Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 29 Gennaio 2016 (Primo appello, a.a. 2015-2016)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = 2x - 1 + \log|x^2 - x|$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie. **NB:** non è richiesta la determinazione del segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Facoltativo: Determinare quante sono le soluzioni di $f(x) = 0$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{t+1}{(t^2+4)(t-2)}.$$

(2.a) Determinare tutte le primitive di $f(t)$.

(2.b) Determinare la convergenza di $\int_0^2 f(t)\,dt$.

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$ si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+x^2} - \sin x - 1}{x^{1/4}\,(x - \log(1+x))^{\alpha}}.$$

Esercizio 4. Per ogni $\alpha > 1$, determinare il carattere di convergenza di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n+2)^{4/3} - n^{4/3}}{n^{\alpha-1}}.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty$.

(5.b) Enunciare il teorema della media integrale.

Tempo: 3 ore.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 29 Gennaio 2016 (Primo appello, a.a. 2015-2016)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = 2x + 1 + \log|x^2 + x|$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie. **NB:** non è richiesta la determinazione del segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Facoltativo: Determinare quante sono le soluzioni di $f(x) = 0$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{t-1}{(t^2+1)(t+2)}.$$

(2.a) Determinare tutte le primitive di $f(t)$.

(2.b) Determinare la convergenza di $\int_{-2}^{0} f(t)\, \mathrm{d}t$.

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$ si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-x^2} - \sin x - 1}{x^{1/4}\,(x - \log(1+x))^{\alpha}}.$$

Esercizio 4. Per ogni $\alpha > 0$, determinare il carattere di convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^{1/3} - n^{1/3}}{(n+1)^{\alpha}}.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$.

(5.b) Enunciare la formula fondamentale del calcolo integrale.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 29 Gennaio 2016 (Primo appello, a.a. 2015-2016)

Cognome e nome:____ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = 3x + 1 + \log|2x^2 + x|$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie. **NB:** non è richiesta la determinazione del segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Facoltativo: Determinare quante sono le soluzioni di $f(x) = 0$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{t-1}{(t^2+2)(t+3)}.$$

(2.a) Determinare tutte le primitive di $f(t)$.

(2.b) Determinare la convergenza di $\int_{-3}^{0} f(t)\, dt$.

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$ si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x+x^2} - \sin x - 1}{x^{1/2}\ (x - \log(1+x))^\alpha}.$$

Esercizio 4. Per ogni $\alpha > 0$, determinare il carattere di convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^{1/4} - n^{1/4}}{(n+1)^{2\alpha}}.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \pi$.

(5.b) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 29 Gennaio 2016 (Primo appello, a.a. 2015-2016)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = 2x - 2 + \log|2x^2 - x|$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie. **NB:** non è richiesta la determinazione del segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Facoltativo: Determinare quante sono le soluzioni di $f(x) = 0$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(t) = \frac{t-2}{(t^2+1)(t-3)}.$$

(2.a) Determinare tutte le primitive di $f(t)$.

(2.b) Determinare la convergenza di $\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$ si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-x^2} - \sin x - 1}{x^{1/2}\,(x - \log(1+x))^\alpha}.$$

Esercizio 4. Per ogni $\alpha > 0$, determinare il carattere di convergenza di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n+2)^{2/3} - n^{2/3}}{(n-1)^{\alpha+1}}.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to\pi^-} f(x) = -\infty$.

(5.b) Enunciare il criterio integrale per la convergenza delle serie numeriche.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica Uno

Ing. Chimica e Materiali

29/01/2016

Risoluzione Fila B.

Esercizio 1. $f(x) = 2x+1+\lg|x^2+x|$

1a) D_f: $|x^2+x|>0 \iff x^2+x\neq 0 \iff x\neq 0;\ x\neq -1$

$\iff D_f = \cancel{\{x\in} (-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$

Dato che D_f non è simmetrico rispetto a 0, f non è simmetrica pari né dispari.

1b) $\lim_{x\to-\infty}\left(2x+1+\lg|x^2+x|\right) = \lim_{x\to+\infty} 2x\left(1+\underbrace{\frac{1}{2x}}_{\downarrow 0}+\underbrace{\frac{\lg|x^2+x|}{2x}}_{\downarrow 0}\right)$

$= -\infty$

$\lim_{x\to-1^-}\left(\underbrace{2x+1}_{\downarrow -1}+\underbrace{\lg|x^2+x|}_{\downarrow -\infty}\right) = -\infty$ $\Rightarrow \nexists$ minimi assoluti

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \underbrace{2x+1}_{\downarrow -1}+\underbrace{\lg|x^2+x|}_{\downarrow -\infty} = -\infty$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \underbrace{2x+1}_{\downarrow 1}+\underbrace{\lg|x^2+x|}_{\downarrow -\infty} = -\infty$

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \underbrace{2x+1}_{\downarrow 1}+\underbrace{\lg|x^2+x|}_{\downarrow -\infty} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(2x+1)}_{\downarrow +\infty}+\underbrace{\lg|x^2+x|}_{\downarrow +\infty} = +\infty$ $\Rightarrow \nexists$ massimi assoluti

Le rette $x=-1$, $x=0$ sono asintoti verticali.

Asintoti obliqui: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x}+\underbrace{\frac{\lg|x^2+x|}{x}}_{\downarrow 0} = 2$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to-\infty} 1+\lg|x^2+x| = +\infty$

pertanto $\nexists$ asintoto obliquo a $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\lg|x^2+x| = +\infty$

$\Rightarrow \nexists$ asintoto obliquo a $+\infty$.

1c) f è composizione di f continue love definite; quindi f è continua in $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

Inoltre $\lg|u|$ è derivabile $\forall u\neq 0 \Rightarrow \lg|x^2+x|$ è derivabile $\forall x\neq 0,-1$. Quindi $f(x)$ è derivabile in $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$ perché comp. di funzioni derivabili.

$$f'(x) = 2+\frac{1}{x^2+x}(2x+1) = \frac{2x^2+2x+2x+1}{x^2+x} = \frac{2x^2+4x+1}{x^2+x}$$

$$f'(x)=0 \iff 2x^2+4x+1=0 \iff x_1=\frac{-4+\sqrt{16-8}}{4};$$
$$x_2 = \frac{-4+\sqrt{8}}{4} \iff x_1 = -1+\tfrac{1}{2}\sqrt{2} ; \; x_2 = -1-\sqrt{2}/2$$

Segno di f'

$2x^2+4x+1$:	+	$-1-\frac{\sqrt2}{2}$	−		−	$-1+\frac{\sqrt2}{2}$	+	0	+
x^2+x	+		+	-1	−		−	0	+
	+	$-1-\frac{\sqrt2}{2}$	−	-1	+	$-1+\frac{\sqrt2}{2}$	−	0	+

f è stettamente crescente $\forall x\in(-\infty,-1-\frac{\sqrt2}{2})\cup(-1,-1+\frac{\sqrt2}{2})\cup(0,+\infty)$

f è stettamente decrescente $\forall x\in(-1-\frac{\sqrt2}{2},-1)\cup(-1+\frac{\sqrt2}{2},0)$

Inoltre $-1-\frac{\sqrt2}{2}$ è punto di massimo relativo

$-1+\frac{\sqrt2}{2}$ è punto di nassimo relativo

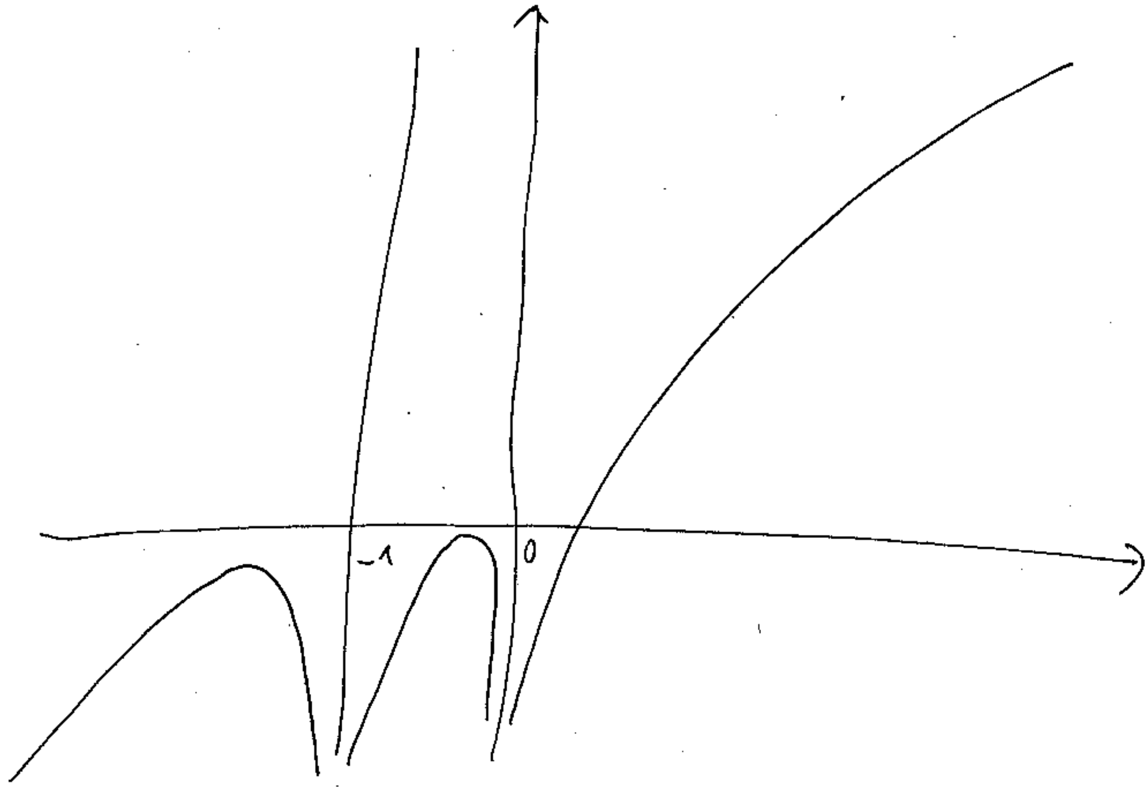
$$f(-1-\tfrac{\sqrt2}{2}) = -1-\sqrt2+\lg\left(\tfrac12+\tfrac{\sqrt2}{2}\right) < 0 \quad (-2.9598\ldots)$$
$$f(-1+\tfrac{\sqrt2}{2}) = -1+\sqrt2+\lg\left(-\tfrac12+\tfrac{\sqrt2}{2}\right) < 0 \quad (-1.1603\ldots)$$

1d) Convessità: f' è rapporto di polinomi; quindi $\forall x\in D_f$ si ha che esiste $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{(4x+4)(x^2+x)-(2x^2+4x+1)(2x+1)}{(x^2+x)^2} = \frac{-2x^2-2x-1}{(x^2+x)^2}$$

Osserviamo che $2x^2+2x+1$ ha $\Delta = 4-8<0$;
pertanto $f''(x)<0 \quad \forall x \in D_f$.
Cioè

f è CONCAVA in D_f.



Facoltativo $\quad D_f = I_1 \cup I_2 \cup I_3$, e in ogni I_j possiamo usare il teorema degli zeri. (f continua in D_f)

$x \in I_1$: dato che $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ e $f(\text{pto max relativo})<0$

abbiamo che $f(x)<0 \quad \forall x \in I_1$

$x \in I_2$: dato che $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ e

$f(\text{pto max relativo}) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)<0 \quad \forall x \in I_2$

$x \in I_3$: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \exists\, \delta>0$ t.c. $f(x)<0 \quad \forall x \in (0,\delta)$

Sia $x_1 = \delta/2$. Dato che $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \exists\, M>0$ t.c.

$f(x)>0 \quad \forall x > M$. Sia $x_2 = M+1$.
Applico il teorema degli zeri a $[x_1, x_2]$; siccome

f è continua in $[x_1, x_2]$ e $f(x_1)\,f(x_2) < 0$
$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in (x_1, x_2)$ t.c. $f(\bar{x}) = 0$.

Inoltre, ricordando che f è strettamente crescente $\forall x \in I_3$, possiamo anche concludere che tale $\bar{x}$ è UNICO.

In conclusione, l'equazione $f(x)=0$ ha UNICA soluzione $\bar{x}$ (e sappiamo che $\bar{x} > 0$) in D_f.

Esercizio 2

2a) $$\int \frac{t-1}{(t^2+1)(t+2)}\,dt$$ È una int. di funzioni razionali.

Det. $A, B, C \in \mathbb{R}$ / $$\frac{t-1}{(t^2+1)(t+2)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C}{t+2}$$

ossia
$$\begin{aligned} t-1 &= (At+B)(t+2) + C(t^2+1) \\ &= At^2 + Bt + 2At + 2B + Ct^2 + C \\ &= t^2(A+C) + t(B+2A) + 2B + C \end{aligned}$$

Quindi
$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+2A=1 \\ 2B+C=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} C=-A \\ B=1-2A \\ 2-4A-A=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} C=-A \\ B=1-2A \\ -5A=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=-3/5 \\ B=1-6/5 = -1/5 \\ A=3/5 \end{cases}$$

Pertanto
$$\int \frac{t-1}{(t^2+1)(t+2)}\,dt = \int \left(\frac{3}{5}t - \frac{1}{5}\right)\Big/(t^2+1)\,dt + \int \frac{-3/5}{t+2}\,dt$$

$$= -\frac{3}{5}\lg|t+2| + \frac{3}{5}\int \frac{t}{t^2+1}\,dt - \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= -\frac{3}{5}\lg|t+2| - \frac{1}{5}\operatorname{atg}(t) + \frac{3}{10}\lg|t^2+1| + c;\ c \in \mathbb{R}$$

2b) Dobbiamo capire l'ordine di infinito in -2 di $f(t)$

./.

Osserviamo che $(\alpha > 0)$

$$\lim_{t\to -2} \frac{|f(t)|}{|t+2|^{-\alpha}} = \lim_{t\to -2} \frac{|t-1|\,|t+2|^{\alpha}}{(t^2+1)\,|t+2|}$$

$$= \lim_{t\to -2} \frac{|t-1|}{t^2+1}\, |t+2|^{\alpha-1} = \begin{cases} +\infty & 0<\alpha<1 \\ 3/5 & \alpha=1 \\ 0 & \alpha>1 \end{cases}$$

Pertanto $\lim_{t\to -2} |f(t)| = +\infty$ di ordine $\alpha = 1$.

Grazie al teorema dell'ordine di infinito,

$$\int_{-2}^{0} f(t)\,dt \quad \text{DIVERGE.}$$

Esercizio 3

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{e^{x-x^2} - \sin x - 1}^{\to 0}}{\underbrace{x^{1/4}\,(x - \lg(1+x))^{\alpha}}_{\to 0}} \qquad \alpha > 0$$

Conviene determinare l'ordine di infinitesimo del numeratore.

Siccome $e^y = 1 + y + y^2/2 + o(y^2)$ per $y \to 0^+$, si ha che

$$e^{x-x^2} = 1 + (x-x^2) + \tfrac{1}{2}(x-x^2)^2 + o((x-x^2)^2)$$

$$= 1 + x - x^2 + \tfrac{1}{2}(x^2+x^4-2x^3) + o(x^2)$$

$$= 1 + x - x^2 + \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x\to 0^+$$

Inoltre $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ per $x \to 0^+$.

Quindi

$$\text{NUM} = 1 + x - x^2/2 + o(x^2) - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - 1$$

$$= -x^2/2 + o(x^2)$$

Ossia il numeratore è un infinitesimo di ordine 2 per $x \to 0^+$.

Considero adesso il denominatore.

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Quindi $x - \lg(1+x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0^+$; di conseguenza

$$(x - \lg(1+x))^\alpha = \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^\alpha$$
$$= \left(\frac{x^2}{2}\right)^\alpha \left(1 + o(1)\right)^\alpha$$
$$= \frac{x^{2\alpha}}{2^\alpha}\,(1 + o(1)) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Quindi

$$\text{DENOM} = \frac{x^{2\alpha + 1/4}}{2^\alpha}\,(1 + o(1)) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Abbiamo allora che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x - x^2} - \sin x - 1}{x^{1/4}\,(x - \lg(1+x))^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2/2 + o(x^2)}{\frac{x^{2\alpha + 1/4}}{2^\alpha} + o(x^{2\alpha + 1/4})}$$

che, grazie al principio di sostituzione degli infinitesimi, è uguale a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2/2}{\frac{x^{2\alpha + 1/4}}{2^\alpha}} = (-2^{\alpha - 1}) \lim_{x \to 0^+} x^{2 - 2\alpha - 1/4}$$
$$= -2^{\alpha - 1} \lim_{x \to 0^+} x^{7/4 - 2\alpha} = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < 7/8 \\ -2^{-1/8} & \alpha = 7/8 \\ -\infty & \alpha > 7/8 \end{cases}$$

Da cui segue

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x - x^2} - \sin x - 1}{x^{1/4}\,(x - \lg(1+x))^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \in (0, 7/8) \\ -2^{-1/8} & \text{se } \alpha = 7/8 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 7/8 \, . \end{cases}$$

<u>Esercizio 4</u>

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^{1/3} - n^{1/3}}{(n+1)^\alpha} \; ; \; \alpha > 0$$

Osserviamo che $a_n \geq 0 \ \forall n$.

Inoltre $(n+1)^{1/3} - n^{1/3} = n^{1/3}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/3} - 1\right)$

$$= n^{1/3}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3} - 1\right)$$

Usando lo sviluppo di $(1+x)^\alpha$ per $x_0 = 0$ ho che

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad \text{per } x \to 0 \quad \text{e quindi}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Quindi $(n+1)^{1/3} - n^{1/3} = n^{1/3}\left(\frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ per $n \to +\infty$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{1}{n^{2/3}} + o\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) \quad \text{per } n \to +\infty$$

ossia $(n+1)^{1/3} - n^{1/3}$ è infinitesimo di ordine $2/3$ per $n \to +\infty$.

Quindi $a_n = \frac{(n+1)^{1/3} - n^{1/3}}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(n+1)^\alpha n^{2/3}}\left(1 + o(1)\right)$ per $n \to +\infty$

ossia $a_n (\geq 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ di ordine $\alpha + 2/3$.

Per il criterio dell'ordine di infinitesimo per le serie a coefficienti non negativi, abbiamo che

$$\sum a_n \text{ converge} \iff \alpha + 2/3 > 1$$

$$\iff \alpha > 1/3.$$

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 19 Febbraio 2016 (Secondo appello, a.a. 2015-2016)

Cognome e nome:________________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
7	8	7	10	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, il suo segno, le sue eventuali simmetrie.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Facoltativo: Determinare quante sono le soluzioni di $f(x) = 0$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $\alpha > 0$ si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\arctan(\sqrt{|x-2|})}{|x-2|^\alpha}.$$

(2.a) Determinare per quali $\alpha > 0$ converge $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2.b) Determinare per quali $\alpha > 0$ converge $\int_3^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$ si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x - x^\alpha}{\log(1+\sqrt{2x}) - \sin(\sqrt{2x})}.$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) + \frac{3}{x}y(x) = \frac{2x}{x^2+2}.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare che se f è derivabile nel suo dominio D_f e $f'(x) < 0$ per ogni $x \in D_f$ allora f è strettamente decrescente in D_f.

(5.b) Enunciare il criterio del rapporto per le serie numeriche.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 19 Febbraio 2016 (Secondo appello, a.a. 2015-2016)

Cognome e nome:________________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
7	8	7	10	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arctan\Big(\dfrac{x-2}{x+4}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, il suo segno, le sue eventuali simmetrie.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Facoltativo: Determinare quante sono le soluzioni di $f(x) = 0$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $\alpha > 0$ si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(\sqrt{|x-1|})}{|x-1|^\alpha}.$$

(2.a) Determinare per quali $\alpha > 0$ converge $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2.b) Determinare per quali $\alpha > 0$ converge $\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$ si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x) - x^\alpha}{\exp(\sqrt{2x}) - \sin(\sqrt{2x}) - 1}.$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{2x}{x^2-2}.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare che se f è derivabile nel suo dominio D_f e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in D_f$ allora f è strettamente crescente in D_f.

(5.b) Enunciare il criterio dell'ordine di infinitesimo per la convergenza degli integrali impropri su intervalli $[a, +\infty)$

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 19 Febbraio 2016 (Secondo appello, a.a. 2015-2016)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
7	8	7	10	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arctan\Big(\dfrac{x+2}{x-3}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, il suo segno, le sue eventuali simmetrie.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Facoltativo: Determinare quante sono le soluzioni di $f(x) = 0$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $\alpha > 0$ si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\exp(\sqrt{|x-3|}) - 1}{|x-3|^{\alpha}}.$$

(2.a) Determinare per quali $\alpha > 0$ converge $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2.b) Determinare per quali $\alpha > 0$ converge $\int_4^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$ si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+2x) - 2x^{\alpha}}{1 - \cos(2\sqrt{x}) - \sin(2x)}.$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = \frac{2x}{x^2+2}.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare che se f è debolmente decrescente e derivabile nel suo dominio D_f, allora $f'(x) \le 0$ per ogni $x \in D_f$.

(5.b) Enunciare il teorema dei valori intermedi.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 19 Febbraio 2016 (Secondo appello, a.a. 2015-2016)

Cognome e nome:________________________________ Matricola:________________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
7	8	7	10	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x+1}{x+4}\right)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, il suo segno, le sue eventuali simmetrie.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare gli intervalli di convessità e gli eventuali punti di flesso. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Facoltativo: Determinare quante sono le soluzioni di $f(x) = 0$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $\alpha > 0$ si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 + \sqrt{|x+1|})}{|x+1|^\alpha}.$$

(2.a) Determinare per quali $\alpha > 0$ converge $\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2.b) Determinare per quali $\alpha > 0$ converge $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 3. Per ogni $\alpha > 0$ si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos x - x^\alpha}{\exp(\sqrt{3x}) - \sin(\sqrt{3x}) - 1}.$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) + \frac{3}{x}y(x) = \frac{2x}{x^2-2}.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare che se f è debolmente crescente e derivabile nel suo dominio D_f, allora $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in D_f$.

(5.b) Enunciare il criterio di Leibniz per la convergenza delle serie a segni alterni.

Tempo: 3 ore.
Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Esame di Analisi Matematica Uno

19/01/2016

Fila A

Esercizio 1

$$f(x) = \operatorname{atg}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$$

1a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; $f(x) \geq 0 \iff \frac{x-1}{x+3} \geq 0$

$$\iff \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1 < 0 \\ x+3 < 0 \end{cases} \iff x \in (-\infty,-3) \cup [1,+\infty)$$

Inoltre $f(x) = 0 \iff x = 1$.

f non è né pari né dispari perché D_f non simmetrico rispetto allo 0.

1b) $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{atg}\Big(\underbrace{\frac{x-1}{x+3}}_{\to 1}\Big) = \operatorname{atg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to-3^-} \operatorname{atg}\Big(\underbrace{\frac{\overset{\to -4}{x-1}}{x+3}}_{\downarrow 0^-}\Big) = \lim_{u\to+\infty} \operatorname{atg}(u) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-3^+} \operatorname{atg}\Big(\frac{\overset{\to -4}{x-1}}{\underbrace{x+3}_{\to 0^+}}\Big) = \lim_{u\to-\infty} \operatorname{atg}(u) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{atg}\Big(\underbrace{\frac{x-1}{x+3}}_{\to 1}\Big) = \pi/4$$

pertanto la retta $y = \pi/4$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$.

Non esistono asintoti obliqui e verticali.

1c) f è composizione di funzioni derivabili in D_f.

Pertanto f è derivabile (e quindi continua) in D_f

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2} \, \frac{(x+3)-(x-1)}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2+(x-1)^2} > 0 \quad \forall x \in D_f$$

Pertanto f è strettamente crescente dove definita. 2

Non esistono punti di max/min locali. f non ammette massimo/minimo assoluto perché $\inf f(x) = -\pi/2$ e $\sup f(x) = \pi/2$ ma $\nexists\, x_0, x_1$ t.c. $f(x_0) = -\frac{\pi}{2}$ e $f(x_1) = \pi/2$.

1d) f' è composto di funzioni derivabili. Quindi $\exists\, f''(x)$ $\forall x \in D_f$.

$$f''(x) = \frac{-4\left[2(x+3)+2(x-1)\right]}{\left[(x+3)^2+(x-1)^2\right]^2} = -4\,\frac{4x+4}{\left[(x+3)^2+(x-1)^2\right]^2}$$

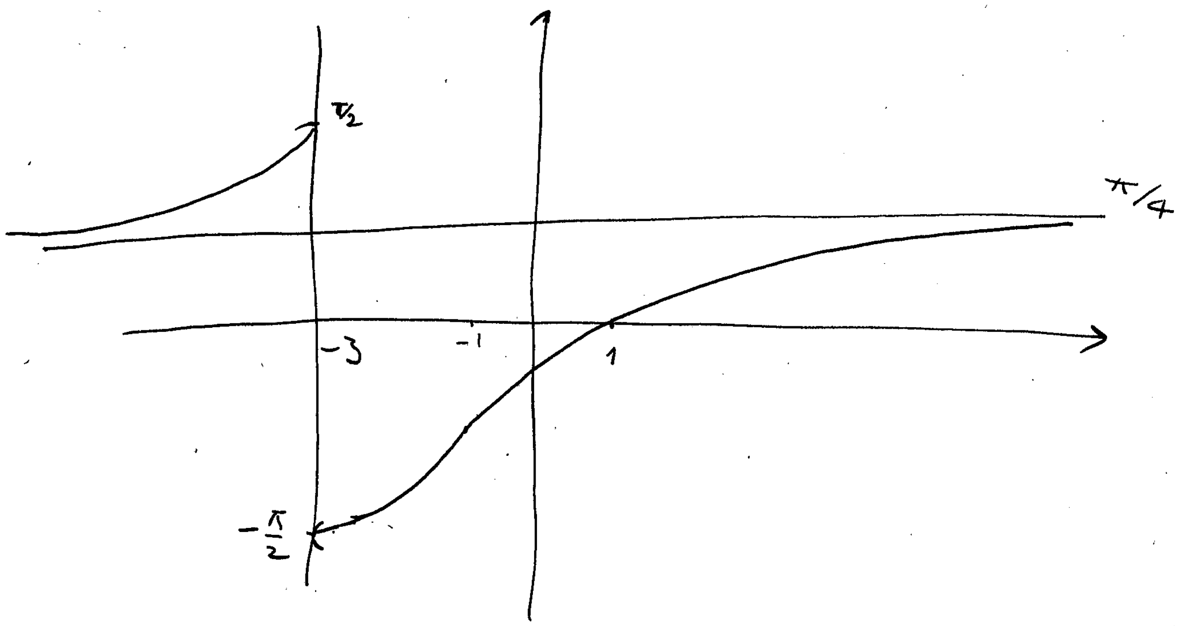
$$= -16\,\frac{x+1}{\underbrace{\left[(x+3)^2+(x-1)^2\right]^2}_{>0\ \forall x \in D_f}}$$

Pertanto f è convessa $\iff \begin{cases} x+1<0 \\ x \in D_f \end{cases} \iff x \in (-\infty,-3)\cup(-3,-1)$

f è concava $\iff \begin{cases} x+1>0 \\ x \in D_f \end{cases} \iff x \in (-1,+\infty)$

$f''(-1) = 0$ e pertanto -1 è punto di flesso

Inoltre $f(-1)<0$



Esercizio 2

$$f(x) = \frac{\operatorname{atg}\left(\sqrt{|x-2|}\right)}{|x-2|^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

f è definita per $x \neq 2$.

2a) l'integrale tra 0 e 2 può essere improprio in 2; studio l'ordine di infinito di f in 2 da sinistra

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \underbrace{\frac{\operatorname{atg}\left(\sqrt{|x-2|}\right)}{\sqrt{|x-2|}}}_{\to 1 \text{ (limite notevole)}} \frac{\sqrt{|x-2|}}{|x-2|^\alpha} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} |x-2|^{1/2-\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha \in (0, 1/2) \\ 1 & \alpha = 1/2 \\ +\infty & \alpha > 1/2 \end{cases}$$

Quindi se $\alpha \in (0, 1/2]$, l'integrale in questione non è improprio in 2; ossia è un integrale definito. Pertanto converge per $\alpha \in (0, 1/2]$.

Se $\alpha > 1/2$ il calcolo del limite precedente fa anche vedere che f è infinita di ordine $\alpha - 1/2$ in 2 da sinistra. Il criterio dell'ordine di infinito richiede che

$$\alpha - 1/2 \in (0, 1) \quad \text{ossia}$$

$$0 < \alpha - 1/2 < 1 \iff 1/2 < \alpha < 3/2$$

affinché l'integrale converga.

In conclusione $\int_0^2 f(x)\,dx$ converge $\iff \alpha \in (0, \frac{3}{2})$.

2b) In questo caso è necessario capire l'ordine di infinitesimo a $+\infty$ di $f(x)$. Dato che $\operatorname{atg}(\sqrt{|x-2|})$ è, per $x > 100$, sicuramente limitata da $\pi/2$, si può osservare che $f(x) \xrightarrow[\text{per } x\to+\infty]{} 0$ di ordine α.

Alternativamente possiamo osservare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1/x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{(x-2)^\alpha}\, \mathrm{atg}(\sqrt{x-2})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{x}{x-2}\right)^\alpha}_{\downarrow 1} \underbrace{\mathrm{atg}(\sqrt{x-2})}_{\downarrow \pi/2} = \pi/2$$

ossia che $f(x) \to 0$ per $x\to+\infty$ di ordine α.

Il criterio dell'ordine di infinitesimo ci assicura quindi che
$$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge} \iff \alpha > 1.$$

Esercizio 3 Per ogni $\alpha>0$ si calcoli:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1-\cos x - x^\alpha}{\lg(1+\sqrt{2x}) - \sin(\sqrt{2x})} \quad ; \alpha>0.$$

Sia il numeratore che il denominatore tendono a 0 per $x\to0$.
Usando la f. di Taylor centrata in 0 si ha che il denominatore è dato da:

$$\lg(1+\sqrt{2x}) = \sqrt{2x} - \frac{(\sqrt{2x})^2}{2} + \frac{(\sqrt{2x})^3}{3} + o(x^{3/2})$$
$$= \sqrt{2x} - x + \frac{2^{3/2}}{3}x^{3/2} + o(x^{3/2}) \quad \text{per } x\to0^+$$

$$\sin(\sqrt{2x}) = \sqrt{2x} - \frac{(\sqrt{2x})^3}{6} + o(x^{3/2}) \quad \text{per } x\to0^+$$

Quindi

$$\text{DENOM} = \sqrt{2x} - x + \frac{2^{3/2}}{3}x^{3/2} + o(x^{3/2}) - \sqrt{2x} + \frac{2^{3/2}}{6}x^{3/2}$$

$$= -x + o(x) \quad \text{per } x\to0^+$$

ossia il denominatore è infinitesimo di ordine 1 per $x\to0^+$

Ricordando che $1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x\to0^+$

abbiamo che

$$\text{NUMERATORE} = \frac{x^2}{2} - x^\alpha + o(x^2)$$

ossia il NUM $\to 0$ di ordine $\begin{cases} \alpha & \text{se } \alpha \in (0,2) \\ 2 & \text{se } \alpha \geq 2 \end{cases}$.

Pertanto il limite richiesto si riconduce a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2/2 - x^\alpha + o(x^2)}{-x + o(x)} = \begin{cases} +\infty & \alpha \in (0,1) \\ 1 & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha \in (1,2) \\ 0 & \alpha \geq 2 \end{cases}$$

Esercizio 4 Risolvere

$$y'(x) + \frac{3}{x} y(x) = \frac{2x}{x^2+2}$$

E' una eq. differenziale del 1° ordine a coefficienti continui definiti su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$a(x) = -3/x$; $b(x) = \frac{2x}{x^2+2}$.

La formula risolutiva dice che, posto $A(x) = -3 \lg |x|$,

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\, dx$$

$$= e^{-3 \lg |x|} \cdot \int e^{+3 \lg |x|} \cdot \frac{2x}{x^2+2}\, dx$$

$$= |x|^{-3} \cdot \int \frac{2x\,|x|^3}{x^2+2}\, dx$$ in un intervallo $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sia $I = (0, +\infty)$; allora

$$y(x) = x^{-3} \int \frac{2x^4}{x^2+2}\, dx.$$

Dobbiamo quindi determinare tutte le primitive di

$$\frac{x^4}{x^2+2}$$

Siccome
$$\frac{x^4}{x^2+2} = \frac{x^2(x^2+2)-2x^2}{x^2+2}$$
$$= x^2 - \frac{2x^2}{x^2+2}$$
$$= x^2 - 2\,\frac{x^2+2-2}{x^2+2}$$
$$= x^2 - 2 + 4\,\frac{1}{x^2+2}$$

otteniamo che
$$\int \frac{x^4}{x^2+2}\,dx = \int (x^2-2)\,dx + 4\int \frac{dx}{x^2+2}$$
$$= \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{4}{2}\int \frac{dx}{(x^2/2)+1}\Big]_{u=x/\sqrt{2}}$$
$$= \frac{x^3}{3} - 2x + 2\int \frac{\sqrt{2}\,du}{u^2+1}\Big]_{u=x/\sqrt{2}} \qquad \sqrt{2}\,u = x$$
$$= \frac{x^3}{3} - 2x + 2\sqrt{2}\,\mathrm{atg}\left(x/\sqrt{2}\right) + c\,;\ c\in\mathbb{R}$$

In conclusione tutte e sole le soluzioni dell'eq. diff.le data sono, per $x>0$, date da
$$y(x) = 2x^{-3}\left[\frac{x^3}{3} - 2x + 2\sqrt{2}\,\mathrm{atg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c\right]$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{4}{x^2} + \frac{4\sqrt{2}}{x^3}\,\mathrm{atg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{c}{x^3}\ ;\ c\in\mathbb{R}$$

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 14 Luglio 2016 (Terzo appello, a.a. 2015-2016)

Cognome e nome:______________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arctan\Big(\dfrac{2x+2}{x-1}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{2x^4}} - \sin\frac{1}{2x^4} + e^{-x}}{\log(1+\frac{1}{x^2}) - \sin\frac{1}{x^2}}$$

Esercizio 3. Studiare per quali $\alpha \geq 0$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{x}{(\pi - x^2)^\alpha}\mathrm{d}x,$$

e calcolarlo per $\alpha = 1/3$.

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x; \quad y(0) = 1/2; \quad y'(0) = 1.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare il teorema della media integrale.

(5.b) Enunciare la condizione necessaria di primo ordine per punti estremali.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 14 Luglio 2016 (Terzo appello, a.a. 2015-2016)

Cognome e nome:______________________ Matricola:__________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arctan\Big(\dfrac{2x-2}{x+1}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{2x^2} + e^{-x}}{\log(1+\frac{1}{x^2}) - \arctan\frac{1}{x^2}}$$

Esercizio 3. Studiare per quali $\alpha \geq 0$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{\sqrt{e}} \frac{x}{(e-x^2)^\alpha}\mathrm{d}x,$$

e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{-x}; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1/2.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare che se f è Riemann-integrabile in $[a,b]$, dato $x_0 \in [a,b]$, allora $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ è continua in $[a,b]$.

(5.b) Enunciare teorema di Lagrange.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Risol. File B 14/07/2016

Esercizio 1

$$f(x) = \operatorname{atg}\left(\frac{2x-2}{x+1}\right)$$

1a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Dato che il D_f non è simmetrico rispetto a 0, f non è né pari né dispari.

Inoltre $f(x) > 0 \iff \begin{cases} \frac{2x-2}{x+1} > 0 \\ x \in D_f \end{cases} \iff \begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1<0 \\ x+1<0 \end{cases}$

ossia $(1,+\infty) \cup (-\infty,-1)$.

$f(x) < 0 \iff x \in (-1,1)$; $f(x) = 0 \iff x = 1$.

1b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{atg}\Big(\underbrace{\frac{2x-2}{x+1}}_{\to 2}\Big) = \operatorname{atg}(2) > 0$

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \operatorname{atg}\left(\frac{\overbrace{2x-2}^{\to -4}}{\underbrace{x+1}_{\to 0^-}}\right) = \lim_{u\to+\infty} \operatorname{atg}(u) = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} \operatorname{atg}\left(\frac{\overbrace{2x-2}^{\to -4}}{\underbrace{x+1}_{\to 0^+}}\right) = \lim_{u\to-\infty} \operatorname{atg}(u) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{atg}\left(\frac{2x-2}{x+1}\right) = \operatorname{atg}(2) > 0$

La retta $y = \operatorname{atg}(2)$ è asintoto orizzontale sia a $+\infty$ che a $-\infty$.
Non esistono asintoti obliqui né verticali.

1c) f è composizione di f. derivabili in D_f. Pertanto è derivabile (e quindi anche continua) dove definita.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{2x-2}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{2(x+1)-(2x-2)}{(x+1)^2} = \frac{4}{\underbrace{(x+1)^2+(2x-2)^2}_{>0\ \forall x\in D_f}} > 0$$

Pertanto f è strettamente crescente dove definita.
Inoltre f non ammette punti di massimo o minimo relativo.
Osservo che $\inf f = -\frac{\pi}{2}$ e $\sup f = \frac{\pi}{2}$ (f è una arctg) ma che $\nexists\ x_0, x_1 \mid f(x_0) = -\pi/2$ e $f(x_1) = \frac{\pi}{2}$.
Pertanto f non ammette massimi e minimi assoluti

1d) f' è una f derivabile in D_f essendo rapporto di f- derivabili.

$$f''(x) = \left(4\left[(x+1)^2+(2x-2)^2\right]^{-1}\right)' = -4\left[(x+1)^2+(2x-2)^2\right]^{-2}\left[2(x+1)+4(2x-2)\right]$$

$$= \frac{-8\,(2x+2+8x-8)}{(x+1)^2+(2x-2)^2} = \frac{-8\,(10x-6)}{\underbrace{(x+1)^2+(2x-2)^2}_{>0\ \forall x\in D_f}}$$

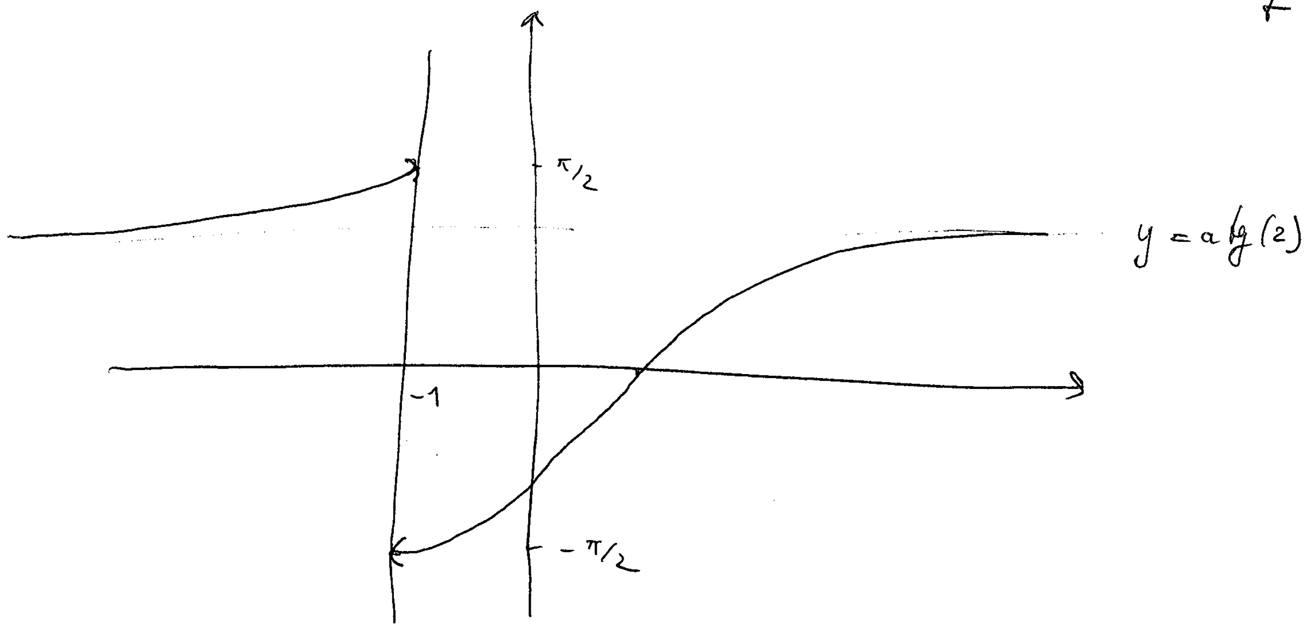
Pertanto $f''(x)=0 \iff x = 3/5$ è pto di flesso

$f''(x)>0 \iff \begin{cases}10x-6<0\\ x\in D_f\end{cases} \iff \begin{cases}x<3/5\\ x\in D_f\end{cases} \iff x\in(-\infty,-1)\cup(-1,3/5)$

e f è convessa in $(-\infty,-1)\cup(-1,3/5)$

Inoltre f è concava in $(3/5,+\infty)$

Osservo che $3/5<1 \Rightarrow f(3/5)<f(1)=0$ perché f strett. crescente in D_f



EX 2 | Osservo che per $x \to +\infty$, posto $t = 1/x$ si ha che $t \to 0^+$. Il limite richiesto pertanto è uguale a 3

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1 - \cos(t) - \sin\left(\frac{t^2}{2}\right) + e^{-1/t}}{\lg(1+t^2) - \operatorname{atg}(t^2)}$$

Usando la f. di Taylor con resto di Peano abbiamo che

$$1 - \cos(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} + o(t^5) \quad \text{per } t \to 0^+$$

$$\sin(t^2/2) = t^2/2 - \left(\frac{t^2}{2}\right)^3 \frac{1}{3!} + o((t^2)^4)$$

$$= t^2/2 - \frac{t^6}{12} + o(t^8) \quad \text{per } t \to 0^+$$

Quindi, ricordando che $e^{-1/t} = o(t^8)$ per $t \to 0^+$, abbiamo che

$$NUM = -\frac{t^4}{24} + o(t^5) \quad \text{per } t \to 0^+.$$

Consideriamo il denominatore

$$\lg(1+t^2) = t^2 - \frac{(t^2)^2}{2} + o(t^4) \quad \text{per } t \to 0^+$$

$$\operatorname{atg}(t^2) = t^2 - \frac{(t^2)^3}{3} + o((t^2)^4) \quad \text{per } t \to 0^+$$

$$= t^2 - \frac{t^6}{3} + o(t^8)$$

Quindi

$$DENOM = -\frac{t^4}{2} + o(t^4) \quad \text{per } t \to 0^+$$

Pertanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{2x^2}\right) + e^{-x}}{\lg(1 + 1/x^2) - \operatorname{atg}(1/x^2)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1 - \cos(t) - \sin(t^2/2) + e^{-1/t}}{\lg(1+t^2) - \operatorname{atg}(t^2)}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{-\frac{t^4}{24} + o(t^5)}{-\frac{t^4}{2} + o(t^4)} \underset{\uparrow}{=} \lim_{t \to 0^+} \frac{-t^4/24}{-t^4/2} = \frac{1}{12}$$

Principio SOST. INFINITESIMI

Esercizio 3 L'integrale $\int_0^{\sqrt{e}} \frac{x}{(e-x^2)^\alpha}\,dx$

è improprio in $\sqrt{e}$ se $\alpha > 0$. Se $\alpha = 0$ è un integrale definito.

Dato che $e - x^2 = (\sqrt{e}-x)(\sqrt{e}+x)$ abbiamo che l'integranda è una funzione infinita in $\sqrt{e}$ di ordine α.

Quindi l'integrale converge in $\sqrt{e}$ per $0<\alpha<1$.

In conclusione l'integrale converge $\iff \alpha \in [0,1)$.

Sia $\alpha = 1/2$. Calcolo $\int \frac{x}{(e-x^2)^{1/2}}\,dx$; siccome l'integranda è $\frac{1}{2}\frac{2x}{(e-x^2)^{1/2}} = -\left(\sqrt{e-x^2}\right)'$ abbiamo che

$$\int \frac{x}{(e-x^2)^{1/2}}\,dx = -\sqrt{e-x^2} + c \,;\quad c \in \mathbb{R}$$

Sia $F(x) = -\sqrt{e-x^2}$. L'integrale improprio richiesto è

$$\lim_{u\to(\sqrt{e})^-} \int_0^u \frac{x}{(e-x^2)^{1/2}}\,dx = \lim_{u\to(\sqrt{e})^-} \left(F(u) - F(0)\right)$$

$$= \lim_{u\to(\sqrt{e})^-} F(u) - (-\sqrt{e})$$

$$= \lim_{u\to(\sqrt{e})^-} \left(-\underbrace{\sqrt{e-u^2}}_{\downarrow 0}\right) + \sqrt{e} = \sqrt{e}$$

Esercizio 4 Risolvere $\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1/2 . \end{cases}$

Considero $y''+2y'+y = 0$. È eq. diff.^{le} del secondo ordine a coefficienti costanti; il polinomio caratteristico è $\lambda^2+2\lambda+1 = (\lambda+1)^2$. Pertanto la soluzione è -1 contata due volte.

Le sol. dell'eq. omogenea sono pertanto

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \,;\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Considero l'eq. non omogenea: il termine noto è e^{-x}; pertanto va valutato (usando il metodo di somiglianza) se -1 è soluzione di $p(\lambda)=0$. Sappiamo che -1 è sol. di $p(\lambda)=0$ con molteplicità 2; pertanto le sol. particolari dell'eq. non omogenea deve essere del tipo $\bar{y}(x) = k x^2 e^{-x}$, con $k \in \mathbb{R}$ da determinare.

$$\bar{y}'(x) = 2kxe^{-x} - kx^2e^{-x} \quad ; \quad \bar{y}''(x) = 2ke^{-x} - 2kxe^{-x} + - 2kxe^{-x} + kx^2e^{-x}$$

cioè $\bar{y}'(x) = kxe^{-x}(2-x)$; $\bar{y}''(x) = ke^{-x}(2-4x+x^2)$

Inserendo $\bar{y}(x)$ nell'eq. si ha che

$$ke^{-x}(2-4x+x^2) + 2kxe^{-x}(2-x) + kx^2e^{-x} = e^{-x}$$

e pertanto

$$k(2-\cancel{4x}+\cancel{x^2}+\cancel{4x}-2x^2+\cancel{x^2}) = 1$$

$$\iff \quad 2k = 1 \quad \iff \quad k = 1/2 .$$

Quindi $\bar{y}(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$.

Di conseguenza tutte e sole le sol. dell'eq. diff^{le} non omogenea sono

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x} \ ; \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Risolviamo il pb. di Cauchy:

$$y'(x) = -c_1e^{-x} + c_2e^{-x} - c_2xe^{-x} + xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$
$$= (c_2-c_1)e^{-x} + (1-c_2)xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 \\ 1/2 = y'(0) = c_2 - c_1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 - 1 = 1/2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 3/2 \end{cases}.$$ L'unica sol. del pb. di Cauchy è quindi $\boxed{y(x) = e^{-x} + \frac{3}{2}xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}}$.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 13 Settembre 2016 (Quarto appello, a.a. 2015-2016)

Cognome e nome:________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \exp(\frac{3}{\log(x^2-5)})$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. La convessità di $f(x)$ non è richiesta.

Esercizio 2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{n^{1/3}} - \sin(\frac{1}{n^{1/3}})}{n(\exp(\frac{1}{n}) - 1)^\alpha}.$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\int \frac{\sin x + 1}{\cos x - 1}\, dx.$$

Esercizio 4. Sia data l'equazione differenziale

$$y'(x) = (y(x) + 1)(y(x) - 2)\cos x.$$

(4.a) Determinarne tutte le soluzioni costanti.

(4.b) Determinare l'unica soluzione che verifica $y(\pi/2) = 0$.

Esercizio 5. (5.a) Siano $A \subset B \subset \mathbb{R}$ due insiemi non vuoti e superiormente limitati. Dimostrare che $\sup A \leq \sup B$.

(5.b) Enunciare il teorema di Bolzano-Weierstraß.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 13 Settembre 2016 (Quarto appello, a.a. 2015-2016)

Cognome e nome:__________________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \exp(\frac{2}{\log(x^2-4)})$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. La convessità di $f(x)$ non è richiesta.

Esercizio 2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n^{1/4}}) - \frac{1}{n^{1/4}}}{n(1-\cos(\frac{1}{n}))^\alpha}.$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\int \frac{\cos x + 1}{\sin x - 1}\, dx.$$

Esercizio 4. Sia data l'equazione differenziale

$$y'(x) = (y(x)-1)(y(x)-\frac{1}{2})\sin x.$$

(4.a) Determinarne tutte le soluzioni costanti.

(4.b) Determinare l'unica soluzione che verifica $y(\pi) = 0$.

Esercizio 5. (5.a) Siano $A \subset B \subset \mathbb{R}$ due insiemi non vuoti e inferiormente limitati. Dimostrare che $\inf A \geq \inf B$.

(5.b) Enunciare il teorema "ponte" per i limiti di funzioni.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica Uno

13/09/2015

Risoluzione fila A

Ex 1 $f(x) = \exp\left(\frac{3}{\lg(x^2-5)}\right)$

1a) $Df: \begin{cases} \lg(x^2-5) \neq 0 \\ x^2-5>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-5 \neq 1 \\ x^2>5 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 \neq 6 \\ x\in(-\infty,-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},+\infty) \end{cases}$

$\Leftrightarrow Df = (-\infty,-\sqrt{6})\cup(-\sqrt{6},-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},\sqrt{6})\cup(\sqrt{6},+\infty)$

Osservo che $f(-x) = \exp\left(\frac{3}{\lg((-x)^2-5)}\right) = \exp\left(\frac{3}{\lg(x^2-5)}\right) = f(x)$ $\forall x \in Df$

pertanto $\boxed{f \text{ è PARI}}$

Inoltre $f(x)>0$ $\forall x\in Df$ essendo una funzione esponenziale.

1b) $\lim_{x\to+\infty} \exp\Big(\underbrace{\frac{3}{\lg(x^2-5)}}_{\to+\infty}\Big) = \lim_{u\to 0^+} e^u = 1^+$

siccome f è pari: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1^+$

$y=1$ è asintoto orizzontale sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

$\lim_{x\to\sqrt{6}^+} \exp\Big(\frac{3}{\lg\underbrace{(x^2-5)}_{\downarrow 1^+}}\Big) = \lim_{u\to0^+} \exp\left(\frac{3}{u}\right) = +\infty$

$\Rightarrow x=\sqrt{6}$ è as. verticale destro

e f non ha massimi assoluti.

Siccome f è pari:

$\lim_{x\to(-\sqrt{6})^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{6}^+} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow x=-\sqrt{6}$ è asintoto verticale sinistro

$\lim_{x\to\sqrt{6}^-} \exp\Big(\frac{3}{\lg\underbrace{(x^2-5)}_{\downarrow 1^-}}\Big) = \lim_{u\to0^-} e^{3/u \to -\infty} = 0$ e

siccome f è pari, $\lim_{x\to(-\sqrt{6})^+} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{6}^-} f(x) = 0$

$$\lim_{x\to\sqrt5^+} \exp\Big(\frac{3}{\underbrace{\lg(x^2-5)}_{\downarrow\, 0^+}}\Big) = \lim_{u\to-\infty} e^{\overbrace{3/u}^{\to 0^-}} = 1^-$$

siccome f è pari: $\displaystyle\lim_{x\to(-\sqrt5)^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt5^+} f(x) = 1^-$

1c) f è composizioni di f derivabili; pertanto in D_f f è derivabile (e continua).

$$f'(x) = e^{3/\lg(x^2-5)} \cdot \frac{(-3)}{(\lg(x^2-5))^2} \cdot \frac{1}{x^2-5}(2x)$$

$$= (-6x)\,\frac{e^{3/\lg(x^2-5)}}{(x^2-5)(\lg(x^2-5))^2} = 0 \iff x=0$$

ma $0\notin D_f$

$f'(x)>0 \iff \begin{cases} x<0 \\ x\in D_f \end{cases} \iff x\in(-\infty,-\sqrt6)\cup(-\sqrt6,-\sqrt5)$

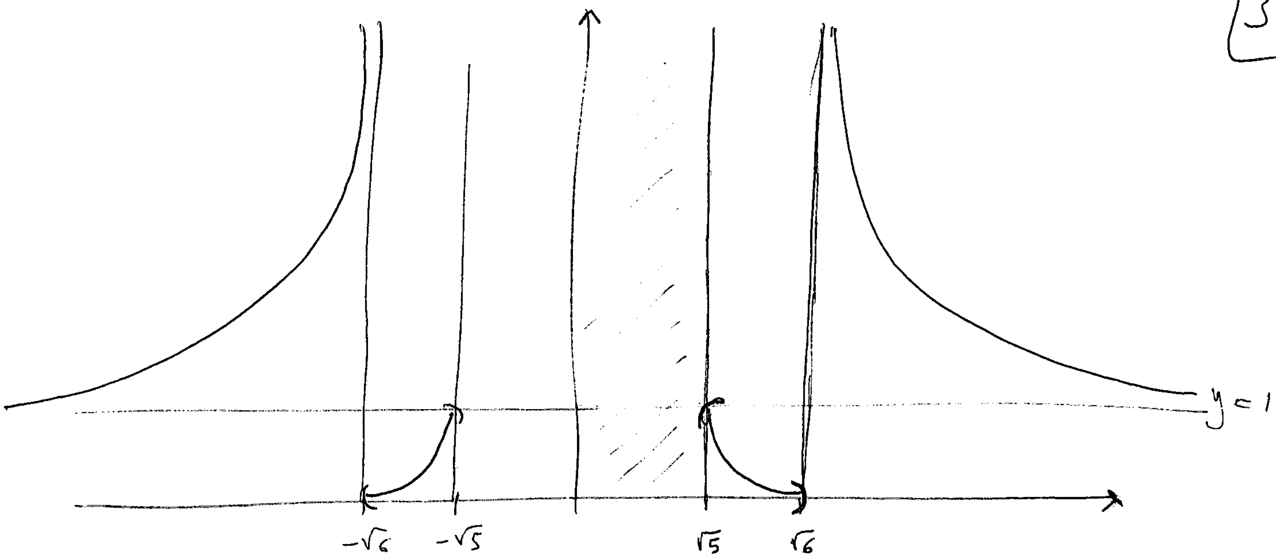
$f'(x)<0 \iff x\in(\sqrt5,\sqrt6)\cup(\sqrt6,+\infty)$

f è strettamente crescente in $(-\infty,-\sqrt6)\cup(-\sqrt6,\sqrt5)$

f è " decrescente in $(\sqrt5,\sqrt6)\cup(\sqrt6,+\infty)$.

f non ammette punti di massimo o minimo locali.

Abbiamo già visto che f non ammette massimi assoluti; dai limiti abbiamo che $\inf f = 0$ ma questo valore non può essere un minimo altrimenti esisterebbe $\bar u$ / $e^{\bar u}=0$ (il che è falso).



EX 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/n^{1/3} - \sin(1/n^{1/3})}{n\,(\exp(1/n)-1)^{\alpha}}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

Sia $b_n(\alpha) = \dfrac{1/n^{1/3} - \sin(1/n^{1/3})}{n\,(\exp(1/n)-1)^{\alpha}}$

Ricordando la ~~sformula~~ formula di Taylor Peano in $x_0 = 0$ ho che
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$
e quindi
$$\frac{1}{n^{1/3}} - \sin\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right) = \frac{1}{n^{1/3}} - \frac{1}{n^{1/3}} + \frac{(1/n^{1/3})^3}{6} + o\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$$
$$= \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right) \quad \text{per } n \to +\infty$$

Quindi il numeratore è infinitesimo di ordine 1 per $n \to +\infty$.

Pertanto ~~se~~ $\boxed{\alpha=0}$ si ha che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/n^{1/3} - \sin(1/n^{1/3})}{n}$ ha termine generale $a_n \geq 0$ e $a_n \to 0$ di ordine $\overset{a_n}{2}$.

Per il criterio dell'ordine di infinitesimo la serie, per $\alpha = 0$, converge.

$\boxed{\text{Sia } \alpha > 0}$ Siccome $e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$ ho che
$$(e^{x} - 1)^{\alpha} = (x + o(x))^{\alpha} = x^{\alpha}(1 + o(1))^{\alpha} = x^{\alpha}(1 + o(1)) \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Quindi $(e^{1/n} - 1)^{\alpha} = \dfrac{1}{n^{\alpha}}(1 + o(1))$ per $n \to +\infty$.

Pertanto $b_n(\alpha) = \dfrac{1/(6n) + o(n^{-4/3})}{n\,(1/n^{\alpha}(1+o(1)))} = \dfrac{\frac{1}{6n} + o(n^{-4/3})}{1/n^{\alpha-1}\,(1+o(1))}$ per $n \to +\infty$

Se $\alpha > 1$ si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} b_n(\alpha) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{principio sost}\\ \text{infinitesimi}}}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{6n}}{\frac{1}{n^{\alpha-1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6} n^{\alpha-2} = \begin{cases} +\infty & \alpha>2 \\ 1/6 & \alpha=2 \\ 0 & 1<\alpha<2 \end{cases}$$

pertanto per $\boxed{\alpha \geq 2 \text{ la serie non può convergere}}$ (non vale la condizione necessaria).

$\boxed{\text{Se } 1<\alpha<2}$ $b_n(\alpha) \to 0$ di ordine $2-\alpha$ e per il criterio dell'ordine converge se e solo se

$2-\alpha > 1 \iff 1 > \alpha$ che non può accadere ($\alpha \in (1,2)$)

$\Rightarrow$ se $\alpha \in (1,2)$ $\sum b_n(\alpha)$ diverge

Pertanto $\boxed{\text{se } \alpha > 1 \quad \sum b_n(\alpha) \text{ DIVERGE}}$

Sia $\alpha \in (0,1)$

$$b_n(\alpha) = \frac{1/n + o(n^{-4/3})}{n^{1-\alpha}(1+o(1))} = \frac{\frac{1}{n}(1+o(n^{-1/3}))}{n^{1-\alpha}(1+o(1))}$$

$$= \frac{1+o(n^{-1/3})}{n^{2-\alpha}(1+o(1))} \quad \text{per } n\to+\infty$$

Quindi $\lim_{n\to+\infty} b_n(\alpha) = 0$ di ordine $2-\alpha$

In tal caso $\sum b_n(\alpha)$ converge se e solo se

$$\begin{cases} 2-\alpha > 1 \\ 0<\alpha<1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha<1 \\ 0<\alpha<1 \end{cases} \iff \alpha \in (0,1)$$

Quindi se $\boxed{\alpha \in (0,1) \quad \sum b_n(\alpha) \text{ converge}}$

Sia $\alpha < 0$ In tal caso $b_n(\alpha) = \frac{1/6n \, (1+o(n^{-1/3}))}{n} n^{+\alpha}(1+o(1))$

$$= \frac{n^{+\alpha}}{6n^2}(1+o(1)) = \frac{1}{6} n^{+\alpha-2}(1+o(1)) \quad \text{per } n\to+\infty$$

Allora $\lim_{n\to+\infty} b_n(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha<0$

di ordine $2-\alpha > 1 \iff \alpha < 1$

Pertanto $b_n(\alpha) \to 0$ di ordine > 1
per ogni $\alpha < 0$

Quindi $\sum b_n(\alpha)$ converge, per il criterio dell'ordine di infinitesimo, $\forall \alpha < 0$.

In conclusione

$\sum b_n(\alpha)$ converge se e solo se $\alpha < 1$

Ex 3 Calcolare $\displaystyle\int \frac{\sin x + 1}{\cos x - 1}\, dx$

osservo che

$$\int \frac{\sin x + 1}{\cos x - 1}\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x - 1}\, dx + \int \frac{dx}{\cos x - 1} = A + B$$

Chiaramente $A = -\lg|\cos x - 1| + c$; $c \in \mathbb{R}$

Per determinare B si pone $t = tg(x/2)$ da cui $x = 2\, atg(t) = g(t)$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Applicando il teorema di sostituzione, si ha

$$\int \frac{dx}{\cos x - 1} = \int \frac{1}{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} - 1\right)} \frac{2}{1+t^2}\, dt = 2\int \frac{dt}{1-t^2-1-t^2}$$

$$= -\int \frac{dt}{t^2} = \left.\frac{1}{t} + c\right]_{t = tg(x/2)} = \frac{1}{tg(x/2)} + c;\ c \in \mathbb{R}.$$

In conclusione

$$\int \frac{\sin x + 1}{\cos x - 1}\, dx = -\lg|\cos x - 1| + \frac{1}{tg(x/2)} + c;\ c \in \mathbb{R}$$

Ex 4

4a) $y'(x) = (y+1)(y-2)\cos x$.

Le soluzioni costanti sono $y=-1$ e $y=2$ poiché entrambe annullano il termine di destra e, chiaramente, hanno derivata prima identicamente nulla.

4b) Supponiamo che $y(x) \neq -1$ e $y(x) \neq 2$.
Allora il pb. equivale a

$$\frac{y'(x)}{(y(x)+1)(y(x)-2)} = \cos x$$

ossia un problema a variabili separabili. Quindi

$$\int \frac{y'(x)\,dx}{(y(x)+1)(y(x)-2)} = \int \cos x \, dx = \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Posto $t = y(x)$ il termine di sinistra diviene

$$\int \frac{dt}{(t+1)(t-2)}$$ per il teorema di int. per sostituzione

Calcolo $A, B \in \mathbb{R}$ / $\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-2} = \frac{1}{(t+1)(t-2)}$;

si ha $A(t-2) + B(t+1) = 1 \iff$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + B = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} B = -A \\ -3A = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 1/3 \\ A = -1/3 \end{cases}$$

Quindi

$$\int \frac{dt}{(t+1)(t-2)} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-2}$$
$$= -1/3 \lg|t+1| + 1/3 \lg|t-2| + c_1; \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Pertanto abbiamo che ($t = y(x)$) $\frac{1}{3} \lg \left| \frac{y(x)-2}{y(x)+1} \right| = \sin x + c; \quad c \in \mathbb{R}$.

da cui segue che $\left| \frac{y(x)-2}{y(x)+1} \right| = e^{3\sin x + c}; \quad c \in \mathbb{R}$

Quindi la sol per cui $y(\pi/2)=0$ è tale che

$$2 = \left|\frac{0-2}{0+1}\right| = e^{3\sin(\pi/2)+c} = e^{c+3}$$

cioè $\lg 2 = c+3$ cioè $c = -3+\lg 2$.

In conclusione l'unica sol cercata ha forma (implicita) data da

$$\left|\frac{y(x)-2}{y(x)+1}\right| = e^{3\sin x - 3 + \lg 2} = 2e^{-3}e^{3\sin x}.$$

<u>Facoltativo</u>: siccome $y(\pi/2)=0$ il grafico di y è del tutto contenuto nella striscia compresa tra le soluzioni costanti $y=-1$ e $y=2$, ossia $-1<y(x)<2$. Dalla forma implicita segue allora che

$$\frac{2-y(x)}{y(x)+1} = 2e^{-3}e^{3\sin x}$$

che diviene $\frac{y(x)-2}{y(x)+1} = -2e^{-3}e^{3\sin x} \iff 1-\frac{3}{y(x)+1} = -2e^{-3}e^{3\sin x}$

$$\iff \frac{3}{y(x)+1} = 1+2e^{-3}e^{3\sin x} \iff y(x)+1 = \frac{3}{1+2e^{-3}e^{3\sin x}}$$

$$\iff y(x) = -1+\frac{3}{1+2e^{-3}e^{3\sin x}} = -2\,\frac{1+e^{-3}e^{3\sin x}}{1+2e^{-3}e^{3\sin x}}.$$