Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 29 Gennaio 2015 (Primo appello, a.a. 2014-2015)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log\Big(e^{|x^2+2x-1|} - e\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie. **Facoltativo:** Determinare il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{t}{t^3 + 27}.$$

(2.a) Determinare tutte le primitive di $f(t)$.

(2.b) Determinare la convergenza di $\int_{-3}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t$.

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$ si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + x + x^2) - \sin x}{x^{1/2}\ (1 - \cos x)^\alpha}.$$

Esercizio 4. Determinare il carattere di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{3n - e^{-n}}.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$.

(5.b) Enunciare il teorema della media integrale.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 29 Gennaio 2015 (Primo appello, a.a. 2014-2015)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log\left(e^{|x^2+4x-3|} - e^3\right)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie. **Facoltativo:** Determinare il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{t}{t^3 - 8}.$$

(2.a) Determinare tutte le primitive di $f(t)$.

(2.b) Determinare la convergenza di $\int_0^2 f(t)\, \mathrm{d}t$.

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$ si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 - x - x^2) + \sin x}{x^{1/2}\ (e^x - 1)^\alpha}.$$

Esercizio 4. Determinare il carattere di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^{3/2} - 2e^{-n}}$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$.

(5.b) Enunciare la formula fondamentale del calcolo integrale.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 29 Gennaio 2015 (Primo appello, a.a. 2014-2015)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log\Big(e^{|x^2-2x-1|} - e\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie. **Facoltativo:** Determinare il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{t}{t^3+8}.$$

(2.a) Determinare tutte le primitive di $f(t)$.

(2.b) Determinare la convergenza di $\int_{-2}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t$.

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$ si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x+x^2) - \sin x}{x^{1/2}\ (e^x-1)^\alpha}.$$

Esercizio 4. Determinare il carattere di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{3n - 2\log n}.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = 1$.

(5.b) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 29 Gennaio 2015 (Primo appello, a.a. 2014-2015)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log\left(e^{|x^2-4x-3|} - e^3\right)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie. **Facoltativo:** Determinare il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{t}{t^3 - 27}.$$

(2.a) Determinare tutte le primitive di $f(t)$.

(2.b) Determinare la convergenza di $\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$ si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 - x - x^2) + \sin x}{x^{1/2}\,(1-\cos x)^\alpha}.$$

Esercizio 4. Determinare il carattere di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^{3/2} - 2\log n}.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.

(5.b) Enunciare il criterio integrale per la convergenza delle serie numeriche.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica 1

Primo Appello, File G, 29/01/2015

Esercizio 1 Sia $f(x) = \lg\left(e^{|x^2-2x-1|} - e\right)$

D_f: $x \in D_f \iff e^{|x^2-2x-1|} - e > 0$

$\iff e\left(e^{|x^2-2x-1|-1} - 1\right) > 0$

$\iff e^{|x^2-2x-1|-1} - 1 > 0$

$\iff |x^2-2x-1| > 1$

$\iff \underbrace{x^2-2x-1 > 1}_{A}$ oppure $\underbrace{x^2-2x-1 < -1}_{B}$

Risolvo A:

$x^2-2x-1 > 1 \iff x^2-2x-2 > 0$

$\iff x > 1+\sqrt{3}$ oppure $x < 1-\sqrt{3}$

Risolvo B

$x^2-2x-1 < -1 \iff x^2-2x < 0$

$\iff x \in (0,2)$

Quindi $D_f = (-\infty, 1-\sqrt{3}) \cup (0,2) \cup (1+\sqrt{3}, +\infty)$

Dato che il D_f non è simmetrico rispetto al punto 0, f non è simmetrica pari e non simmetrica dispari.

LIMITI

$$\lim_{x\to-\infty} \lg\Big(\underbrace{e^{\overbrace{|x^2-2x-1|}^{\to +\infty}} - e}_{\downarrow +\infty}\Big) = +\infty$$

$$\lim_{x\to(1-\sqrt{3})^-} \cancel{f(x)} \lg\Big(\underbrace{e^{\overbrace{|x^2-2x-1|}^{\to 1^+}} - e}_{\downarrow 0^+}\Big) = -\infty$$

Da questi due limiti possiamo dedurre che f non ha né MAX né MIN assoluti.

$$\lim_{x\to 0^+} \lg(\underbrace{e^{\overbrace{\sqrt{|x^2-2x+1|}}^{\to 1^+}}-e}_{\downarrow 0^+}) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \lg(\underbrace{e^{\overbrace{\sqrt{|x^2-2x+1|}}^{\to 1^+}}-e}_{\downarrow 0^+}) = -\infty$$

$$\lim_{x\to (1+\sqrt{3})^+} \lg(\underbrace{e^{\overbrace{\sqrt{|x^2-2x+1|}}^{\to 1^+}}-e}_{\downarrow 0^+}) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \lg(\underbrace{e^{\overbrace{\sqrt{|x^2-2x+1|}}^{\to +\infty}}-e}_{\downarrow +\infty}) = +\infty$$

Da quanto sopra abbiamo che le rette seguenti sono asintoti:

$x = 1-\sqrt{3}$	AS. VERT		SINISTRO
$x = 0$	"	"	DESTRO
$x = 2$	"	"	SINISTRO
$x = 1+\sqrt{3}$	"	"	DESTRO

Non esistono asintoti orizzontali

AS. OBLIQUI: considero

~~con~~ $$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\lg(e^{\sqrt{|x^2-2x-1|}}-e)}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to +\infty \\ (x>100)}} \frac{\lg(e^{\sqrt{x^2-2x-1}}-e)}{x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\lg e + \lg(e^{\sqrt{x^2-2x-2}}-1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\lg\left(e^{x^2-2x-2}\left(1-e^{-x^2+2x+2}\right)\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2-2x-2+\lg\left(1-e^{-x^2+2x+2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x-1}{x}+\frac{\lg\left(1-e^{-x^2+2x+2}\right)}{x}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(x-2-\frac{1}{x}\right)}_{\downarrow\ +\infty}+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\lg\left(1-e^{-x^2+2x+2}\right)}{x}}_{\downarrow\ 0}$$

$= +\infty$ $\quad\nexists$ as. obliquo a $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to-\infty\\(x<-100)}}\frac{\lg\left(e^{x^2-2x-1}-e\right)}{x}=\dots$$ stessi calcoli del caso precedente

$$\dots=\lim_{x\to-\infty} x-2-\frac{1}{x}+\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{\lg\left(1-e^{-x^2+2x+2}\right)}{x}}_{\downarrow\ 0}$$

$= -\infty$ $\quad\nexists$ as. obliquo a $-\infty$.

SEGNO DI f

$$f(x)>0 \iff \begin{cases} x\in D_f \\ e^{|x^2-2x-1|}-e>1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\in D_f \\ e^{|x^2-2x-1|}>1+e \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\in D_f \\ |x^2-2x-1|>\lg(1+e) \end{cases}$$

$|x^2-2x-1| > \lg(1+e)$ equivale a

$x^2-2x-1 > \lg(1+e)$ oppure $+x^2-2x-1 < -\lg(1+e)$

$x^2-2x-1-\lg(1+e)>0$ oppure $+x^2-2x-1+\lg(1+e)<0$

$(x-1)^2-2-\lg(1+e)>0$ opp. $+(x-1)^2-2+\lg(1+e)<0$

$(x-1)^2 > 2+\lg(1+e)$ oppure $(x-1)^2 < 2-\lg(1+e)$

$\underset{A}{|x-1| > \sqrt{2+\lg(1+e)}}$ oppure $\underset{B}{|x-1| < \sqrt{2-\lg(1+e)}}$

le sol di A sono

$x-1 > \sqrt{2+\lg(1+e)}$ oppure $x-1 < -\sqrt{2+\lg(1+e)}$

le sol di B sono

$-\sqrt{2-\lg(1+e)} < x-1 < \sqrt{2-\lg(1+e)}$

Pertanto

$$f(x)>0 \iff x\in\left(-\infty, 1-\sqrt{2+\lg(1+e)}\right)\cup \left(1+\sqrt{2+\lg(1+e)}, +\infty\right)\cup \left(1-\sqrt{2-\lg(1+e)}, 1+\sqrt{2+\lg(1+e)}\right)$$

$$f(x)<0 \iff x\in\left(1-\sqrt{2+\lg(1+e)}, 1-\sqrt{3}\right)\cup \cup\left(0, 1-\sqrt{2-\lg(1+e)}\right) \cup\left(1+\sqrt{2+\lg(1+e)}, 2\right) \cup\left(1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{2+\lg(1+e)}\right)$$

$$f(x)=0 \iff |x^2-2x-1| = \lg(1+e)$$

$$\iff x = 1+\sqrt{2+\lg(1+e)}\,;$$
$$x = 1-\sqrt{2+\lg(1+e)}\,;$$
$$x = 1+\sqrt{2-\lg(1+e)}$$
$$x = 1-\sqrt{2-\lg(1+e)}\,.$$

<u>continuità</u>: f continua dove definita perché composizione di f. continue.

<u>Derivabilità</u>: f è derivabile in $x \in D_f \setminus Z$ dove $Z = \{x \in \mathbb{R} / x^2-2x-1 = 0\}$ perché composizione di f. derivabili.

Z: $(x-1)^2-2=0 \iff |x-1|^2 = 2 \iff$
$x-1=\sqrt{2}$ oppure ~~[illegible]~~ $x-1=-\sqrt{2}$
$x = 1+\sqrt{2}$ oppure $x = +1-\sqrt{2}$

si noti che $1+\sqrt{2} \notin D_f$; $1-\sqrt{2} \notin D_f$

Quindi f è derivabile dove definita.

derivata prima:

$$f(x) = \begin{cases} \lg\left(e^{-x^2+2x+1}-e\right) & x \in (0,2) \\ \lg\left(e^{x^2-2x-1}-e\right) & x \in (-\infty, 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}, +\infty) \end{cases}$$

da cui segue che

6

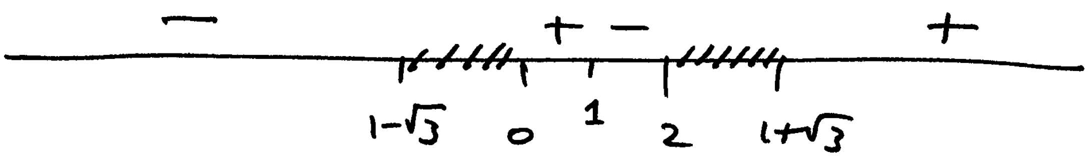
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{-x^2+2x+1}-e}\, e^{-x^2+2x+1}(-2x+2) & x\in(0,2) \\[2ex] \dfrac{1}{e^{x^2-2x-1}-e}\, e^{x^2-2x-1}(2x-2) & x\in \dots \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (2-2x)\, \dfrac{e^{-x^2+2x-1}}{e^{-x^2+2x+1}-e} & x\in(0,2) \\[2ex] (2x-2)\, \dfrac{e^{x^2-2x-1}}{e^{x^2-2x-1}-e} & x\in \dots \end{cases}$$

Dato che per $x\in D_f$ si ha che $e^{|x^2-2x-1|}-e>0$ abbiamo che

per $x\in(0,2)$ $\quad f'(x)=0 \iff 2-2x=0 \iff x=1$

per $x\in(-\infty,1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3},+\infty)$ $\quad f'(x)=0 \iff 2x-2=0 \iff x=1 \notin (-\infty,1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3},+\infty)$



pertanto

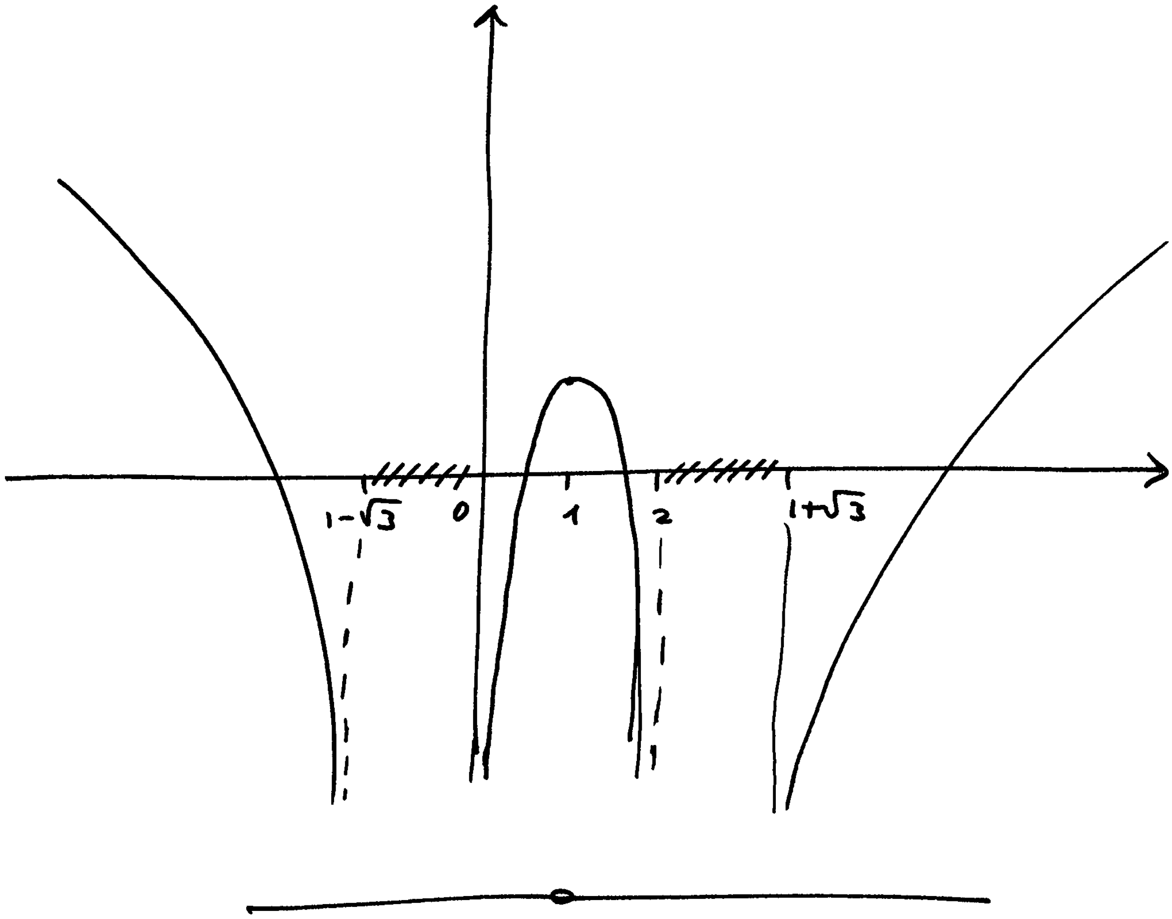
f è strett. decrescente per $x\in(-\infty,1-\sqrt{3})\cup(1,2)$

f è " crescente per $x\in(0,1)\cup(1+\sqrt{3},+\infty)$

il punto $x=1$ è punto di massimo locale

$$f(1) = \lg\left(e^{|1-2-1|}-e\right)$$
$$= \lg(e^2-e) = 1+\lg(e-1) > 0$$

Andamento



Esercizio 2 $\qquad f(t) = \dfrac{t}{t^3+8}$

2a) primitive di $f(t)$: $\quad t^3+8 = (t+2)(t^2-2t+4)$

e $\; t^2-2t+4 = (t-1)^2+3$

si imposta

$$\frac{t}{t^3+8} = \frac{A}{t+2} + \frac{Bt+C}{(t-1)^2+3}$$ da cui si ottiene

$$t = A(t^2-2t+4) + (Bt+c)(t+2)$$ che conduce a

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B+C=1 \\ 4A+2C=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B=-A \\ -2A-2A+C=1 \\ 4A+2C=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B=-A \\ -6A=1 \\ C=-2A \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-1/6 \\ B=1/6 \\ C=1/3 \end{cases}$$

Dobbiamo quindi calcolare

$$\int \frac{-1/6}{t+2}\,dt + \int \frac{1/6\,t+1/3}{(t-1)^2+3}\,dt$$

$$= -\frac{1}{6}\lg|t+2| + \frac{1}{6}\int \frac{t+2}{(t-1)^2+3}\,dt$$

$$= -\frac{1}{6}\lg|t+2| + \frac{1}{12}\int \frac{2t+4}{(t-1)^2+3}\,dt$$

$$= -\frac{1}{6}\lg|t+2| + \frac{1}{12}\int \frac{2t-2+6}{(t-1)^2+3}\,dt$$

$$= -\frac{1}{6}\lg|t+2| + \frac{1}{12}\int \frac{2(t-1)}{(t-1)^2+3}\,dt + \frac{6}{12}\int \frac{dt}{(t-1)^2+3}$$

$$= -\frac{1}{6}\lg|t+2| + \frac{1}{12}\lg|(t-1)^2+3| + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{3\left[\left(\frac{t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}$$

$$\underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{6}\lg|t+2| + \frac{1}{12}\lg|(t-1)^2+3| + \frac{1}{6}\sqrt{3}\int \frac{du}{u^2+1}$$

$u = \frac{t-1}{\sqrt{3}}$

$1+\sqrt{3}u = t$

$g(u) = 1+\sqrt{3}u$

$g'(u) = \sqrt{3}$

$$= -\frac{1}{6}\lg|t+2| + \frac{1}{12}\lg|(t-1)^2+3| + \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{t-1}{\sqrt{3}}\right) + c;$$

$c \in \mathbb{R}$

2b] Convergenza di $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{t}{t^3+8}\,dt$

osservando che il problema di convergenza è in -2 e che $t^3+8 = (t+2)(t^2-2t+4)$

abbiamo che $(\alpha>0)$

$$\lim_{t\to(-2)^+} \frac{\frac{t}{t^3+8}}{\frac{1}{|t+2|^\alpha}} = \lim_{t\to(-2)^+} \frac{t}{t^3+8}\,|t+2|^\alpha$$

$$= \lim_{t\to(-2)^+} \underbrace{\frac{t}{t^2-2t+4}}_{\downarrow \atop -1/6 \neq 0} \; \frac{|t+2|^\alpha}{t+2}$$

$$= -\frac{1}{6}\lim_{t\to(-2)^+}(t+2)^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \alpha>1 \\ -\frac{1}{6} & \alpha=1 \\ -\infty & \alpha\in(0,1) \end{cases}$$

ossia che $f(t)$ è INFINITO DI ORDINE 1 per $x\to(-2)^+$.

Grazie al criterio dell'ordine di infinito abbiamo che $\int_{-2}^{0} \frac{t}{t^3+8}\,dt$ DIVERGE.

Esercizio 3 Calcolare al variare di $\alpha>0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\lg(1+x+x^2)-\sin x}{(e^x-1)^\alpha\sqrt{x}}$$

Ricordando che $\frac{e^x-1}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1$ si ha che

Denominatore $= (e^x-1)^\alpha\sqrt{x}$ è infinitesimo di ordine $\alpha+1/2$ per $x\to 0^+$.

Oltre

$$(e^x-1)^\alpha\sqrt{x} = x^{\alpha+1/2}+o(x^{\alpha+1/2})$$

per $x\to 0^+$

Ricordando che

$$\lg(1+y) = y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3)$$

ho che

$$\lg(1+x^2+x) = x+x^2-\frac{(x+x^2)^2}{2}+\frac{(x+x^2)^3}{3}+o((x+x^2)^3)$$

$$= x+x^2-\frac{1}{2}(x^2+x^4+2x^3)+$$

$$+\frac{1}{3}(x^3+o(x^4))+o(x^3)$$

$$= x+x^2-\frac{1}{2}x^2-x^3+o(x^3)+\frac{1}{3}x^3$$

$$= x+\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$$

Inoltre

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3) \quad \text{per } x\to 0^+$$

Quindi

$$\lg(1+x+x^2)-\sin x = x+\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

per $x\to 0^+$

$$= \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

perturbo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\lg(1+x+x^2)-\sin x}{(e^x-1)^\alpha \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^{\alpha+1/2} + o(x^{\alpha+1/2})}$$

$$= \begin{cases} 0 & \alpha + 1/2 < 2,\ \alpha > 0 \\ 1/2 & \alpha + 1/2 = 2 \\ +\infty & \alpha + 1/2 > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < 3/2 \\ 1/2 & \alpha = 3/2 \\ +\infty & \alpha > 3/2 \end{cases}$$

Ex 4 $\quad a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{3n - 2\lg n}, \quad n \geq 1$

- $a_n \geq 0 \iff 3n \geq 2\lg n$

$\iff 3/2 \geq \dfrac{\lg n}{n}$

Dato che $\dfrac{\lg n}{n}$ è successione decrescente strettamente per $n \geq 2$, e che $\left(\dfrac{\lg n}{n}\right)(1) = 0$; è sufficiente verificare che $3/2 \geq \dfrac{\lg 2}{2} \iff 3 \geq \lg 2$ $\iff e^3 \geq 2$ che è vero.

- $a_{n+1} \geq a_n$; studio $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x - 2\lg x}$ per $x \geq 1$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x - 2\lg x) - \sqrt{x}\,(3 - 2/x)}{(3x - 2\lg x)^2}$$

$$= \frac{3x - 2\lg x - 2x(3 - 2/x)}{2\sqrt{x}\,(3x - 2\lg x)^2}$$

$$= \frac{3x - 2\lg x - 6x + 4}{2\sqrt{x}\,(3x - 2\lg x)^2} = \frac{-3x - 2\lg x + 4}{\underbrace{2\sqrt{x}\,(3x - 2\lg x)^2}_{>0}}$$

$f'(x) < 0 \iff -3x - 2\lg x + 4 < 0$

$\iff 3x + 2\lg x - 4 > 0$

Dato che $\lg x > 0$ per $x \geq 2$ e che $3x - 4 > 0$ per $x \geq 2$ abbiamo che

$f'(x) < 0 \quad \forall x \geq 2$.

pertanto $a_n = f(n)$ è decrescente strettamente per $n \geq 2$.

- $a_n \to 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{3n-2\lg n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n\left(3-2\frac{\lg n}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\underbrace{\left(3-2\underbrace{\frac{\lg n}{n}}_{\to 0}\right)}_{\to 3}} = 0 .$$

Valgono quindi le ipotesi del Criterio di Leibniz per la convergenza delle serie a segni alterni; pertanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{3n-2\lg n} \quad \text{converge.}$$

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 20 Febbraio 2015 (Secondo appello, a.a. 2014-2015)

Cognome e nome:________________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{x-1}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Determinare tutte le primitive di

$$f(t) = \frac{\arctan(t+1)}{(t-2)^2}.$$

Esercizio 3. Data

$$F(x) = x - \int_0^{\sin x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

calcolare il valore di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^3}.$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{(1+x)e^x}{\sin(y(x))}.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare che se f è debolmente crescente e derivabile nel suo dominio D_f, allora $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in D_f$.

(5.b) Enunciare il criterio di Leibniz per la convergenza delle serie a segni alterni.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 20 Febbraio 2015 (Secondo appello, a.a. 2014-2015)

Cognome e nome:____ Matricola:_______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Determinare tutte le primitive di

$$f(t) = \frac{\arctan(t-1)}{(t+2)^2}.$$

Esercizio 3. Data

$$F(x) = x - \int_0^{\sin x} e^{-t^2}\,dt,$$

calcolare il valore di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^3}.$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{(1-x)e^{-x}}{\cos(y(x))}.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare che se f è derivabile nel suo dominio D_f e $f'(x) < 0$ per ogni $x \in D_f$ allora f è strettamente decrescente in D_f.

(5.b) Enunciare teorema dei valori intermedi.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 20 Febbraio 2015 (Secondo appello, a.a. 2014-2015)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x}}{x + 2}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Determinare tutte le primitive di

$$f(t) = \frac{\arctan(t+1)}{(t+2)^2}.$$

Esercizio 3. Data

$$F(x) = \int_1^{1+\sin x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t - ex - ex^2,$$

calcolare il valore di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^3}.$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{(1+x)e^x}{\cos(y(x))}.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare che se f è derivabile nel suo dominio D_f e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in D_f$ allora f è strettamente crescente in D_f.

(5.b) Enunciare il criterio dell'ordine di infinitesimo per la convergenza degli integrali impropri su intervalli $[a, +\infty)$.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 20 Febbraio 2015 (Secondo appello, a.a. 2014-2015)

Cognome e nome:____ Matricola:________________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x+3}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Determinare tutte le primitive di

$$f(t) = \frac{\arctan(t-1)}{(t-2)^2}.$$

Esercizio 3. Data

$$F(x) = \int_1^{1+\sin x} e^{-t^2}\, dt - \frac{x}{e} + \frac{x^2}{e},$$

calcolare il valore di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^3}.$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{(1-x)e^{-x}}{\sin(y(x))}.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare che se f è debolmente decrescente e derivabile nel suo dominio D_f, allora $f'(x) \le 0$ per ogni $x \in D_f$.

(5.b) Enunciare il criterio del rapporto per le serie numeriche.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica 1

Ing. Chimica e Materiali

II appello, 20/02/2015

File D

Ex 1 Studiare $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x+3}$

Df: $\begin{cases} x^2-2x \geq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x-2) \geq 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \text{ opp. } x \leq 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$

Pertanto

$$D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, 0] \cup [2, +\infty).$$

f né pari né dispari: D_f non simmetrico rispetto a 0.

Segno di f: $\sqrt{x^2-2x} \geq 0 \ \forall x \in D_f$. Quindi

$$f(x) > 0 \iff x \in (-3, 0) \cup (2, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -3)$$

Inoltre $f(x) = 0 \iff x^2-2x = 0 \iff x \in \{0, 2\}$.

Limiti

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x+3} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1-2/x}}{x+3}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1-2/x}}{x+3}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{x\overbrace{\sqrt{1-2/x}}^{\to 1}}{x+3}$$

$$= -\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x+3} = -1$$

$\Rightarrow y = -1$ è as. or. a $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x+3} \underset{\substack{\text{stessi}\\ \text{passaggi}\\ \text{precedenti}}}{=} \dots = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1-2/x}}{x+3}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x}{x+3}}_{\downarrow 1} \underbrace{\sqrt{1-\frac{2}{x}}}_{\downarrow 1} = 1$$

$\Rightarrow y=1$ è as. or. a $+\infty$.

$$\lim_{x\to(-3)^-} \frac{\overbrace{\sqrt{x^2-2x}}^{\to\sqrt{15}}}{\underbrace{x+3}_{\to 0^-}} = -\infty \qquad x=-3 \text{ è as. vert. sx}$$

$$\lim_{x\to(-3)^+} \frac{\overbrace{\sqrt{x^2-2x}}^{\to\sqrt{15}}}{\underbrace{x+3}_{\to 0^+}} = +\infty \qquad x=-3 \text{ è as. vert. dx.}$$

Gli ultimi due limiti permettono anche di concludere che f non ha né MAX né MIN assoluti.

__Continuità__ : f è rapp. di funzioni continue in D_f
$\Rightarrow$ f è continua in D_f.

__Derivabilità__ : f è rapp. di f. derivabili in $D_f \setminus \{0,2\}$
$\Rightarrow$ f è derivabile in $D_f \setminus \{0,2\}$.

Se $x \in D_f \setminus \{0,2\}$ si ha che

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x^2-2x)^{-1/2}\cdot(2x-2)(x+3) - (x^2-2x)^{1/2}}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{(x-1)(x+3)-(x^2-2x)}{(x^2-2x)^{1/2}(x+3)^2}$$

$$= \frac{4x-3}{(x^2-2x)^{1/2}(x+3)^2} \quad ; \; x \in D_f \setminus \{0,2\}$$

Si noti che

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\overbrace{4x-3}^{\to 5}}{\underbrace{(x+3)^2}_{\to 25}} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2-2x}}_{\to 0^+}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{4x-3}^{\to -3}}{\underbrace{(x+3)^2}_{\to 9}} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2-2x}}_{\to 0^+}} = -\infty;$$

pertanto per il corollario del teorema di de l'Hôpital, si ha che f non è derivabile in 0 ed in +2.

Monotonia Dato che $f'(x) = \dfrac{4x-3}{\sqrt{x^2-2x}\,(x+3)^2}$

per ogni $x \in D_f \setminus \{0,2\}$ e che $(x+3)^2 > 0$ $\forall x \in D_f$

e $\sqrt{x^2-2x} > 0$ $\forall x \in D_f \setminus \{0,2\}$, abbiamo

$$f'(x) > 0 \iff 4x-3 > 0 \quad ; \quad x \in D_f \setminus \{0,2\}$$

ossia f è strettamente crescente in $[2, +\infty)$

f è " decrescente in $(-\infty,-3) \cup (-3,0]$

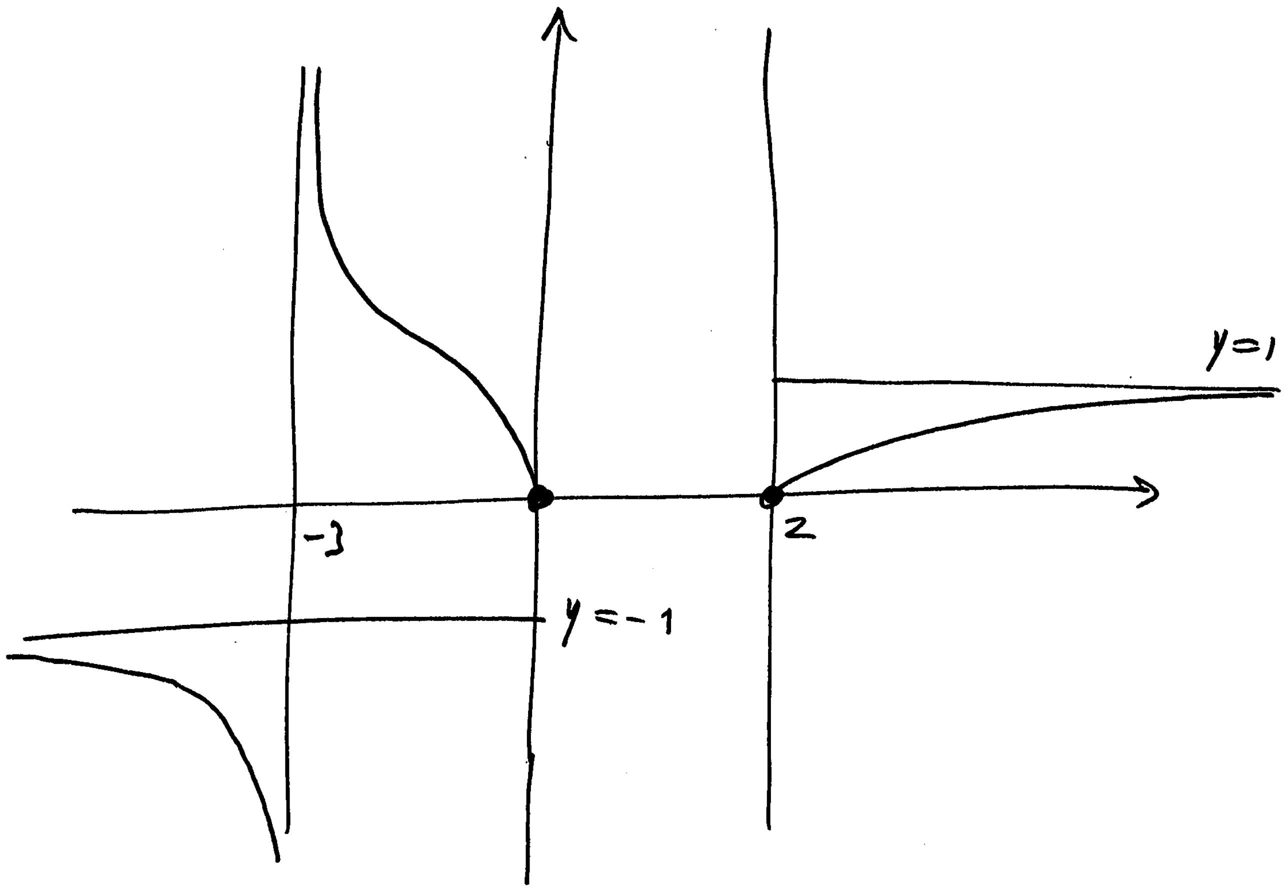
Pertanto 2 è pto di MIN relativo

0 è pto di MIN relativo

si noti anche che f non ha punti critici (stazionari)

$$f(0) = 0 \quad ; \quad f(2) = 0$$

1 Andamento di f



$\boxed{\text{Esercizio 2}}$

$$\int \frac{\operatorname{atg}(t-1)}{(t-2)^2}\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{parti}}}{=} -\frac{1}{t-2}\operatorname{atg}(t-1) + \int \frac{dt}{(t-2)\left((t-1)^2+1\right)}$$

$$= -\frac{\operatorname{atg}(t-1)}{t-2} + \int \frac{dt}{(t-2)\left((t-1)^2+1\right)}$$

decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{1}{(t-2)\left((t-1)^2+1\right)} = \frac{A}{t-2} + \frac{Bt+C}{\left((t-1)^2+1\right)} \quad \text{da cui si ha}$$

$$A\,\underbrace{\left((t-1)^2+1\right)}_{t^2+1-2t+1} + (Bt+C)(t-2) = 1$$

$$\begin{array}{l} t^2 \\ t \\ \text{cost} \end{array}\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-2B+C=0 \\ 2A-2C=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B=-A \\ -2A+2A+A-\frac{1}{2}=0 \\ 2C=2A-1 \end{cases}$$

ossia $\begin{cases} B = -1/2 \\ A = 1/2 \\ C = 0 \end{cases}$ e quindi

$$\int \frac{dt}{(t-2)((t-1)^2+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{t}{(t-1)^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\lg|t-2| - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \frac{2t}{(t-1)^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\lg|t-2| - \frac{1}{4}\int \frac{2t-2+2}{(t-1)^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\lg|t-2| - \frac{1}{4}\int \frac{2(t-1)}{(t-1)^2+1}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-1)^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\lg|t-2| - \frac{1}{4}\lg\left(1+(t-1)^2\right) - \frac{1}{2}\,\mathrm{atg}(t-1) + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

In conclusione

$$\int \frac{\mathrm{atg}(t-1)}{(t-2)^2}\,dt = -\frac{\mathrm{atg}(t-1)}{t-2} + \frac{1}{2}\lg|t-2| + {}$$
$$-\frac{1}{4}\lg\left(1+(t-1)^2\right) - \frac{1}{2}\,\mathrm{atg}(t-1) + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= -\frac{t\,\mathrm{atg}(t-1)}{2(t-2)} + \frac{1}{2}\lg|t-2| - \frac{1}{4}\lg\left(1+(t-1)^2\right) + c; \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ex 3

$$F(x) = \int_1^{1+\sin x} e^{-t^2}\,dt - \frac{x}{e} + \frac{x^2}{e}$$

Osservo che, detta $G(u) = \int_1^u e^{-t^2}\,dt$, si ha

$$F(x) = G(1+\sin x) - \frac{x}{e} + \frac{x^2}{e}$$

Siccome G è derivabile in $\mathbb{R}$ (per il TFC I) so che F è derivabile in $\mathbb{R}$ perché è

composizione di funzioni derivabili.
Inoltre

$$F'(x) = G'(1+\sin x)\cos x - \frac{1}{e} + \frac{2x}{e}$$
$$= e^{-(1+\sin x)^2}\cos x - \frac{1}{e} + \frac{2x}{e}$$

visto che $G'(u) = e^{-u^2}$.

Osservo adesso che $F(0) = \int_1^1 e^{-t^2}dt = 0$

e che $F'(0) = e^{-1} - \frac{1}{e} = 0$.

Osservo che $F'(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}$ (comp. di f. derivabili in $\mathbb{R}$) e quindi

$$F''(x) = e^{-(1+\sin x)^2}\left(-2(1+\sin x)\right)\cos^2 x +$$
$$- e^{-(1+\sin x)^2}\sin x + \frac{2}{e}$$
$$= -e^{-(1+\sin x)^2}\left[2(1+\sin x)\cos^2 x + \sin x\right] + \frac{2}{e}$$

da cui $F''(0) = -e^{-1}[2+0] + \frac{2}{e} = -\frac{2}{e} + \frac{2}{e} = 0$

osservo che $F''(x)$ è deriv. in $\mathbb{R}$ (comp. di f. derivabili in $\mathbb{R}$) e quindi:

$$F'''(x) = -e^{-(1+\sin x)^2}\left(-2(1+\sin x)\right)\cos x \cdot$$
$$\cdot\left[2(1+\sin x)\cos^2 x + \sin x\right] +$$
$$- e^{-(1+\sin x)^2}\left[2\cos^3 x - 4(1+\sin x)\sin x\cos x\right.$$
$$\left. + \cos x\right]$$
$$= -e^{-(1+\sin x)^2}\cos x\left[-4(1+\sin x)^2\cos^2 x - 2\sin x(1+\sin x) -\right.$$
$$\left. + 2\cos^2 x + 1 - 4\sin x(1+\sin x)\right]$$

Cioè

$$F'''(x) = -\cos x\, e^{-(1+\sin x)^2} \cdot \left[1+2\cos^2 x + -4\cos^2 x(1+\sin x)^2 - 6\sin x(1+\sin x)\right]$$

e $F'''(0) = -e^{-1}[1+2-4] = e^{-1}$

Da quanto sopra, applicando la f. di Taylor-Peano del terzo ordine, si ha

$$F(x) = 0 + 0(x-0) + 0\frac{(x-0)^2}{2} + \frac{1}{e}\frac{(x-0)^3}{6} + o(x^3)$$
$$= \frac{x^3}{6e} + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^3}{6e} + o(x^3)}{x^\alpha}$$

$$= \begin{cases} 0 & 0<\alpha<3 \\ \frac{1}{6e} & \alpha = 3 \\ +\infty & \alpha>3 \end{cases}$$

N.B. il testo d'esame richiedeva solamente il caso $\alpha = 3$.

EX4 Risolvere

$$y'(x) = \frac{(1-x)e^{-x}}{\sin(y(x))}$$

Dobbiamo supporre che $y(x) \cap \{0 + k\pi : k\in\mathbb{Z}\} = \emptyset$ ossia che $y(x)$ non intersechi le rette di equazione $y = k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ perché se lo facesse il denominatore del lato destro dell'eq. differenziale si annullerebbe.

Se $y(x) \in (0,\pi)$ allora si ha che

$$y'(x)\sin(y(x)) = (1-x)e^{-x}$$

che è a variabili separabili; quindi

$$\int y'(x)\sin(y(x))\,dx = \int (1-x)e^{-x}\,dx$$

cioè

$$-\cos(y(x)) = xe^{-x} + c \quad ; c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(y(x)) = -xe^{-x} + c \quad ; c \in \mathbb{R}$$

Dato che $y(x) \in (0,\pi)$ il coseno è invertibile e si ottiene

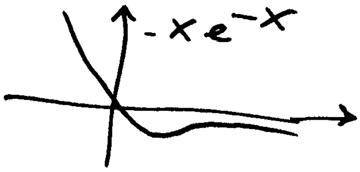
$$y(x) = \arccos(-xe^{-x}+c); \quad c \in \mathbb{R}$$

che è l'insieme di tutte le sol. del problema dato posto che

$$-xe^{-x} + c \in (-1,1) \quad \text{ossia}$$

$$-1-c < -xe^{-x} < 1-c$$

che comporta una limitazione nel dominio di $y(x)$. Ad esempio siccome $\min(-xe^{-x}) = -\frac{1}{e}$



per $c=1$ si ha $-2 < -xe^{-x} < 0$ che implica $\boxed{x>0}$

per $c=-1$ si ha $0 < -xe^{-x} < 2 \Rightarrow x \in (x_0, 0)$ con $x_0 / -x_0 e^{-x_0} = 2$.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 14 Luglio 2015 (Terzo appello, a.a. 2014-2015)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arctan\Big(\dfrac{x^2 - x}{x+2}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - (e^x - 1)\cosh(\sqrt{x}) + \cos(x^2) - 1}{\log(\cos x) + x^3 \log x}$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 1}\, \mathrm{d}x.$$

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy

$$y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 2e^{2x}; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare il teorema della media integrale.

(5.b) Enunciare la condizione necessaria di primo ordine per punti estremali.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 14 Luglio 2015 (Terzo appello, a.a. 2014-2015)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	8	8	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2+x}{2-x}\right)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \log(1-x) + \sinh x + \arctan(x^5)}{2\log(\cos x) + x^5 \log x}$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\int_{\log 2}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-1}\, \mathrm{d}x.$$

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 3e^{3x}; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare che se f è Riemann-integrabile in $[a, b]$ allora $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t$ è continua in $[a, b]$.

(5.b) Enunciare teorema di Lagrange.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica I
Ing. chimica e Materiali

$\boxed{\text{Fila B}}$ III appello 14/07/2015

Ex 1 Studiare $f(x) = \operatorname{atg}\left(\dfrac{x^2+x}{2-x}\right)$

$\boxed{D_f} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. f non è né pari né dispari perché D_f non è simmetrico rispetto a 0.

$\boxed{\text{LIMITI}}$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{atg}\left(\frac{x^2+x}{2-x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{atg}\left(\frac{x^2(1+1/x)}{x\,(-1+2/x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \operatorname{atg}\Big(x \underbrace{\frac{1+1/x}{-1+2/x}}_{\to -1}\Big) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \underset{\text{come sopra}}{=} \lim_{x\to+\infty} \operatorname{atg}\Big(x \underbrace{\frac{1+1/x}{-1+2/x}}_{\to -1}\Big) = -\frac{\pi}{2}$$

$y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale a $-\infty$

$y = -\pi/2$ è " " a $+\infty$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \operatorname{atg}\Big(\frac{\overbrace{x^2+x}^{\to 6}}{\underbrace{2-x}_{\to 0^+}}\Big) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \operatorname{atg}\Big(\frac{\overbrace{x^2+x}^{\to 6}}{\underbrace{2-x}_{\to 0^-}}\Big) = -\frac{\pi}{2}$$

La retta $x = 2$ **NON** è asintoto verticale.

$\boxed{\text{Segno di } f}$ $f(x) > 0 \iff \begin{cases} \operatorname{atg}\left(\dfrac{x^2+x}{2-x}\right) > 0 \\ x \in D_f \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \dfrac{x^2+x}{2-x} > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ $\qquad x^2+x = x(x+1)$

	-1		0		2		
$+$		$-$		$+$			$x(x+1)$
$+$		$+$		$+$		$-$	$2-x$

Pertanto

$$f(x)>0 \iff x\in(-\infty,-1)\cup(0,2)$$

$$f(x)<0 \iff x\in(-1,0)\cup(2,+\infty)$$

Inoltre $f(x)=0 \iff \begin{cases}\frac{x^2+x}{2-x}=0\\ x\in D_f\end{cases} \iff x\in\{-1,0\}$.

Monotonia: si noti che f è continua e derivabile in D_f perché è composizione di f. derivabili in D_f.

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x^2+x}{2-x}\right)^2}\;\frac{(2x+1)(2-x)-(x^2+x)(-1)}{(2-x)^2}$$

$$=\frac{-x^2+4x+2}{(2-x)^2+(x^2+x)^2}$$

$$f'(x)=0 \iff \begin{cases}x\in D_f\\ -x^2+4x+2=0\end{cases} \iff x\in\{2+\sqrt6,\ 2-\sqrt6\}$$

Dato che $(2-x)^2+(x^2+x)^2>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ ($a^2+b^2=0 \iff a=0$ e $b=0$) si ha che

$$f'(x)>0 \iff \begin{cases}-x^2+4x+2>0\\ x\in D_f\end{cases} \iff x\in(2-\sqrt6,2)\cup(2,2+\sqrt6)$$

Pertanto

f è strett. decrescente in $(-\infty,2-\sqrt6)\cup(2+\sqrt6,+\infty)$

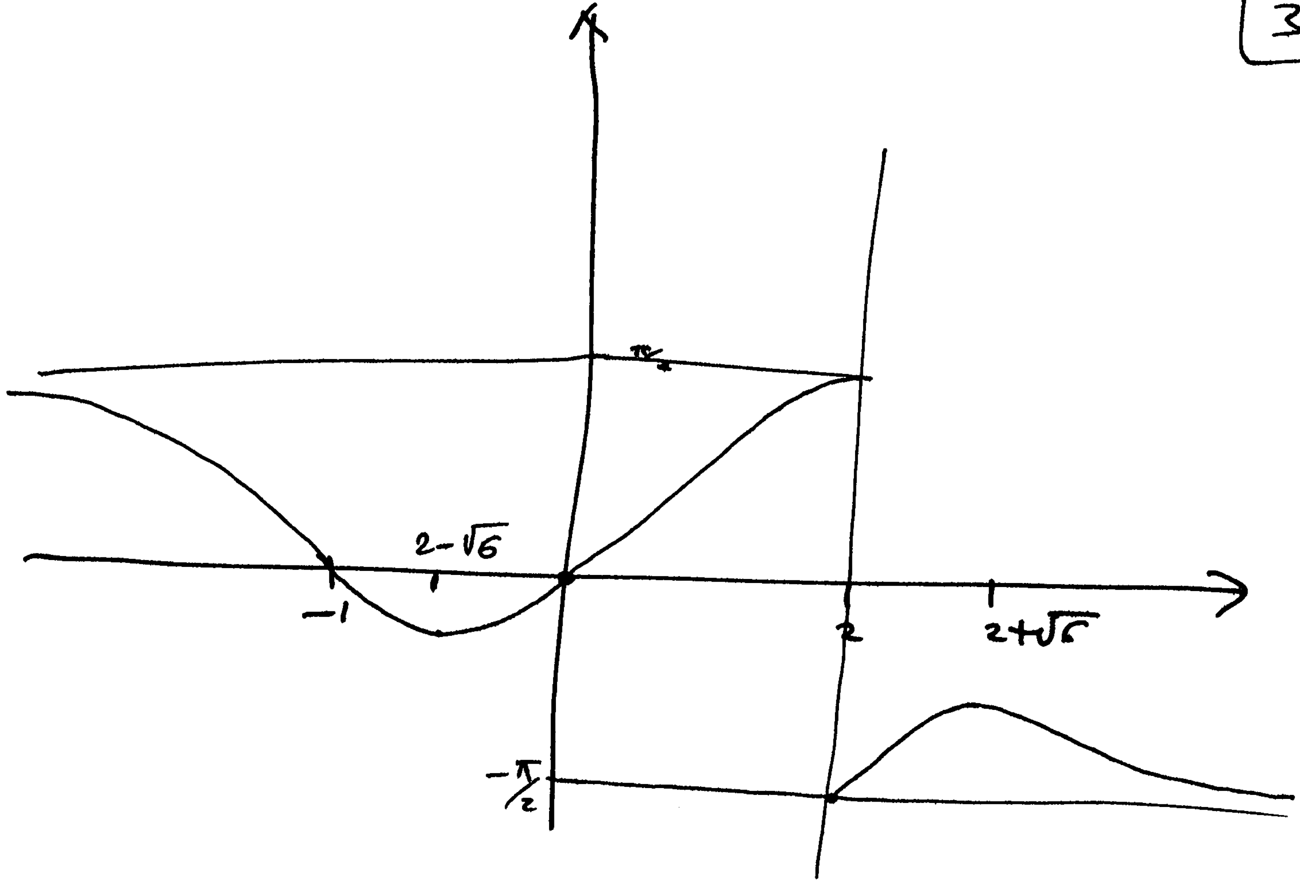
f è " crescente in $(2-\sqrt6,2)\cup(2,2+\sqrt6)$

e $2-\sqrt6$ è punto di min relativo;

$2+\sqrt6$ è punto di max relativo.

Inoltre $f(2-\sqrt6)=\operatorname{atg}(2\sqrt6-5)<0$

perché $2\sqrt6<5$



$2-\sqrt{6} > -1 \iff 3 > \sqrt{6} \iff 9 > 6$

$\boxed{\text{Ex 2}}$

calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \lg(1-x) + \sin^4(x) + \operatorname{atg}(x^5)}{2\lg(\cos x) + x^5 \lg x}$$

Utilizzando la f. di Taylor – Peano in 0 si ha che

$$\lg(\cos x) = \lg(1+(\cos x-1)) = (\cos x - 1) + o(\cos x - 1)$$
$$= -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Inoltre $x^5 \lg x = o(x^4)$ perché $\lim_{x\to 0} \frac{x^5 \lg x}{x^4} = 0$

Quindi il denominatore si esprime come

$$2\lg(\cos x) + x^5 \lg x = -x^2 + o(x^2)$$

per $x \to 0^+$

Vediamo l'espansione del numeratore:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\lg(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

da cui

$$e^x \lg(1-x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= -x - x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) + o(x^2)$$

$$= -x - x^2 + o(x^2) - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= -x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

Inoltre

$$\operatorname{atg}(x^5) = x^5 + o(x^5) = o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$= x + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

Quindi il numeratore è:

$$e^x \lg(1-x) + \sinh(x) + \operatorname{atg}(x^5) = -x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) + x + o(x^2)$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x \lg(1-x) + \sinh(x) + \operatorname{atg}(x^5)}{2\lg(\cos x) + x^5 \lg x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)}$$

$$= \frac{3}{2}$$

P.C. Infinitesimi di ordine superiore

Ex 3] Calcolare

$$\int_{\lg 2}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-1}\,dx$$

Data $F(u)=\int_{\lg 2}^{u} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-1}\,dx$ si ha che, se $\exists$,

$$\int_{\lg 2}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-1}\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_{\lg 2}^{u} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-1}\,dx = \lim_{u\to+\infty} F(u)-F(\lg$$

Dal TFCI sappiamo che $F(u)$ è primitiva di $\frac{\sqrt{e^u+1}}{e^u+1}$ $=f($

Pertanto calcolo tutte le primitive di $f(u)$:

$$\int \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-1}\,dx \underset{\substack{t^2=e^x+1\\ g(t)=\lg(t^2-1)}}{=} \int \frac{t}{t^2-2}\,\frac{2t}{t^2-1}\,dt = 2\int \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2-2)}\,dt$$

Determino $A,B,C,D \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{A}{t-\sqrt2}+\frac{B}{t+\sqrt2}+\frac{C}{t-1}+\frac{D}{t+1}=\frac{t^2}{(t^2-2)(t^2-1)}$$

Facendo denominatore comune e uguagliando i numeratori si ottiene

$$A(t+\sqrt2)(t^2-1)+B(t-\sqrt2)(t^2-1)+C(t^2-2)(t+1)+D(t^2-2)(t-1)=t^2$$

che conduce a risolvere il sistema

$$\begin{cases} A+B+C+D=0\\ \sqrt2 A-\sqrt2 B+C-D=1\\ -A-B-2C-2D=0\\ -\sqrt2 A+\sqrt2 B-2C+2D=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{II}+\text{IV}\to\text{IV}]{\text{I}+\text{III}\to\text{III}} \begin{cases} A+B+C+D=0\\ \sqrt2 A-\sqrt2 B+C-D=1\\ -C-D=0\\ -C+D=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \\ D=-C\\ -2C=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A+B=0\\ \sqrt2 A-\sqrt2 B-1=1\\ D=1/2\\ C=-1/2 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A\\ 2\sqrt2 A=2\\ \\ \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1/\sqrt2\\ A=\frac{1}{\sqrt2}\\ D=1/2\\ C=-1/2 \end{cases}$$

pertanto

$$2\int \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2-2)}\,dt = 2\left[\frac{1}{\sqrt2}\int\frac{dt}{t-\sqrt2} - \frac{1}{\sqrt2}\int\frac{dt}{t+\sqrt2} + \right.$$

$$\left. -\frac12\int\frac{dt}{t-1} + \frac12\int\frac{dt}{t+1}\right]$$

$$= \sqrt2 \lg|t-\sqrt2| - \sqrt2 \lg|t+\sqrt2| +$$

$$- \lg|t-1| + \lg|t+1| + c;\ c\in\mathbb{R}$$

$$= \sqrt2 \lg\left|\frac{t-\sqrt2}{t+\sqrt2}\right| + \lg\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + c;\ c\in\mathbb{R}$$

Abbiamo allora $(t=\sqrt{e^x+1})$

$$\int\frac{\sqrt{e^x+1}}{e-1}\,dx = \underbrace{\sqrt2 \lg\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-\sqrt2}{\sqrt{e^x+1}+\sqrt2}\right| + \lg\left|\frac{\sqrt{e^x+1}+1}{\sqrt{e^x+1}-1}\right|}_{=G(x)} + c;\ c\in\mathbb{R}$$

$$= G(x) + c \quad ;\ c\in\mathbb{R}$$

Considero

$$\lim_{x\to+\infty}(F(x)-F(\lg 2)) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}(G(x)-G(\lg 2))$$

perché F e G sono primitive della stessa funzione; la loro variazione è uguale.

$$G(\lg 2) = \sqrt2 \lg\left|\frac{\sqrt3-\sqrt2}{\sqrt3+\sqrt2}\right| + \lg\left|\frac{\sqrt3+1}{\sqrt3-1}\right| = K$$

dato che

$$\frac{\sqrt{e^x+1}-\sqrt2}{\sqrt{e^x+1}+\sqrt2} = \frac{\sqrt{e^x+1}+\sqrt2-2\sqrt2}{\sqrt{e^x+1}+\sqrt2} = 1 - \frac{2\sqrt2}{\sqrt{e^x+1}+\sqrt2}\xrightarrow{x\to+\infty} 1$$

e che
$$\frac{\sqrt{e^x+1}+1}{\sqrt{e^x+1}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{e^x+1}-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$
abbiamo che
$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \sqrt{2}\,\lg(1) + \lg(1) = 0$$
Pertanto
$$\lim_{x\to+\infty} \left(G(x) - G(\lg 2)\right) = -K$$
ed in conclusione
$$\int_{\lg 2}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x-1}\,dx = -K \left[= \sqrt{2}\,\lg\left|\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}\right| + \lg\left|\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right|\right]$$

Ex 4] Risolvere il pb. di Cauchy
$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 3\,e^{3x} \\ y(0) = 0\ ;\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

L'eq. omogenea associata è $y'' - y' - 6y = 0$ il cui pol. caratteristico è $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$; le sol sono $\lambda = -2$ e $\lambda = +3$.
Tutte e sole le sol. dell'omogenea associata sono quindi
$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{+3x}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
Det. una sol particolare con il metodo di somiglianza, cerchiamo $\overline{y}(x) = C x e^{3x}$
$$\overline{y}'(x) = C e^{3x} + 3Cx e^{3x} = C e^{3x}(1+3x)$$
$$\overline{y}''(x) = 3C\,e^{3x}(1+3x) + 3C e^{3x} = 3C e^{3x}(2+3x)$$

Quindi $\overline{Y}(x)$ è sol di $y''-y'-6y=3e^{3x}$
se e solo se

$$3C_1e^{3x}(2+3x)-C_1e^{3x}(1+3x)-6C_1xe^{3x}=3e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1e^{3x}(6+9x-1-3x-6x)=3e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \quad C_1e^{3x}(5)=3e^{3x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5C=3 \quad \Leftrightarrow \quad C_1=3/5$$

Una sol. particolare è quindi $\overline{Y}(x)=\frac{3}{5}xe^{3x}$

Tutte le sol di $y''-y'-6y=3e^{3x}$ sono date da

$$\boxed{y(x)=c_1e^{-2x}+c_2e^{3x}+\frac{3}{5}xe^{3x}}$$

Determino c_1 c_2 per risolvere il pb. di Cauchy:

$$y'(x)=-2c_1e^{-2x}+3c_2e^{3x}+\frac{3}{5}e^{3x}+\frac{3}{5}x\cdot3e^{3x};$$

Quindi

$$\begin{cases} 0=y(0)=c_1+c_2+0 \\ 1=y'(0)=-2c_1+3c_2+3/5 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1=-c_2 \\ 1=2c_2+3c_2+3/5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1=-c_2 \\ 5c_2=+2/5 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1=-2/25 \\ c_2=+2/25 \end{cases}$$

L'unica sol del pb. di Cauchy assegnato è quindi

$$\boxed{y(x)=-\frac{2}{25}e^{-2x}+\frac{2}{25}e^{3x}+\frac{3}{5}xe^{3x}}$$

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 11 Settembre 2015 (Quarto appello, a.a. 2014-2015)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	7	7	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = -\frac{x}{2} + \log|x^2 + 2x - 3|$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Il segno non è richiesto; nello svolgimento è utile sapere che $f(1 + 2\sqrt{2}) = 1.0466\ldots > 0$ e che $f(1 - 2\sqrt{2}) = 2.1122\ldots > 0$.

Esercizio 2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\Big(\frac{2}{n^{3\alpha+1} + 3}\Big).$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\int \frac{\log x + 4}{x(\log x - 4)(1 + \log^2 x)}\, dx.$$

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy

$$y'(x) + \frac{5}{x} y(x) = \frac{1}{x^2(x^2 + 2)}; \quad y(1) = 0.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare il teorema del differenziale.

(5.b) Enunciare il teorema di Bolzano-Weierstraß.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 11 Settembre 2015 (Quarto appello, a.a. 2014-2015)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	7	7	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = x + 1 + \log|x^2 + 2x|$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. Il segno non è richiesto; nello svolgimento è utile sapere che $f(-2-\sqrt{2}) = -0.8396\ldots < 0$ e che $f(-2+\sqrt{2}) = 0.2259\ldots > 0$.

Esercizio 2. Al variare di $\alpha \geq -3/2$ studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(1 - \cos\Big(\frac{3}{n^{2\alpha+3}+2}\Big)\Big).$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\int \frac{e^x(e^x+2)}{(e^x-2)(1+e^{2x})}\,\mathrm{d}x.$$

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy

$$y'(x) + \frac{6}{x}y(x) = \frac{1}{x^3(x^2+3)}; \quad y(1) = 1.$$

Esercizio 5. (5.a) Sia a_n una successione di numeri reali. Dimostrare che se $\sum a_n$ è convergente allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

(5.b) Enunciare il teorema "ponte".

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica 1
Ing. Chimica e Materiali

Quarto Appello, 11/09/2015

File A

$\boxed{EX1}$ Studiare $f(x) = -\frac{x}{2} + \lg|x^2+2x-3|$

D_f : f è definita se e solo se $|x^2+2x-3| > 0$
$\iff x^2+2x-3 \neq 0$
$\iff x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$

f non è simmetrica né pari né dispari perché il D_f non è simmetrico rispetto a 0.

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{2} + \lg|x^2+2x-3| = \lim_{x\to+\infty} x\Big(-\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\lg|x^2+2x-3|}{x}}_{\to 0}\Big)$$
$$= -\infty \;\Big] \to \nexists \text{ minimi assoluti}$$

$$\lim_{x\to 1^+} -\frac{x}{2} + \underbrace{\lg|x^2+2x-3|}_{\to-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} -\frac{x}{2} + \underbrace{\lg|x^2+2x-3|}_{\to-\infty} = -\infty$$

$\to x = 1$ As. verticale

$$\lim_{x\to(-3)^+} -\frac{x}{2} + \underbrace{\lg|x^2+2x-3|}_{\to-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to(-3)^-} -\frac{x}{2} + \underbrace{\lg|x^2+2x-3|}_{\to-\infty} = -\infty$$

$\to x = -3$ As. verticale

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{x}{2} + \lg|x^2+2x-3| = \lim_{x\to-\infty} x\Big(-\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{\lg|x^2+2x-3|}{x}}_{\to 0}\Big)$$
$$= +\infty \to \nexists \text{ massimi assoluti}$$

$\nexists$ asintoti obliqui.

f è continua in D_f perché comp. di funzioni continue.
f è derivabile in D_f perché nei punti in cui $|x^2+2x-3| \neq 0$, $\lg|x^2+2x-3|$ è derivabile.

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2x+2}{x^2+2x-3} = \frac{-(x^2+2x-3)+4x+4}{2(x^2+2x-3)}$$

$$= \frac{-x^2+2x+7}{2(x^2+2x-3)} \quad \forall x \in D_f$$

$$f'(x)=0 \iff x^2-2x-7=0 \iff x=1+2\sqrt{2} \text{ o } x=1-2\sqrt{2}$$

$$-x^2+2x+7>0 \iff x\in(1-2\sqrt{2},\, 1+2\sqrt{2})$$
$$x^2+2x-3>0 \iff x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$$

Pertanto
$$f'(x)>0 \iff x\in(-3,\, 1-2\sqrt{2})\cup(1,\, 1+2\sqrt{2})$$
$$f'(x)<0 \iff x\in(-\infty,-3)\cup(1-2\sqrt{2},1)\cup(1+2\sqrt{2},+\infty)$$

I punti stazionari, ossia $1+2\sqrt{2}$ e $1-2\sqrt{2}$, sono

$1-2\sqrt{2}$ punto di massimo relativo

$1+2\sqrt{2}$ pto di massimo relativo

Usando il testo si ha
$$\begin{cases} f(1+2\sqrt{2}) \simeq 1.0466\ldots > 0 \\ f(1-2\sqrt{2}) \simeq 2.1122\ldots > 0 \end{cases}$$

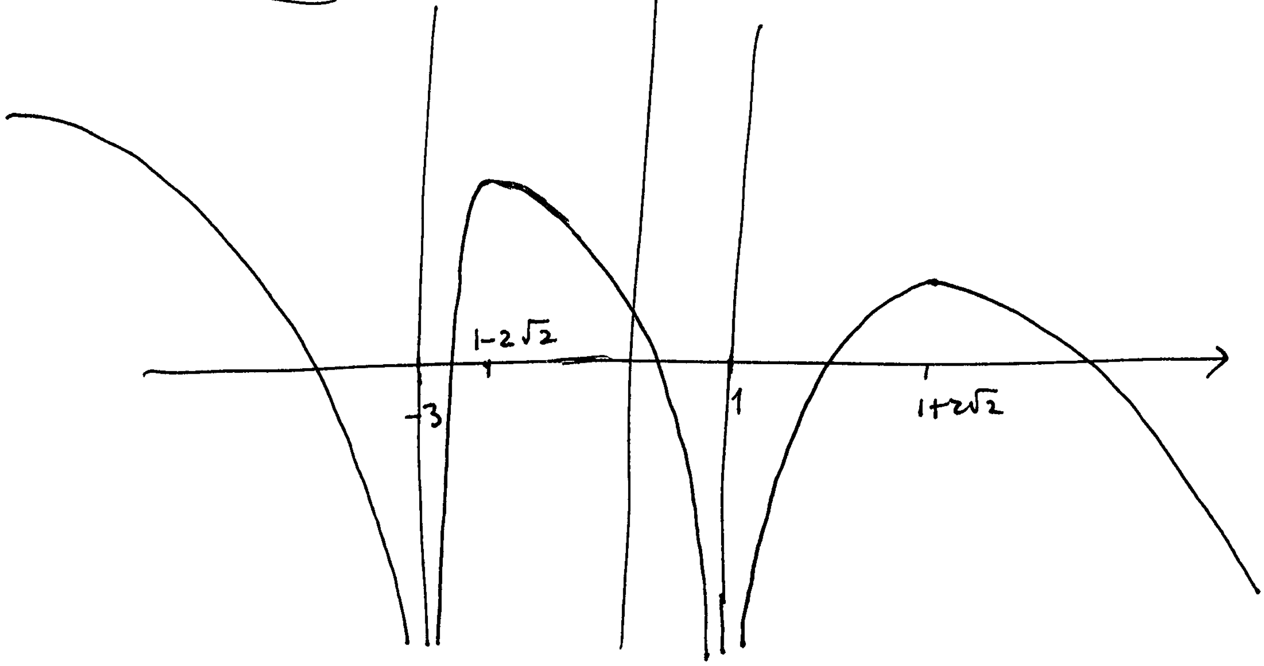
Convessità
$$f''(x) = \frac{(-2x+2)\,2(x^2+2x-3)-(-x^2+2x+7)(4x+4)}{4(x^2+2x-3)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-4x-10}{(x^2+2x-3)^2} < 0 \quad \forall x\in D_f$$

perché $2x^2+4x+10$ è privo di soluzioni reali.

Pertanto $f''(x)<0 \quad \forall x \in D_f$ e quindi f è concava in tutto il suo dominio

Andamento



EX 2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} atg\left(\frac{2}{n^{3\alpha+1}+3}\right)$$

Noto che per $3\alpha+1=0$ (ossia $\alpha=-1/3$) si ha che

$$a_n(\alpha) = a_n\left(-\frac{1}{3}\right) = atg\left(\frac{1}{2}\right) \not\to 0 \text{ per } n\to+\infty$$

Se $3\alpha+1<0$ $\left(\alpha<-\frac{1}{3}\right)$ allora $\frac{2}{\underbrace{n^{3\alpha+1}}_{\to 0}+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3}$

e quindi per la continuità di $atg(x)$, si ha che

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} atg\left(\frac{2}{3}\right) \neq 0$$

Pertanto per $\alpha \leq -1/3$ non vale la condizione necessaria di convergenza e quindi

$\sum a_n$ non converge.

Dato che $a_n \geq 0$ ~~$\forall n \in \mathbb{N}$~~ $\left(\frac{2}{n^{3\alpha+1}+3} > 0\right)$ posso dire che per $\alpha \leq -1/3$ $\sum a_n$ DIVERGE.

Sia adesso $\alpha > -\frac{1}{3}$. In tal caso $n^{3\alpha+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

e quindi $\frac{2}{n^{3\alpha+1}+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Utilizzando il $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{atg} x}{x} = 1$ possiamo dire che $(\alpha > -1/3)$

$$\sum \operatorname{atg}\left(\frac{2}{n^{3\alpha+1}+3}\right) \text{ converge} \Leftrightarrow \sum \frac{2}{n^{3\alpha+1}+3} \text{ converge}$$

grazie al criterio asintotico.

Ricordando che $\sum \frac{1}{n^\beta}$ converge $\Leftrightarrow \beta > 1$ e che $\frac{2}{n^{3\alpha+1}+3}$ ha lo stesso ordine di infinitesimo di $\frac{1}{n^{3\alpha+1}}$ $\left[\text{perché } \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2}{n^{3\alpha+1}+3}}{\frac{1}{n^{3\alpha+1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^{3\alpha+1}}{n^{3\alpha+1}+3} = 2\right]$

possiamo concludere che

$$\sum \operatorname{atg}\left(\frac{2}{n^{3\alpha+1}+3}\right) \text{ converge} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{n^{3\alpha+1}} \text{ converge}$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha + 1 > 1$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha > 0$$

In conclusione:

per $\alpha \leq 0$ $\quad \sum a_n$ diverge

per $\alpha > 0$ $\quad \sum a_n$ converge

Esercizio 3) Calcolare

$$\int \frac{\lg x + 4}{x(\lg x - 4)(1 + \lg^2 x)} dx = (*)$$

Uso la sostituzione $t = \lg x$ da cui $x = e^t = g(t)$

Per il teorema di integrazione per sostituzione si ottiene

$g'(t) = e^t$

$$(*) = \int \frac{t+4}{e^t(t-4)(1+t^2)} e^t dt \Big]_{t = \lg x}$$

$$= \int \frac{t+4}{(t-4)(t^2+1)} dt \Big]_{t = \lg x}$$

Ma $\dfrac{t+4}{(t-4)(t^2+1)} = \dfrac{t+4}{t-4} \dfrac{1}{t^2+1} = \dfrac{t-4+8}{t-4} \dfrac{1}{t^2+1}$

$$= \left(1 + \frac{8}{t-4}\right)\left(\frac{1}{t^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{t^2+1} + 8 \frac{1}{(t-4)(t^2+1)}$$

Cerco $A, B, C \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{1}{(t-4)(t^2+1)} = \frac{A}{t-4} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \quad \text{cioè}$$

$$A(t^2+1) + (t-4)(Bt+C) = 1$$

$$At^2 + A + Bt^2 - 4Bt + Ct - 4C = 1$$

$$t^2(A+B) + t(C-4B) + A - 4C = 1$$

e quindi
$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-4B=0 \\ A-4C=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B=-A \\ C=4B=-4A \\ A+16A=1 \end{cases}$$

ossia $\quad A = \frac{1}{17}; \quad B = -\frac{1}{17}; \quad C = \frac{-4}{17}$

Quindi
$$\frac{t+4}{(t-4)(t^2+1)} = \frac{1}{t^2+1} + \frac{8}{17}\frac{1}{t-4} - \frac{8}{17}\frac{t}{t^2+1} - \frac{32}{17}\frac{1}{t^2+1}$$

$$= -\frac{15}{17}\frac{1}{t^2+1} + \frac{8}{17}\frac{1}{t-4} - \frac{4}{17}\frac{2t}{t^2+1}$$

Allora
$$\int \frac{t+4}{(t-4)(t^2+1)}\,dt = -\frac{15}{17}\int\frac{dt}{t^2+1} + \frac{8}{17}\int\frac{dt}{t-4} - \frac{4}{17}\int\frac{2t}{t^2+1}$$

$$= -\frac{15}{17}\,\mathrm{atg}(t) + \frac{8}{17}\lg|t-4| - \frac{4}{17}\lg(t^2+1) + c;\ c\in\mathbb{R}.$$

Quindi
$$\int \frac{\lg x + 4}{x(\lg x - 4)(1+\lg^2 x)}\,dx = -\frac{15}{17}\,\mathrm{atg}(\lg x) +$$

$$+\frac{8}{17}\lg|\lg x - 4| +$$

$$-\frac{4}{17}\lg|\lg^2 x + 1| + c;$$

$$c\in\mathbb{R}$$

Esercizio 4) Risolvere $(x>0)$

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{5}{x} y(x) = \frac{1}{x^2(x^2+2)} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Siamo nel caso in cui l'eq. diff.le è del primo ordine e con coeff. continui; scrivendola

$$y'(x) = -\frac{5}{x} y(x) + \frac{1}{x^2(x^2+2)}$$

con cui $a(x) = -5/x$ e $b(x) = \frac{1}{x^2(x^2+2)}$.

Le sol. dell'eq. differenziale sono quindi

$$y(x) = e^{A(x)} \left[\int b(x) e^{-A(x)} dx + c \right]$$

dove $A(x) = \int -\frac{5}{x} dx = -5 \lg |x|$.

Così $y(x) = e^{-5 \lg |x|} \left[\int e^{5 \lg |x|} \frac{dx}{x^2(x^2+2)} + c \right]$

$$= \frac{1}{|x|^5} \left[\int \frac{|x|^5}{x^2(x^2+2)} dx + c \right]$$

$$\underset{(x>0)}{=} \frac{1}{x^5} \left[\int \frac{x^3}{x^2+2} dx + c \right]$$

Dato che $x^3 = x(x^2+2) - 2x$ si ottiene

$$\int \frac{x^3}{x^2+2} dx = \int x \, dx - \int \frac{2x}{x^2+2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \lg(x^2+2) + c$$

Pertanto

$$y(x) = \frac{c}{x^5} + \frac{1}{2x^3} - \frac{\lg(x^2+2)}{x^5} \; ; \; c \in \mathbb{R}.$$

Pongo

$$0 = y(1) = c + \frac{1}{2} - \frac{\lg(3)}{1}$$

da cui $\quad c = \lg(3) - 1/2.$

In conclusione

$$y(x) = \frac{\lg(3) - 1/2}{x^5} + \frac{1}{2x^3} - \frac{\lg(x^2+2)}{x^5}$$

è la sol del problema di Cauchy cercata