{1/3} \left| e^{1/n} - 1 - \frac{1}{n^\alpha} \right|.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 2$.

(5.b) Enunciare la formula fondamentale del calcolo integrale.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo libretto universitario e penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 31 Gennaio 2014 (Primo appello, a.a. 2013-2014)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:_______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = e^{\frac{5}{\log(x^2-8)}}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Lo studio della convessità non è richiesto

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{3\cos x + \sin(2x)}{\sin^2 x + \sin x - 6}\, dx.$$

Esercizio 3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(\sqrt{x}) - e^{\sqrt{x}} + 1}{\sqrt{x}(\sin(\sqrt{x}))}.$$

Esercizio 4. Per ogni $\alpha > 0$, determinare il carattere di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin(1/n) - 1/n^{\alpha}|}{n^{1/2}}.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = 3$.

(5.b) Enunciare il teorema del confronto per i limiti (detto anche teorema dei due carabinieri).

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo libretto universitario e penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 31 Gennaio 2014 (Primo appello, a.a. 2013-2014)

Cognome e nome:____ Matricola:________________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = e^{\frac{2}{\log(5-x^2)}}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Lo studio della convessità non è richiesto

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{3\sin x + \sin(2x)}{\cos^2 x - \cos x - 6}\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sqrt{x}) - \sin(\sqrt{x})}{(1-\cos(\sqrt{x}))}.$$

Esercizio 4. Per ogni $\alpha > 0$, determinare il carattere di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1) - \log n}{(1+n)^\alpha}.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 5$.

(5.b) Enunciare il Criterio di Leibniz per la convergenza di serie a segni alterni.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo libretto universitario e penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Esercizio 1 : $f(x) = e^{\frac{5}{lg(x^2-8)}}$.

1.a) D_f : $\begin{cases} lg(x^2-8) \neq 0 \\ x^2-8 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-8 \neq 1 \\ x^2-8>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 \neq 9 \\ x^2 > 8 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty) \\ x \neq -3 \quad e \quad x \neq 3 \end{cases}$ Pertanto,

$D_f : (-\infty, -3) \cup (-3, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, 3) \cup (3, +\infty)$

simmetrie $lg((-x)^2-8) = lg(x^2-8)$ e quindi f è pari.

segno $f(x) > 0$ essendo un esponenziale.

1b) Limiti

$\lim_{x \to (2\sqrt{2})^+} e^{\frac{5}{lg(x^2-8)}} = \lim_{t \to 0^+} e^{\frac{5}{lg(t)} \to -\infty} = \lim_{u \to 0^-} e^u = 1^-$

$\lim_{x \to (-2\sqrt{2})^-} f(x) = \lim_{x \to (2\sqrt{2})^+} f(x)$ perché f è pari

$\lim_{x \to 3^-} e^{\frac{5}{lg(x^2-8)}} = \lim_{t \to 1^-} e^{\frac{5}{lg\,t} \to 0^-} = \lim_{u \to -\infty} e^u = 0^+$

$\lim_{x \to (-3)^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = 0^+$ perché f è pari

$\lim_{x \to 3^+} e^{5/lg(x^2-8)} = \lim_{t \to 1^+} e^{\frac{5}{lg\,t} \to 0^+} = \lim_{u \to +\infty} e^u = +\infty$

[$\Rightarrow x = 3$ è as. vert. destro]

$\lim_{x \to (-3)^-} e^{5/lg(x^2-8)} = \lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$ perché f è pari

[$\Rightarrow x = -3$ è as. vert sinistro]

$\lim_{x \to +\infty} e^{5/lg(x^2-8)} = \lim_{t \to +\infty} e^{5/lg\,t \to +\infty} = \lim_{u \to 0^+} e^u = 1^+$

[$y = 1$ è as. or. a $+\infty$]

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1^+$ perché f è pari (2)

[$y=1$ è as. oriz. a $-\infty$]

Data l'esistenza di asintoti orizzontali, non esistono as. obliqui.

1c) f è comp. di funzioni derivabili dove definite. Pertanto f è derivabile in D_f (e ovviamente è anche continua in D_f).

calcolo $f'(x)$:

$$f'(x) = e^{\frac{5}{lg(x^2-8)}} \cdot 5 \cdot (-1) \cdot (lg(x^2-8))^{-2} \cdot \frac{2x}{x^2-8}$$

$$= \frac{-10x}{(x^2-8)\underbrace{lg^2(x^2-8)}_{>0}} \underbrace{e^{\frac{5}{lg(x^2-8)}}}_{>0}$$

pertanto:

$$f'(x)=0 \iff \frac{x}{x^2-8}=0 \iff x=0 \notin D_f$$

$$f'(x)>0 \iff \frac{-10x}{x^2-8}>0 \iff \frac{x}{x^2-8}<0$$

$$\iff \left(\begin{cases} x>0 \\ x^2-8<0 \end{cases} \cup \begin{cases} x<0 \\ x^2-8>0 \end{cases}\right) \cap D_f = (A\cup B)\cap D_f$$
$$=(A\cap D_f)\cup(B\cap D_f)$$

Ma $A\cap D_f = \phi$. Quindi

$$f'(x)>0 \iff \left(\begin{cases} x<0 \\ x^2-8>0 \end{cases}\right)\cap D_f \iff (x<-2\sqrt{2})\cap D_f$$

$$\iff x\in(-\infty,-3)\cup(-3,-2\sqrt{2})$$

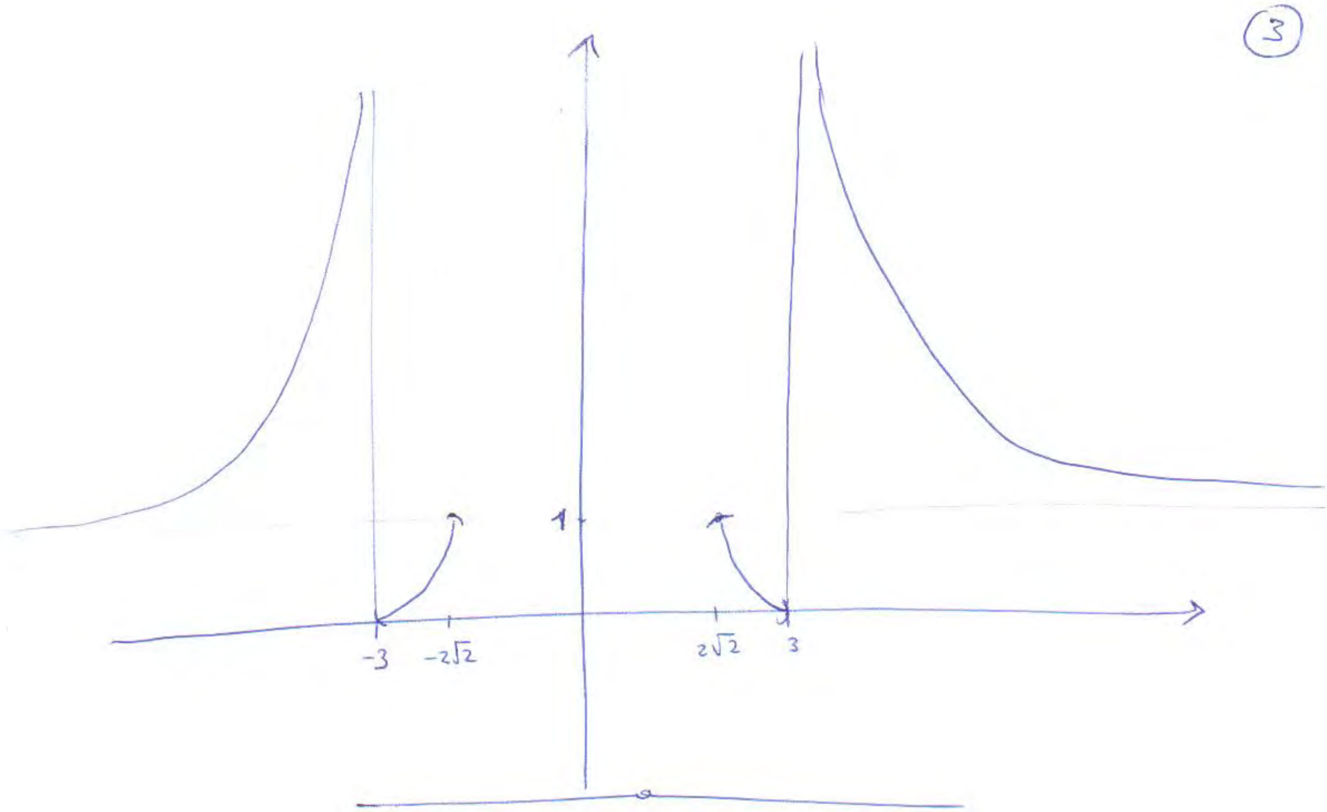
Di conseguenza:

f non ammette punti critici

f è strettamente crescente per $x\in(-\infty,-3)\cup(-3,-2\sqrt{2})$

f è " decrescente per $x\in(2\sqrt{2},3)\cup(3,+\infty)$

f non ammette massimi/minimi relativi; $\inf f(f)=0$ ma f non amette minimo assoluto (se $\exists\, \bar{x} / f(\bar{x})=0$ $\Rightarrow \exists\, x' / e^{x'}=0$ che è falso); $\sup(f)=+\infty$ dai limiti; quindi f non ammette massimo assoluto.



Esercizio 2 Calcolare $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{3\cos x + \sin(2x)}{\sin^2 x + \sin x - 6}\,dx$

grazie alle formule di duplicazione si ha $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

Quindi l'integranda diviene $\cos x \left(\frac{3 + 2\sin x}{\sin^2 x + \sin x - 6} \right)$

Mediante la sostituzione $t = \sin x$ otteniamo che l'int^{le} diviene $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \frac{3+2t}{t^2+t-6}\,dt$ dove $t_0 \,/\, t_0 = \sin \pi/2 = 1$, $t_1 \,/\, t_1 = \sin \pi = 0$

Abbiamo quindi da calcolare

$$\int_1^0 \frac{3+2t}{t^2+t-6}\,dt = -\int_0^1 \frac{3+2t}{t^2+t-6}\,dt$$

Ma $t^2+t-6 = (t+3)(t-2)$. Il metodo di int. delle funzioni razionali prescrive di det. $A, B \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{3+2t}{t^2+t-6} = \frac{A}{t+3} + \frac{B}{t-2} = \frac{A(t-2)+B(t+3)}{t^2+t-6}$$

da cui $\begin{cases} A+B = 2 \\ -2A+3B = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} B = 2-A \\ -2A+6-3A = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} \\ -5A = -3 \end{cases}$

$$\begin{cases} B = 7/5 \\ A = 3/5 \end{cases}$$. Pertanto

$$\int_1^0 \frac{3+2t}{t^2+t-6}\,dt = -\left[\frac{3}{5}\int_0^1 \frac{dt}{t+3} + \frac{7}{5}\int_0^1 \frac{dt}{t-2}\right]$$

$$= -\left[\frac{3}{5}\lg|t+3|\Big|_0^1 + \frac{7}{5}\lg|t-2|\Big|_0^1\right]$$

$$= -\left[\frac{3}{5}(\lg 4 - \lg 3) + \frac{7}{5}(\underbrace{\lg 1}_{0} - \lg 2)\right]$$

$$= -\left[\frac{3}{5}\,2\lg 2 - \frac{3}{5}\lg 3 - \frac{7}{5}\lg 2\right]$$

$$= -\left[-\frac{1}{5}\lg 2 - \frac{3}{5}\lg 3\right] = \frac{1}{5}\lg 2 + \frac{3}{5}\lg 3$$

Esercizio 3 Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(\sqrt{x}) - e^{\sqrt{x}} + 1}{\sqrt{x}\,\sin(\sqrt{x})} = (*)$$

Ricordiamo che $\sin(y) = y + o(y^2)$ per $y \to 0$;

quindi $\sqrt{x}\sin(\sqrt{x}) = \sqrt{x}(\sqrt{x} + o(x)) = x + o(x^{3/2})$

per $x \to 0^+$

Inoltre

$$\tan(y) = y + \frac{y^3}{3} + o(y^4) \quad \text{per } y \to 0$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{per } y \to 0;$$

pertanto

$$\tan(\sqrt{x}) - (e^{\sqrt{x}} - 1) = \sqrt{x} + \frac{x^{3/2}}{3} + o(x^2) + $$

$$- \left(\sqrt{x} + \frac{x}{2} + o(x)\right)$$

$$= -\frac{x}{2} + \frac{x^{3/2}}{3} + o(x^2) + o(x)$$

$$= -\frac{x}{2} + o(x) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(\sqrt{x}) - e^{\sqrt{x}} + 1}{\sqrt{x}\,\sin(\sqrt{x})} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x}{2} + o(x)}{x + o(x^{3/2})}$$

$$= -1/2$$

per il principio di cancellazione degli infinitesimi.

ESERCIZIO 4 Per $\alpha > 0$ determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin(1/n) - \frac{1}{n^\alpha}|}{n^{1/2}}$$

Posto $a_n = (|\sin(1/n) - 1/n^\alpha|)\, n^{-1/2}$ si ha chiaramente che $a_n \geq 0$. Inoltre $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ essendo il prodotto di f. infinitesime.

Dato che $\sin(y) = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4)$ per $y \to 0$, per si ha

$$\sin\left(\tfrac{1}{n}\right) - \tfrac{1}{n^\alpha} = \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{6n^3} + o\left(\tfrac{1}{n^4}\right) - \tfrac{1}{n^\alpha} \quad \text{per } n \to +\infty$$

e

$$a_n = \left| \frac{1}{n^{3/2}} - \frac{1}{6n^{7/2}} - \frac{1}{n^{\alpha+1/2}} + o\left(\frac{1}{n^{9/2}}\right) \right| \quad \text{per } n \to +\infty$$

Quindi:

per $\alpha = 1$: $a_n \to 0$ di ordine $7/2$

per $\alpha > 1$: $a_n \to 0$ di ordine $3/2$

per $\alpha \in (0,1)$: $a_n \to 0$ di ordine $\alpha + 1/2$

Osservando che $\alpha + 1/2 > 1$ per $\alpha > 1/2$, grazie al ~~teorema~~ criterio dell'ordine di infinitesimo per le serie, si ha che

$$\sum a_n \text{ converge} \iff \alpha > 1/2$$

e ovviamente

$$\sum a_n \text{ diverge} \iff \alpha \in (0, 1/2).$$

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 12 Febbraio 2014 (Secondo appello, a.a. 2013-2014)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = |2x+1|e^{1/x}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$. Studiare la convessità e determinare i punti di flesso.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi} |x \cos x| \, \mathrm{d}x.$$

Esercizio 3. Per ogni $\alpha < 0$, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\alpha x^2} - \cos x + (\log(1+x))^2}{x^3}.$$

Esercizio 4. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 3y' - 4y = e^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5. (5.a) Si fornisca la definizione di: $\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{d}t$ è convergente, dove f è definita in $[0, +\infty)$.

(5.b) Enunciare il criterio della radice per la convergenza delle serie.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo libretto universitario e penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 12 Febbraio 2014 (Secondo appello, a.a. 2013-2014)

Cognome e nome:________________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = |x-2|e^{-1/x}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$. Studiare la convessità e determinare i punti di flesso.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{1/e}^{e} |x \log x| \, dx.$$

Esercizio 3. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{\log(1+\alpha x^2) - (e^x - 1)^2 - \sin(x^2)}.$$

Esercizio 4. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = e^{-2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 5. (5.a) Si fornisca la definizione di: $\int_{-\infty}^{1} f(t)\, dt$ è convergente, dove f è definita in $(-\infty, 1]$.

(5.b) Enunciare il criterio della rapporto per la convergenza delle serie.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo libretto universitario e penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 12 Febbraio 2014 (Secondo appello, a.a. 2013-2014)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = |x+3|e^{1/x}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$. Studiare la convessità e determinare i punti di flesso.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} |x \sin x| \, \mathrm{d}x.$$

Esercizio 3. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{\sqrt{2}x}-1)^2 - \sin(\alpha x^2) + \arctan(x^2)}{x^3}.$$

Esercizio 4. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^{2x} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5. (5.a) Si fornisca la definizione di: $\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ è convergente, dove f è definita in $[0,2)$.

(5.b) Enunciare il teorema della media integerale.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo libretto universitario e penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 12 Febbraio 2014 (Secondo appello, a.a. 2013-2014)

Cognome e nome:____________________ Matricola:__________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = |2x-3|e^{-1/x}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$. Studiare la convessità e determinare i punti di flesso.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-1}^{1} |x^2 \arctan x| \, dx.$$

Esercizio 3. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{\log(1-\alpha x^2) + \cos x + e^{2x^2} - 2}.$$

Esercizio 4. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 5y = e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 5. (5.a) Si fornisca la definizione di: $\int_{-1}^{0} f(t)\, dt$ è convergente, dove f è definita in $(-1, 0]$.

(5.b) Enunciare il criterio integrale per la convergenza delle serie.

Tempo: 3 ore.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo libretto universitario e penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Risolutione Fila D 12/02/2014

Esercizio 1   Studiare $f(x) = |2x-3|\, e^{-1/x}$ (1)

D_f : $\{x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Segno: $f(x) \geq 0$ perché prodotto di funzioni non negative.

$f(x) = 0 \iff |2x-3| = 0 \iff x = 3/2$ [$\Rightarrow \frac{3}{2}$ PUNTO MIN ASSOLUTO]

Simmetrie: siccome $f(1) = e^{-1}$; $f(-1) = 5e$, f non è né pari né dispari.

Limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{|2x-3|}_{\downarrow +\infty}\, \underbrace{e^{-1/x}}_{\downarrow 1} = +\infty \quad [\Rightarrow \nexists \text{ massimi assoluti}]$$

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{|2x-3|}_{\downarrow 3}\, \underbrace{e^{-1/x}}_{\downarrow 0} = 0^+$$

$$\lim_{x\to 0^-} \underbrace{|2x-3|}_{\downarrow 3}\, \underbrace{e^{-1/x}}_{\downarrow +\infty} = +\infty \quad [\Rightarrow x=0 \text{ : as. vert sinistro}]$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{|2x-3|}_{\downarrow +\infty}\, \underbrace{e^{-1/x}}_{\downarrow 1} = +\infty$$

$\nexists$ asintoti orizzontali

As. obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x>3/2)}} \underbrace{\frac{(2x-3)}{x}}_{\downarrow 2}\, \underbrace{e^{-1/x}}_{\downarrow 1} = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x>3/2)}} (2x-3)\, e^{-1/x} - 2x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2x\,(e^{-1/x} - 1) \underbrace{-3e^{-1/x}}_{\downarrow -3}$$

$$= 2\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-1/x} - 1}{1/x}\right) - 3$$

Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-1/x}-1}{1/x} \underset{t=-1/x}{=} -\lim_{t\to 0^-} \frac{e^{t}-1}{t} \underset{\text{limiti notevoli}}{=} -1$$

abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = -2-3 = -5$$

Pertanto $\boxed{y = 2x-5 \text{ è asintoto obliquo a } +\infty.}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x<3/2}} \frac{(3-2x)}{x} e^{-1/x} = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x) = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x<3/2}} (3-2x)e^{-1/x}+2x = \lim_{x\to-\infty} 2x(1-e^{-1/x}) + \underbrace{3e^{-1/x}}_{3}$$

$$= 2\lim_{x\to-\infty} \frac{1-e^{-1/x}}{1/x} + 3$$

$$= -2\lim_{t\to 0^+} \frac{1-e^{t}}{t} + 3 \underset{\substack{\text{limiti} \\ \text{notevoli}}}{=} 2+3 = 5$$

Pertanto $\boxed{y = 2x+5 \text{ è as. obliquo a } -\infty.}$

Derivabilità / continuità

f è continua dove definita perché prodotto di f. continue.
f è derivabile in $D_f \setminus \{3/2\} = (\mathbb{R}\setminus\{0\})\setminus\{3/2\} = \mathbb{R}\setminus\{0, \frac{3}{2}\}$
perché $|u|$ non è derivabile per $u=0$. Dato che

$$f(x) = \begin{cases} (2x-3)\,e^{-1/x} & \text{per } x > 3/2 \\ (3-2x)\,e^{-1/x} & \text{per } x < 3/2;\ x \neq 0 \end{cases}$$ si ottiene che

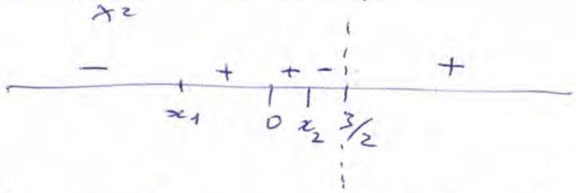
$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{-1/x} + (2x-3)(e^{-1/x})\left(\frac{1}{x^2}\right) = e^{-1/x}\left(\frac{2x^2+2x-3}{x^2}\right); & x>3/2 \\ -2e^{-1/x} + (3-2x)\,e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^2}\right) = -e^{-1/x}\left(\frac{2x^2+2x-3}{x^2}\right); & x<3/2,\ x\neq 0 \end{cases}$$

Pertanto

$$f'(x)=0 \iff 2x^2+2x-3=0 \iff x_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2},\quad x_2=-1/2+\frac{\sqrt{7}}{2}$$

Inoltre il segno di $f'(x)$ dipende solamente dal segno di $2x^2+2x-3$ dato che $\frac{e^{-1/x}}{x^2}>0\ \forall x\neq 0$.

Segno di f':



Quindi f è strett. decrescente $\iff x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{3}{2}\right)$

f è strett. crescente $\iff x\in\left(-1/2-\frac{\sqrt{7}}{2},0\right)\cup\left(0,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\cup\left(3/2,+\infty\right)$

Il punto: $x_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}$ è punto di MINIMO RELATIVO e $f(x_1)=(4+\sqrt{7})\,e^{\frac{\sqrt{7}-1}{3}}>5$

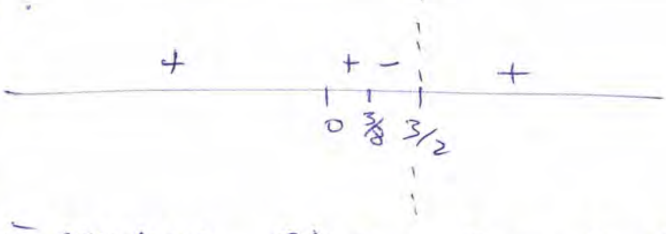
Il punto: $x_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}$ è punto di MASSIMO RELATIVO e $f(x_2)=(4-\sqrt{7})\,e^{-\frac{2}{\sqrt{7}-1}}$

convessità:

$$f''(x)=\begin{cases}\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)e^{-1/x}+\left(2+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)\frac{e^{-1/x}}{x^2}=\frac{e^{-1/x}}{x^3}\left(8-\frac{3}{x}\right) & \text{per } x\geq\frac{3}{2}\\ -\frac{e^{-1/x}}{x^3}\left(8-\frac{3}{x}\right); & \text{per } x<3/2,\ x\neq 0.\end{cases}$$

Pertanto $f''(x)=0 \iff (8-3/x)=0 \iff x=\frac{3}{8}$

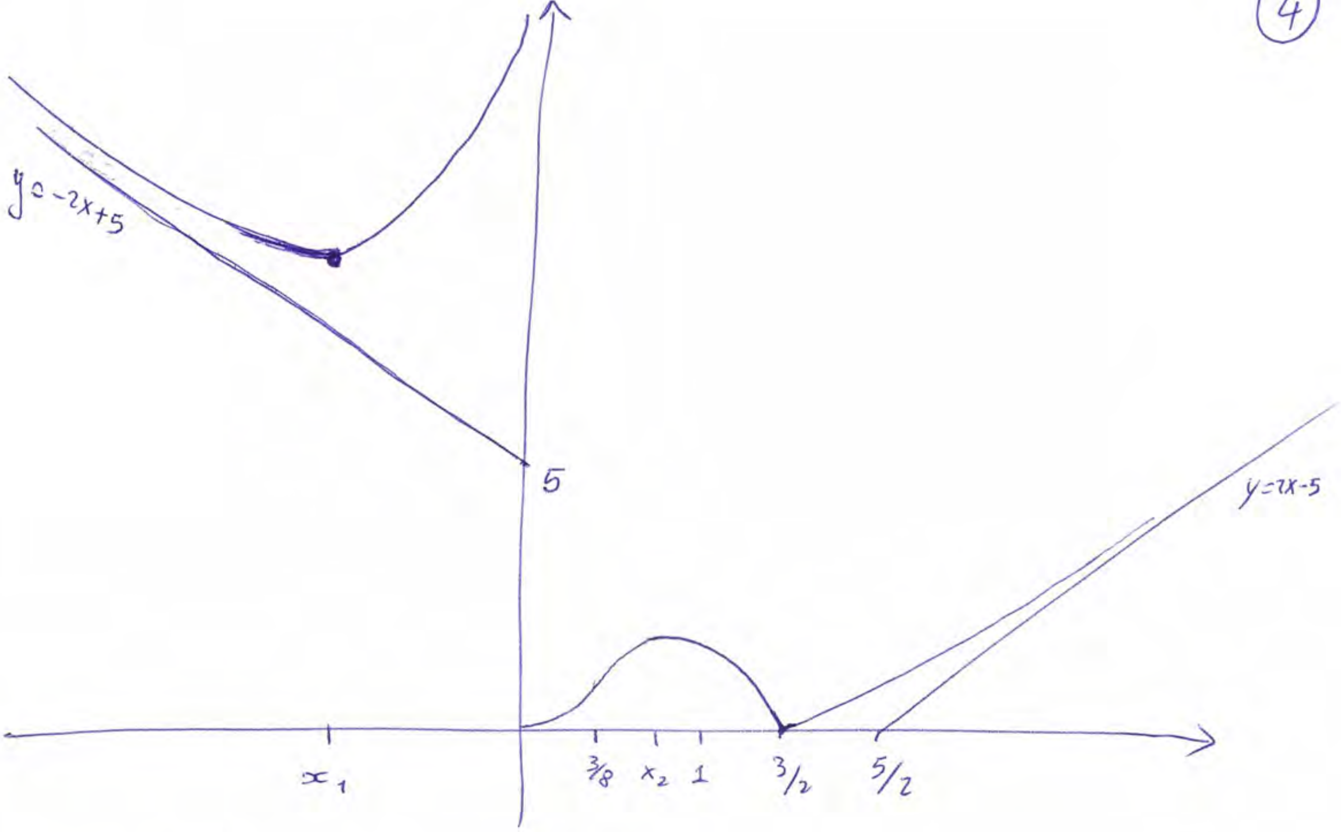
Segno di $f''(x)$:



pertanto: f è convessa $\iff x\in(-\infty,0)\cup(0,3/8)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$

f è concava $\iff x\in(3/8,3/2)$

$x=3/8$ è pto di flesso.



$3/2$ è punto angoloso dato che

$$\lim_{x\to(3/2)^+} f'(x) = 2e^{-2/3} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-} f'(x) = -2e^{-2/3}$$

Esercizio 2 Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x^2 \operatorname{atg} x| \, dx$

Dato che $\operatorname{atg} x > 0 \iff x > 0$, l'integrale in questione equivale a

$$-\int_{-1}^{0} x^2 \operatorname{atg} x \, dx + \int_{0}^{1} x^2 \operatorname{atg} x \, dx. \quad (*)$$

Calcoliamo una primitiva di $x^2 \operatorname{atg} x$:

$$\int \underbrace{x^2}_{f'} \underbrace{\operatorname{atg} x}_{g} \, dx \underset{\text{parti}}{=} \frac{x^3}{3} \operatorname{atg} x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

$$\underset{x^3 = x(x^2+1) - x}{=} \frac{x^3}{3} \operatorname{atg} x - \left[\frac{1}{3} \int x \, dx + \frac{1}{3} \int \frac{(-x)}{1+x^2} \, dx \right]$$

$$= \frac{x^3}{3}\,\mathrm{atg}\,x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\,\mathrm{atg}\,x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\lg(1+x^2) + c\ ;\ c\in\mathbb{R}$$

Sia $F(x) = \frac{x^3}{3}\,\mathrm{atg}\,x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\lg(1+x^2)$.

Allora,

$$\int_{-1}^{1} |x^2\,\mathrm{atg}\,x|\,dx \underset{\text{via }(*)}{=} -\big(F(0)-F(-1)\big) + F(1) - F(0)$$

$$= F(1) + F(-1) - 2F(0)$$

$$= \frac{1}{3}\,\mathrm{atg}(1) - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\lg(2) + \left(\frac{-1}{3}\right)\mathrm{atg}(-1) - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\lg(2) + 0$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lg(2) + \frac{\pi}{12}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lg(2)$$

Alternativa: si può anche osservare che $f(x) = |x^2\,\mathrm{atg}(x)| = x^2\,|\mathrm{atg}(x)|$ è funzione pari; pertanto

$$\int_{-1}^{1} |x^2\,\mathrm{atg}(x)|\,dx = 2\int_0^1 x^2\,\mathrm{atg}(x)\,dx = 2\big(F(1)-F(0)\big).$$

Esercizio 3 Per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, calcolare il

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{\lg(1-\alpha x^2) + \cos x + e^{2x^2} - 2}.$$

Conviene utilizzare la f. di Taylor - Peano:

$$\lg(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{per } y\to 0$$

⑥

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5) \quad \text{per } y \to 0$$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{per } y \to 0.$$

Pertanto lo sviluppo del denominatore è

$$(-\alpha x^2) - \frac{(-\alpha x^2)^2}{2} + o(x^4) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) +$$

$$+ 2x^2 + \frac{(2x^2)^2}{4} + o(x^4)$$

$$= x^2\left(-\alpha - \frac{1}{2} + 2\right) + x^4\left(-\alpha^2 + \frac{1}{24} + 1\right) + o(x^4)$$

per $x \to 0$.

$$= x^2\left(3/2 - \alpha\right) + x^4\left(\frac{25}{24} - \alpha^2\right) + o(x^4)$$

Quindi il denominatore è infinitesimo di

di ordine 4 se $\alpha = 3/2$

di ordine 2 se $\alpha \neq 3/2$

Pertanto, se $\alpha = 3/2$, si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3}{\lg(1-\alpha x^2) + \cos x + e^{2x^2} - 2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3}{x^4 + o(x^4)} = +\infty$$

per il principio di sost. degli infinitesimi.

se $\alpha \neq 3/2$ si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3}{\lg(1-\alpha x^2) + \cos x + e^{2x^2} - 2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3}{x^2\left(\frac{3}{2} - \alpha\right) + o(x^2)} = 0$$

per il principio di sost. degli infinitesimi.

Esercizio 4 Risolvere il pb. di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 5y = e^x \\ y(0) = 0 \; ; \; y'(0) = 2 \end{cases}$$

Determiniamo tutte le sol. dell'eq. differenziale (7)

$y'' - 6y' + 5y = e^x$.

Eq. OMOGENEA: $y'' - 6y' + 5y = 0$;

Pol. caratteristico: $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

L'integrale generale dell'eq. omogenea è quindi

$$c_1 e^x + c_2 e^{5x}$$

Cerchiamo ~~ora~~ una sol. dell'eq. totale; $f(x) = e^x$. Usando il metodo di somiglianza, dato che $\alpha \pm i\beta = 1$ è sol. del polinomio caratteristico, una sol. particolare di $y'' - 6y' + 5y = e^x$ è del tipo

$$\tilde{y}(x) = Axe^x, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Siccome
$$\tilde{y}'(x) = Ae^x + Axe^x = Ae^x(x+1)$$
$$\tilde{y}''(x) = Ae^x(x+1) + Ae^x = Ae^x(x+2)$$
otteniamo, sostituendo, che

$$Ae^x(x+2) - 6Ae^x(x+1) + 5Axe^x = e^x$$

ossia
$$e^x(A(x+2) - 6A(x+1) + 5Ax) = e^x$$
$$A\cancel{x} + 2A - \cancel{6Ax} - 6A + \cancel{5Ax} = 1$$
$$-4A = 1; \quad A = -\frac{1}{4}$$

Quindi
$$\tilde{y}(x) = -\frac{1}{4}xe^x.$$

Da ciò segue che tutte e sole le sol. di $y'' - 6y' + 5y = e^x$ sono

$$c_1 e^x + c_2 e^{5x} - \frac{1}{4}xe^x = y(x).$$

Calcolo $y'(x) = c_1 e^x + 5c_2 e^{5x} - \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{4}xe^x$

Quindi

$$\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 + c_2 \\ 2 = y'(0) = c_1 + 5c_2 - \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 2 = c_1 + c_2 + 4c_2 - 1/4 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 4c_2 - 1/4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 4c_2 = 9/4 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = -c_2 = -9/16 \\ c_2 = 9/16 \end{cases}.$$

l'unica sol. del pb. di Cauchy richiesta è quindi

$$-\frac{9}{16}e^x + \frac{9}{16}e^{5x} - \frac{1}{4}xe^x$$

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 15 Luglio 2014 (Terzo appello, a.a. 2013-2014)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \exp\Big(\arctan\big(\frac{\sqrt{3}}{2}|x^2-2|\big)\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Lo studio della convessità non è richiesto; $\exp(u) := e^u$.

Esercizio 2. (2.a) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(3x-1)\sqrt{x}}.$$

(2.b) Discutere la convergenza di

$$\int_{1/3}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(3x-1)\sqrt{x}}.$$

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{5^{-1/(2x)} + e^{x-x^2/2} - 1 - x}{x^\alpha - \log(1-x^2) - 2\tan^2 x}.$$

Esercizio 4. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-x} \\ y(0) = 1/2 \\ y'(0) = 3/2. \end{cases}$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare che se $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $(0,1)$ e $f'(x) < 0$ allora f è strettamente decrescente in $(0,1)$.

(5.b) Enunciare il Teorema di Lagrange.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo libretto universitario e penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 15 Luglio 2014 (Terzo appello, a.a. 2013-2014)

Cognome e nome:______________________ Matricola:__________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \exp\Big(-\arctan\big(\frac{\sqrt{3}}{3}|x^2-3|\big)\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Lo studio della convessità non è richiesto; $\exp(u) := e^u$.

Esercizio 2. (2.a) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_5^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{x}-2)x}.$$

(2.b) Discutere la convergenza di

$$\int_2^4 \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{x}-2)x}.$$

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{-2/x} + x + 1 - e^{x-x^2/4}}{x^\alpha - \log(1-x^2) - 2\sin^2 x}.$$

Esercizio 4. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x \\ y(0) = 3/2 \\ y'(0) = 1/2. \end{cases}$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare che se $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $(0,1)$ e $f'(x) > 0$ allora f è strettamente crescente in $(0,1)$.

(5.b) Enunciare il Teorema di Rolle.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo libretto universitario e penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica 1 15/07/2014

Risoluzione File A:

Esercizio 1 $f(x) = e^{\operatorname{atg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|x^2-2|\right)}$

Dom $f = \mathbb{R}$. f è continua dove definita e f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ (in cui il valore assoluto non è derivabile).

a)
- $f(x) > 0$ essendo un esponenziale
- $f(-x) = e^{\operatorname{atg}(\sqrt{3}/2\,|(-x)^2-2|)} = f(x)$ perché $(-x)^2 = x^2$.
  $\Rightarrow f$ è pari.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} e^y = e^{\pi/2}$ dato che $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{atg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|x^2-2|\right) = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{\pi/2}$ per la parità di f.

$f(0) = e^{\operatorname{atg}(\sqrt{3})} = e^{\pi/3}$

$y = e^{\pi/2}$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$

$\nexists$ asintoti obliqui; $\nexists$ asintoti verticali.

c)
$$f(x) = \begin{cases} e^{\operatorname{atg}(\sqrt{3}/2\,(x^2-2))} & \text{se } x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty) \\ e^{\operatorname{atg}(-\sqrt{3}/2\,(x^2-2))} & \text{se } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\operatorname{atg}(\sqrt{3}/2\,(x^2-2))} \cdot \dfrac{\sqrt{3}\,x}{1+\frac{3}{4}(x^2-2)^2} & x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \\ e^{\operatorname{atg}(-\sqrt{3}/2\,(x^2-2))} \cdot \dfrac{(-\sqrt{3}\,x)}{1+3/4\,(x^2-2)^2} & x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$$

$-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ sono punti di non derivabilità

Pertanto:

$$f'(x)=0 \iff x=0$$

$$f'(x)>0 \iff x\in(-\sqrt{2},0)\cup(\sqrt{2},+\infty)$$

$$f'(x)<0 \iff x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(0,\sqrt{2})$$

Quindi: 0 è pto di massimo relativo $f(0)=e^{\pi/3}$

$-\sqrt{2},\sqrt{2}$ sono pti di minimo relativo

siccome $\lim_{x\to(\sqrt{2})^-} f'(x) = -\sqrt{6} = \lim_{x\to(-\sqrt{2})^+} f'(x)$

$\lim_{x\to(\sqrt{2})^+} f'(x) = \sqrt{6} = \lim_{x\to(-\sqrt{2})^-} f'(x)$

i punti $-\sqrt{2},\sqrt{2}$ sono punti angolosi.

$$f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 1$$

Dato che $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = 1 < f(0) = e^{\pi/3}$

i punti $-\sqrt{2},\sqrt{2}$ sono di MINIMO ASSOLUTO

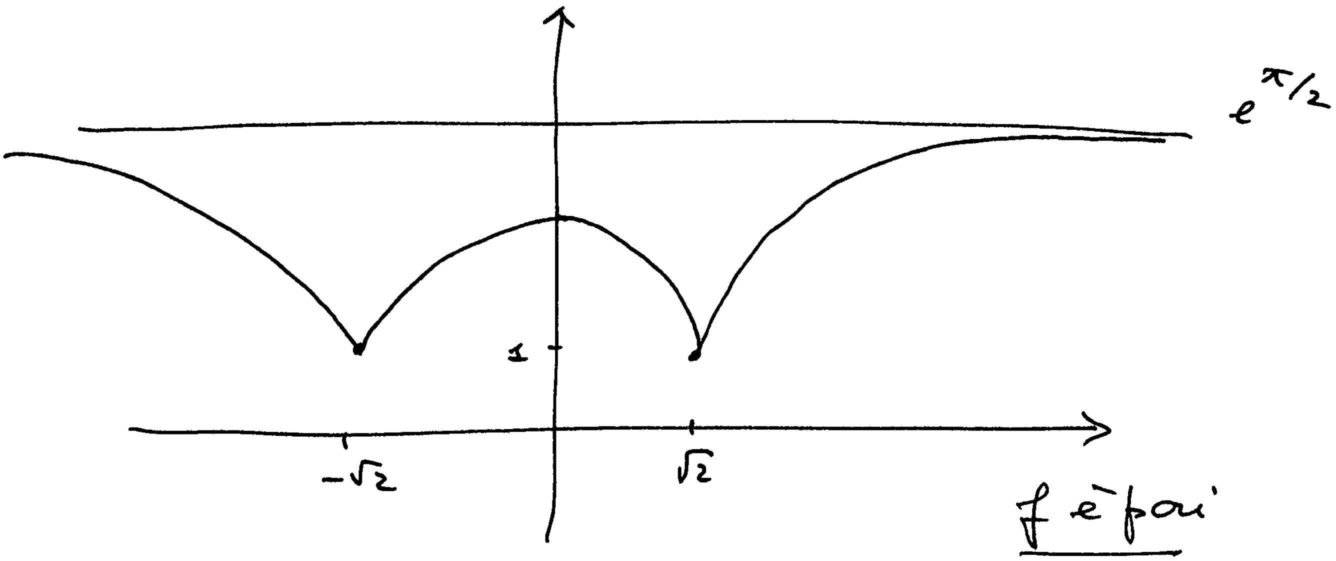
e il MINIMO ASSOLUTO è 1

f non ha massimo assoluto perché $\sup(\operatorname{Im} f) = e^{\pi/2}$

e se $\exists\, x_0 \,/\, f(x_0) = e^{\pi/2}$ allora si dovrebbe avere

$$\operatorname{atg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,|x_0^2-2|\right) = \frac{\pi}{2}$$ che è falso.

Andamento



<u>f è pari</u>

Esercizio 2

a) Determino una primitiva:

$$\int \frac{dx}{(3x-1)\sqrt{x}} \underset{\substack{t=\sqrt{x} \\ t^2=x \\ g(t)=t^2}}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{2t\,dt}{(3t^2-1)\,t} = 2\int \frac{dt}{3t^2-1}$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2-1/3}\Big]_{t=\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{t^2-1/3} = \frac{A}{(t-\sqrt{3}/3)} + \frac{B}{(t+\sqrt{3}/3)};$$

$$A(t+\sqrt{3}/3) + B(t-\sqrt{3}/3) = 1$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \sqrt{3}/3\,A - \sqrt{3}/3\,B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A \\ \sqrt{3}/3\,(2A)=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ A=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dt}{t^2-1/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{t-\sqrt{3}/3}\,dt - \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{dt}{t+\sqrt{3}/3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\lg\left|t-\sqrt{3}/3\right| - \frac{\sqrt{3}}{2}\lg\left|t+\sqrt{3}/3\right| + c$$

Pertanto

$$\int \frac{dx}{(3x-1)\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\lg\left|\frac{t-\sqrt{3}/3}{t+\sqrt{3}/3}\right|\right]_{t=\sqrt{x}} + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\lg\left|\frac{3\sqrt{x}-\sqrt{3}}{3\sqrt{x}+\sqrt{3}}\right| + c \quad ; c\in\mathbb{R}$$

$$= F(x) + c \quad ; c\in\mathbb{R}$$

Dato che $[1,+\infty) \subset \mathrm{Dom}\left(\frac{1}{(3x-1)\sqrt{x}}\right)$, si ha

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(3x-1)\sqrt{x}} = \lim_{u\to+\infty}\left(F(u)-F(1)\right)$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\lg\left|\underbrace{\frac{3\sqrt{u}-\sqrt{3}}{3\sqrt{u}+\sqrt{3}}}_{\to 1}\right|\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\lg\left|\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\right|$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\lg\left|\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\lg\left|\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right|$$

b) Dato che l'integranda non è definita in $\frac{1}{3}$ e che $\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+}\frac{1}{(3x-1)\sqrt{x}} = +\infty$ è necessario capire l'ordine di infinito dell'integranda in $\frac{1}{3}$.

E' immediato osservare che

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+}\frac{\frac{1}{(3x-1)\sqrt{x}}}{\frac{1}{x-1/3}} = \lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+}\frac{(3x-1)/3}{(3x-1)\sqrt{x}} = \lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+}\frac{1}{3\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0$$

$\Rightarrow$ l'integranda è infinita di ordine 1 in $\frac{1}{3}$

Quindi $\int_{1/3}^{1} f(x)\,dx$ DIVERGE per il criterio dell'ordine di infinito.

ESERCIZIO 3

$$\lim_{x\to0^+} \frac{5^{-1/2x} + e^{x-x^2/2} - 1 - x}{x^\alpha - \lg(1-x^2) - 2\,tg^2 x} \qquad \alpha>0$$

Usiamo Taylor con $x_0=0$ (o MacLaurin)

$$e^y = 1+y+y^2/2 + y^3/6 + o(y^3) \quad \text{per } y\to0$$

$$\Rightarrow e^{x-x^2/2} = 1+\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^3+ o\left(\left(x-x^2/2\right)^3\right)$$

$$= 1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{x^4}{4}-x^3\right)+ \frac{1}{6}\left(x^3-\frac{x^6}{8}+\frac{3}{4}x^5-\frac{3}{2}x^4\right)+o(x^3)$$

$$= 1+x-\cancel{x^2/2}+\cancel{\frac{x^2}{2}}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$= 1+x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

Dato che

$$\lim_{x\to0^+}\frac{5^{-1/(2x)}}{x^3}=0 \quad \text{(dim. con teorema di de l'Hôpital)}$$

abbiamo che:

$$\text{Numeratore} = 1+x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)-1-x$$

$$= -\frac{x^3}{3}+o(x^3) \quad \text{per } x\to0^+$$

Ossia il Numeratore è un infinitesimo di ordine 3 per $x \to 0^+$.

Consideriamo il denominatore:

$$\lg(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \quad \text{per } y \to 0^+$$

ossia

$$\lg(1-x^2) = (-x^2) - \frac{(-x^2)^2}{2} + o(x^4)$$
$$= -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0^+$$

$$tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0^+$$

$$\Rightarrow 2\,tg^2(x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2$$
$$= 2\left(x^2 + \frac{x^9}{9} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)$$
$$= 2x^2 + \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$$

Pertanto

$$x^\alpha - \lg(1-x^2) - 2\,tg^2 x =$$
$$= x^\alpha - \left(-x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) - \left(2x^2 + \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)\right)$$
$$= x^\alpha - x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Pertanto:

se $\alpha \in (0,2)$: $\quad$ Denom $\sim x^\alpha$ per $x \to 0^+$

se $\alpha \in [2,+\infty)$: $\quad$ Denom $\sim \begin{cases} -\frac{5}{6}x^4 & \text{se } \alpha = 2 \\ -x^2 & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$

In conclusione

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{N}{D}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3/3+o(x^3)}{c(\beta)x^\beta+o(x^\beta)}$$

dove $c(\beta)x^\beta=\begin{cases}x^\alpha & \text{se } \alpha\in(0,2)\\ -\frac{5}{6}x^4 & \text{se } \alpha=2\\ -x^2 & \text{se } \alpha>2\end{cases}$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{5^{-\frac{1}{2}x}+e^{x-x^2/2}-1-x}{x^\alpha-\lg(1-x^2)-2\,tg^2x}=\begin{cases}0^- & \text{se } \alpha\in(0,2)\\ +\infty & \text{se } \alpha=2\\ 0^+ & \text{se } \alpha>2\end{cases}$$

Esercizio 4

Eq. OMOGENEA ha pol. caratteristico

$\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2=0 \iff \lambda_1=-1$ due volte.

Quindi l'int^{le} generale dell'omogenea è

$$c_1e^{-x}+c_2xe^{-x},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Con il metodo di somiglianza:

$$e^{-x}=e^{\alpha x}\left(p_1(x)\cos(\beta x)+p_2(x)\sin(\beta x)\right)$$

$\Rightarrow \alpha=-1,\ \beta=0,\quad p_1(x)=1$

e $-1=\alpha+i\beta$ è sol. del pol. caratteristico di molt. 2.

Una sol. particolare è quindi del tipo

$$\bar{y}(x) = e^{-x} x^2 (A)$$
$$= A x^2 e^{-x} \quad , \quad A \in \mathbb{R}$$

$$\bar{y}'(x) = 2Ax e^{-x} + (-1) A x^2 e^{-x}$$
$$= Ax e^{-x}(2-x)$$

$$\bar{y}''(x) = Ae^{-x}(2-x) + (-1) Axe^{-x}(2-x) + Axe^{-x}(-1)$$

$$= Ae^{-x}\left(2 - x - x(2-x) - x\right)$$

$$= Ae^{-x}(2 - 2x - 2x + x^2)$$

$$= Ae^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

$\bar{y}$ è sol. di $y'' + 2y' + y = e^{-x} \iff$

$$Ae^{-x}(x^2 - 4x + 2) + 2Axe^{-x}(2-x) + Ax^2e^{-x} = e^{-x}$$

$$\iff A(x^2 - 4x + 2) + 2Ax(2-x) + Ax^2 = 1$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & A - 2A + A = 0 \\ x & -4A + 4A = 0 \\ \text{cost} & 2A = 1 \end{array} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ A = 1/2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ una sol. particolare di

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

è $\bar{y}(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$.

L'int$^{\text{a}}$ generale di $y''+2y'+y=e^{-x}$ è quindi

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x}.$$

Pb. di Cauchy:

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \cdot (-1) + \\ + \frac{1}{2} x e^{-x} (2-x)$$

$$y(0) = c_1 \quad ; \quad y'(0) = -c_1 + c_2$$

$$\begin{cases} c_1 = y(0) = 1/2 \\ -c_1 + c_2 = y'(0) = 3/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1/2 \\ c_2 = c_1 + 3/2 = 2 \end{cases}$$

L'unica soluzione è quindi:

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{-x} + 2x e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$$

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 11 Settembre 2014 (Quarto appello, a.a. 2013-2014)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = -2|\arctan(x-1)| - x + 1$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$. Classificare gli eventuali punti di non derivabilità di $f(x)$.

(1.d) Studiare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B.: Il segno non è richiesto.

Esercizio 2. (2.a) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+3}}{e^x-3}\,dx.$$

(2.b) Discutere la convergenza di

$$\int_{\log 3}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+3}}{e^x-3}\,dx.$$

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$, studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\exp\left(\frac{n^2-2n}{n^\alpha+2}\right) - 1\right].$$

N.B.: $\exp(u) := e^u$.

Esercizio 4. (4.a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = \dfrac{y-3}{1+x^2}$.

(4.b) Determinare, se esiste, una soluzione della precedente equazione differenziale che verifichi $y(1) = 0$. Determinarne poi una che verifichi $y(1) = 3$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il criterio della radice per le serie numeriche.

(5.b) Dimostrare la condizione necessaria per punti di massimo (o minimo) locale interno.

Tempo: 3 ore.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo libretto universitario e penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 11 Settembre 2014 (Quarto appello, a.a. 2013-2014)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = 2|\arctan(x+1)| - x - 1$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$. Classificare gli eventuali punti di non derivabilità di $f(x)$.

(1.d) Studiare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B.: Il segno non è richiesto.

Esercizio 2. (2.a) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+2}}{e^x-2}\, dx.$$

(2.b) Discutere la convergenza di

$$\int_{\log 2}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+2}}{e^x-2}\, dx.$$

Esercizio 3. Per ogni $\alpha \geq 2$, studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big[1 - \cos\Big(\frac{2n+n^2}{n^\alpha+3}\Big)\Big].$$

Esercizio 4. (4.a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = \dfrac{2+y}{1+x^2}$.

(4.b) Determinare, se esiste, una soluzione della precedente equazione differenziale che verifichi $y(1) = 2$. Determinarne poi una che verifichi $y(1) = -2$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il Teorema della media integrale.

(5.b) Dimostrare la condizione necessaria di convergenza per le serie numeriche.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo libretto universitario e penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica 1 11/09/2014

Risoluzione Fila A. (1)

Esercizio 1 $f(x) = -2\,|\mathrm{atg}(x-1)| - x + 1$

$D_f = \mathbb{R}$. f è continua dove definita (è comp. di f. continue. f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus X$ dove

$$X = \{x \in \mathbb{R} / \mathrm{atg}(x-1) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x = 1\}$$

[ossia f non è derivabile in 1]

$$f(1) = 0 \;;\; f(-1) = -2\,|\mathrm{atg}(-2)| + 2 = \underset{\neq 0}{2 - 2\,\mathrm{atg}(2)}$$

$\Rightarrow f$ né pari, né dispari.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{-2\,\mathrm{atg}(x-1)}_{\downarrow\,(-2)\cdot(\pi/2)} \underbrace{-x+1}_{\downarrow\,-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{-2\,\mathrm{atg}(1-x)}_{(-2)\cdot\frac{\pi}{2}} \underbrace{-x+1}_{\downarrow\,+\infty} = +\infty$$

$\nexists$ asintoti orizzontali ; $\nexists$ as. verticali

f non ha max assoluto; f non ha min. assoluto.

Asintoti obliqui: $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2\,\mathrm{atg}(x-1) - x + 1}{x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{-2\,\mathrm{atg}(x-1)}{x}}_{\to 0} - 1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} = -1 \;(= m)$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} -2\,\mathrm{atg}(x-1) \cancel{-x} + 1 + \cancel{x} = -\pi + 1$$

$\boxed{y = (1-\pi) - x \text{ è as. obliquo a } +\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2\,\mathrm{atg}(1-x)-x+1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{\frac{-2\,\mathrm{atg}(1-x)}{x}}_{\to 0}-1+\underbrace{1/x}_{\to 0}=-1\;(=m)$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}-2\,\mathrm{atg}(1-x)-\cancel{x}+1+\cancel{x}=-\pi+1$$

$$\Rightarrow\ \boxed{y=(1-\pi)-x \text{ è as. obliquo a } -\infty}$$

Siccome
$$f(x)=\begin{cases}-2\,\mathrm{atg}(x-1)-x+1 & \text{se } x\geq 1\\ -2\,\mathrm{atg}(1-x)-x+1 & \text{se } x<1\end{cases}$$

[perché $\mathrm{atg}(u)>0 \iff u>0$...] abbiamo che

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{1+(x-1)^2}-1 & \text{se } x>1\\ \dfrac{(-2)\cdot(-1)}{1+(1-x)^2}-1 & \text{se } x<1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-2-1-(x-1)^2}{1+(x-1)^2}=\dfrac{-3-(x-1)^2}{1+(x-1)^2} & \text{se } x>1\\ \dfrac{2-1-(1-x)^2}{1+(x-1)^2}=\dfrac{1-(x-1)^2}{1+(x-1)^2} & \text{se } x<1\end{cases}$$

Pertanto $f'(x)=0 \iff (1-(x-1)^2=0)$ e $(x<1)$

$\iff ((x-1)^2=1)$ e $(x<1)$

$\iff x=0$ e $x<1$

$\exists!$ soluzione: $x=0$

Inoltre $f'(x)<0 \iff x\in(1,+\infty)\cup(-\infty,0)$

$f'(x)>0 \iff x\in(0,1)$

Pertanto: a) 0 è pto di minimo locale; $f(0)=-2|\mathrm{atg}(-1)|+1$

$=-2\,\mathrm{atg}(1)+1$

$=-\pi/2+1$

b) 1 è pto di max locale; $f(1)=0$

Inoltre 1 è punto angoloso perché

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -2-1 = -3$$
$$\#$$
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2-1 = 1 .$$

Calcolo $f''(x)$

Se $x>1$: $f'(x) = \dfrac{-2}{1+(x-1)^2} - 1 \Rightarrow f''(x) = (-2)\left(1+(x-1)^2\right)^{-2}(-1)\cdot 2(x-1)$

$$= \frac{4(x-1)}{\left(1+(x-1)^2\right)^2} > 0 \text{ per } x>1$$

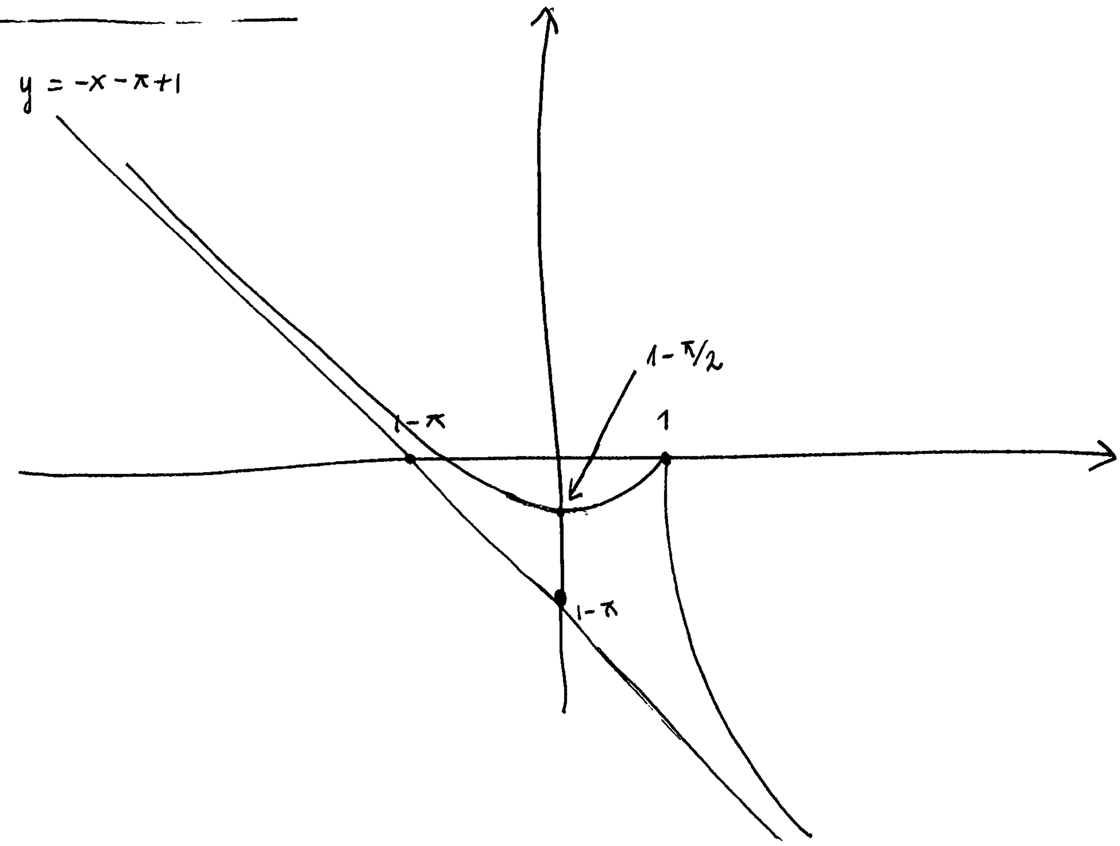
$\Rightarrow f$ è convessa in $(1, +\infty)$

Se $x<1$: $f'(x) = \dfrac{2}{1+(x-1)^2} - 1 \Rightarrow f''(x) = 2\left(1+(x-1)^2\right)^{-2}(-1)\cdot 2(x-1)$

$$= \frac{-4(x-1)}{\left(1+(x-1)^2\right)^2} > 0 \text{ per } x<1$$

$\Rightarrow f$ è convessa in $(-\infty, 1)$

Andamento



Esercizio 2

Calcolo $\int \frac{\sqrt{e^x+3}}{e^x-3}\,dx = I$

Sia $t=\sqrt{e^x+3} \Rightarrow t^2 = e^x+3 \Rightarrow t^2-3=e^x$

$\Rightarrow x = \lg(t^2-3) = g(t)$

Quindi
$$I = \int \frac{t}{t^2-6}\,\frac{2t}{t^2-3}\,dt \Big]_{t=\sqrt{e^x+3}} = 2\int \frac{t^2}{(t^2-3)(t^2-6)}\,dt$$
$$= 2\int \frac{t^2-6+6}{(t^2-3)(t^2-6)}\,dt \Big]_{t=\sqrt{e^x+3}}$$
$$= 2\int \frac{dt}{t^2-3} + 12\int \frac{dt}{(t^2-3)(t^2-6)} \Big]_{t=\sqrt{e^x+3}}$$

Ma
$$\int \frac{dt}{t^2-3} = \frac{1}{2\sqrt3}\int \frac{dt}{t-\sqrt3} - \frac{1}{2\sqrt3}\int \frac{dt}{t+\sqrt3}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt3}\lg\left|\frac{t-\sqrt3}{t+\sqrt3}\right| + c \; ; \; c\in\mathbb{R}.$$

$$\int \frac{dt}{(t^2-3)(t^2-6)} : \quad \frac{A}{t-\sqrt3} + \frac{B}{t+\sqrt3} + \frac{C}{t-\sqrt6} + \frac{D}{t+\sqrt6} = \frac{1}{(\;)(\;)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C+D=0 \\ \sqrt3A-\sqrt3B+\sqrt6C-\sqrt6D=0 \\ -6A-6B-3C-3D=0 \\ -6\sqrt3A+6\sqrt3B-3\sqrt6C+3\sqrt6D=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/(6\sqrt3) \\ B = 1/(6\sqrt3) \\ C = 1/(6\sqrt6) \\ D = -1/(6\sqrt6) \end{cases} \qquad \text{da cui}$$

$$\int \frac{dt}{(t^2-3)(t^2-6)} = -\frac{1}{6\sqrt3}\int\frac{dt}{t-\sqrt3} + \frac{1}{6\sqrt3}\int\frac{dt}{t+\sqrt3} + \frac{1}{6\sqrt6}\int\frac{dt}{t-\sqrt6} +$$
$$-\frac{1}{6\sqrt6}\int\frac{dt}{t+\sqrt6}$$
$$= +\frac{1}{6\sqrt3}\lg\left|\frac{t+\sqrt3}{t-\sqrt3}\right| + \frac{1}{6\sqrt6}\lg\left|\frac{t-\sqrt6}{t+\sqrt6}\right| + c,$$
$c\in\mathbb{R}$

Allora

$$I = 2\left(\frac{1}{2\sqrt3}\lg\left|\frac{t-\sqrt3}{t+\sqrt3}\right|\right) + 12\left(\frac{1}{6\sqrt3}\lg\left|\frac{t+\sqrt3}{t-\sqrt3}\right| + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{6\sqrt6}\lg\left|\frac{t-\sqrt6}{t+\sqrt6}\right|\right) + c\,\right]_{t=\sqrt{e^x+3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt3}\lg\left|\frac{t-\sqrt3}{t+\sqrt3}\right| + \frac{2}{\sqrt3}\lg\left|\frac{t+\sqrt3}{t-\sqrt3}\right| +$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt6}\lg\left|\frac{t-\sqrt6}{t+\sqrt6}\right| + c\,\right]_{t=\sqrt{e^x+3}}$$

$$\left. = \frac{1}{\sqrt3}\lg\left|\frac{t+\sqrt3}{t-\sqrt3}\right| + \frac{2}{\sqrt6}\lg\left|\frac{t-\sqrt6}{t+\sqrt6}\right| + c\,\right]_{t=\sqrt{e^x+3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt3}\lg\left|\frac{\sqrt{e^x+3}+\sqrt3}{\sqrt{e^x+3}-\sqrt3}\right| + \frac{2}{\sqrt6}\lg\left|\frac{\sqrt{e^x+3}-\sqrt6}{\sqrt{e^x+3}+\sqrt6}\right| + c; \quad c\in\mathbb{R}.$$

$$= F(x) + c; \quad c\in\mathbb{R}.$$

Quindi $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sqrt{e^x+3}}{e^x-3}\,dx = \lim_{u\to+\infty}\left(F(u)-F(2)\right)$

$$= \left(\lim_{u\to+\infty}F(u)\right) - \left(\frac{1}{\sqrt3}\lg\left|\frac{\sqrt{3+e^2}+\sqrt3}{\sqrt{3+e^2}-\sqrt3}\right| + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt6}\lg\left|\frac{\sqrt{3+e^2}-\sqrt6}{\sqrt{3+e^2}+\sqrt6}\right|\right)$$

$$= 0 + \frac{2}{\sqrt6}\lg|---| - \frac{1}{\sqrt3}\lg|--|$$

perché $\displaystyle\frac{\sqrt{e^x+3}+\sqrt3}{\sqrt{e^x+3}-\sqrt3}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$ e analogo per $\displaystyle\frac{\sqrt{e^x+3}-\sqrt6}{\sqrt{e^x+3}+\sqrt6}$

2b) Dato che $3 < e^2$ si ha $\log 3 < 2$; quindi preso $x > 100$ si ha

$$\int_{\log 3}^{x} f(t)\,dt = \int_{\log 3}^{2} f(t)\,dt + \int_{2}^{x} f(t)\,dt.$$

5.5

Pertanto, grazie al punto 2a), la convergenza di $\int_{\log 3}^{+\infty} f(t)\,dt$ dipende da quella di $\int_{\log 3}^{2} f(t)\,dt$ (dato che in 2a) abbiamo visto che $\int_{2}^{+\infty} f(t)\,dt$ è convergente).

Utilizzando il calcolo delle primitive visto precedentemente, abbiamo $F(u) = \frac{1}{\sqrt{3}} \lg \left| \frac{\sqrt{e^x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{e^x+3}-\sqrt{3}} \right| + \frac{2}{\sqrt{6}} \lg \left| \frac{\sqrt{e^x+3}-\sqrt{6}}{\sqrt{e^x+3}+\sqrt{6}} \right|$

$$\int_{\lg 3}^{2} \frac{\sqrt{e^x+3}}{e^x-3}\,dx = \lim_{u \to (\lg 3)^+} \left(F(2) - F(u) \right)$$

$$= F(2) - \lim_{u \to (\lg 3)^+} F(u)$$

Osservando che

$$\lim_{u \to (\lg 3)^+} \frac{\sqrt{e^x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{e^x+3}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} \quad e$$

$$\lim_{u \to (\lg 3)^+} \frac{\sqrt{e^x+3}-\sqrt{6}}{\sqrt{e^x+3}+\sqrt{6}} = 0$$

otteniamo che $\lim_{u \to (\lg 3)^+} F(u) = -\infty$

Pertanto

$$\lim_{u \to (\lg 3)^+} \left(F(2) - F(u) \right) = +\infty$$

e quindi $\int_{\lg 3}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+3}}{\sqrt{e^x-3}}\,dx$ è DIVERGENTE

Esercizio 3

Sia $\alpha > 0$: notiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-2n+n^2}{n^\alpha+2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha\in(0,2) \\ +1 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

Allora $a_n = e^{\frac{-2n+n^2}{n^\alpha+2}} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha\in(0,2) \\ e-1 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$

Pertanto $\sum a_n$ diverge per $\alpha \in (0,2]$.

Se $\alpha > 2$: dobbiamo investigare ulteriormente.

Siccome $e^u - 1 \sim u$ per $u \to 0$, abbiamo che

$$a_n \sim \frac{-2n+n^2}{n^\alpha+2} \quad \text{per } n\to+\infty.$$

Dato che $\frac{-2n+n^2}{n^\alpha-2} \sim \frac{1}{n^{\alpha-2}}$ per $n\to+\infty$

per il criterio dell'ordine di infinitesimo, $\sum a_n$ converge se e solo se $\alpha - 2 > 1$ ossia

$$\boxed{\alpha > 3}$$

Esercizio 4

L'eq. è a variabili separabili posto che $y(x) \neq 3$.

Se $y(x) \equiv 3 \Rightarrow$ è soluzione $y' = 0$; $y - 3 = 0$.

Sia $y(x) \neq 3$; abbiamo che

$$\frac{y'(x)}{y(x)-3} = \frac{1}{1+x^2}$$

Integrando

$$\int \frac{y'(x)\,dx}{y(x)-3} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

ossia

$$\lg |y(x)-3| = \operatorname{atg}(x) + c \qquad , c \in \mathbb{R}$$

da cui

$$|y(x)-3| = e^{(\operatorname{atg}(x)+c)} \qquad ; c \in \mathbb{R}.$$
$$x \in \mathbb{R}$$

Le soluzioni sono dunque $(x \in \mathbb{R})$;

$$y(x) \equiv 3 ;$$
$$y(x) = 3 + e^{\operatorname{atg}(x) + c_1} \qquad ; \quad c_1 \in \mathbb{R}$$
$$y(x) = 3 - e^{\operatorname{atg}(x) + c_2} \qquad ; \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

Perché $y(1) = 0$ devo considerare il terzo caso precedente; quindi

$$0 = y(1) = 3 - e^{\operatorname{atg}(0)+c_2} = 3 - e^{c_2}$$
$$\iff e^{c_2} = 3 \qquad \iff \quad c_2 = \lg 3$$

Quindi la soluzione è

$$y_1(x) = 3 - e^{\operatorname{atg}(x)} \cdot e^{\lg 3}$$
$$= 3\left(1 - e^{\operatorname{atg}(x)}\right).$$

Perché $y(1) = 3$ l'unico caso possibile è il primo; pertanto

$y_2(x) = 3$ è la soluzione.