Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 24 gennaio 2017 (Primo appello, a.a. 2016-2017)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = -x + \log(|e^{-2x} - 1|)$

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $\alpha \geq 0$, calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2(1-\cos x)^\alpha + (\sinh x)^4}{3x - \sin(3x)}$$

Esercizio 3. Studiare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_0^4 \frac{x-1}{(1-\frac{x^2}{16})^\alpha} \mathrm{d}x,$$

e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Esercizio 4. Studiare, per $\alpha \geq 0$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \log(1 + \frac{1}{n^2}).$$

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema dei valori intermedi.

(5.b) Dimostrare che se $f, g\colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni strettamente crescenti, allora la funzione $f+g$ è strettamente crescente in A.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 24 gennaio 2017 (Primo appello, a.a. 2016-2017)

Cognome e nome:________________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = x + \log(|e^{4x} - 1|)$

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $\alpha \geq 0$, calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x^2) - \sinh(x^2)}{x^\alpha(\log(1 + 2x^4) - \cos(2x^2) + 1)}$$

Esercizio 3. Studiare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_0^2 \frac{x + 2}{(1 - \frac{x^2}{4})^\alpha} \mathrm{d}x,$$

e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Esercizio 4. Studiare, per $\alpha \geq 0$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \sin(\frac{1}{n}).$$

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

(5.b) Dimostrare che se $f, g \colon A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni debolmente decrescenti, allora la funzione $f + g$ è debolmente decrescente in A.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 24 gennaio 2017 (Primo appello, a.a. 2016-2017)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = -x + \log(|e^{-3x} - 1|)$

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $\alpha \geq 0$, calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x(1-\cos x)^\alpha + (\sinh x)^4}{2x - \sin(2x)}$$

Esercizio 3. Studiare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_0^3 \frac{x+1}{(1-\frac{x^2}{9})^\alpha} \mathrm{d}x,$$

e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Esercizio 4. Studiare, per $\alpha \geq 0$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \log(1 + \frac{1}{n}).$$

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema di Bernoulli-de l'Hôpital (limiti al finito, caso di indeterminazione: rapporto di infinitesimi).

(5.b) Sia $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, e sia $(-A) = \{-a \colon a \in A\}$. Dimostrare che $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 24 gennaio 2017 (Primo appello, a.a. 2016-2017)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = x + \log(|e^{2x} - 1|)$

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $\alpha \geq 0$, calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x - \sinh x)(e^{x^3} - 1)}{x^\alpha(\log(1+2x^4) - \cos(2x^2) + 1)}$$

Esercizio 3. Studiare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_0^5 \frac{x-4}{(1-\frac{x^2}{25})^\alpha} \mathrm{d}x,$$

e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

Esercizio 4. Studiare, per $\alpha \geq 0$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \sin(\frac{1}{n^2}).$$

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema riguardante la Formula di Taylor con resto di Peano.

(5.b) Siano $A, B \neq \emptyset$, $a, b > 0$ per ogni $a \in A$, $b \in B$. Sia inoltre $C = \{a \cdot b \colon a \in A, b \in B\}$. Provare che se A, B sono superiormente limitati, allora $\sup C = \sup A \cdot \sup B$.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi 1 Ing. Chimica e Materiali

Primo appello del 24/01/2017

Risoluzione Fila C

Esercizio 1 $\quad f(x) = -x + \lg(|e^{-3x}-1|)$

1a) D_f : $|e^{-3x}-1| > 0 \iff e^{-3x}-1 \neq 0 \iff x \neq 0$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

D_f è simmetrico rispetto a 0 quindi f può essere pari o dispari.

Ma $f(1) = -1 + \lg(|e^{-3}-1|) = -1 + \lg(1-e^{-3}) = -1 + \lg\left(\frac{e^3-1}{e^3}\right)$;

$f(-1) = 1 + \lg(|e^3-1|) = 1 + \lg(e^3-1)$

Ossia $f(1) = -1 - 3 + \lg(e^3-1) = -4 + \lg(e^3-1) \neq 1 + \lg(e^3-1) = f(-1)$

Quindi f non è pari.

Inoltre $f(1) \neq -f(-1)$ e quindi f non è dispari.

In conclusione: f è né pari né dispari.

1b) I punti di acc. di D_f sono $-\infty$, 0 da destra e da sinistra e $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \Big(\underbrace{-x}_{\downarrow +\infty} + \underbrace{\lg(|\overbrace{e^{-3x}}^{\to +\infty}-1|)}_{\downarrow +\infty}\Big) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \Big(\underbrace{-x}_{\downarrow 0^+} + \lg(\underbrace{|\underbrace{e^{-3x}}_{\downarrow 1}-1|}_{\to 0^+})\Big) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \Big(\underbrace{-x}_{\downarrow 0^-} + \lg(\underbrace{|\underbrace{e^{-3x}}_{\downarrow 1}-1|}_{\to 0^+})\Big) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\overbrace{-x}^{\to -\infty} + \lg(\underbrace{|\underbrace{e^{-3x}}_{\downarrow 0}-1|}_{\to 1^+})\Big) = -\infty$$

Dai valori dei limiti possiamo concludere che $\nexists$ max assoluti e $\nexists$ min assoluti per f.
Inoltre la retta $x=0$ è un asintoto verticale destro e sinistro per f.
Asintoti orizzontali non ne esistono. Studiamo gli asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{\lg(|e^{-3x}-1|)}{x}\right)$$

siccome $e^{-3x}-1>0 \Leftrightarrow \frac{1-e^{3x}}{e^{3x}}>0 \Leftrightarrow 1>e^{3x}$
$\Leftrightarrow x<0$ abbiamo che per x suff. ~~grande~~ grande $(x>0)$ si ha $\lg(|e^{-3x}-1|)=\lg(1-e^{-3x})$
$= \lg\left(\frac{e^{3x}-1}{e^{3x}}\right)$

Quindi per $x>0$ $\lg(|e^{-3x}-1|)=\lg(e^{3x}-1)-(3x)$

Pertanto $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(-4+\frac{\lg(e^{3x}-1)}{x}\right)$

considero il rapporto $\frac{(\lg(e^{3x}-1))'}{(x)'}=\frac{3e^{3x}}{e^{3x}-1}$

Siccome $\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{3x}}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to+\infty}3\,\frac{e^{3x}-1+1}{e^{3x}-1}=$

$=\lim_{x\to+\infty}3\left(1+\frac{1}{e^{3x}-1}\right)=3$

e sono verificate tutte le altre ipotesi del teorema di Bernoulli - de l'Hôpital, abbiamo che

$$\exists \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=-4+3=-1$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(-1)x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)+x=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\lg(|\underbrace{\underbrace{e^{-3x}}_{\downarrow 0}-1}_{\to 1^+}|)=0$$

Pertanto la retta $\boxed{y=-x \text{ è asintoto obliquo a } +\infty}$

Considero
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{\lg(|e^{-3x}-1|)}{x}\right)$$

Ma per $x<0$ si ha che $\lg(|e^{-3x}-1|)=\lg(e^{-3x}-1)$
$$=\lg(e^{-3x}(1-e^{3x}))=-3x+\lg(1-e^{3x})$$

Quindi
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-4+\frac{\overbrace{\lg(1-e^{+3x})}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to-\infty}}\right)$$
$$=-4$$

Inoltre
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+4x)=\lim_{x\to-\infty}3x+\lg(|e^{-3x}-1|)$$
$$\underset{\text{conti precedenti}}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(3x-3x+\underbrace{\lg(1-e^{3x})}_{\downarrow\, 0}\right)=0$$

Di conseguenza la retta $\boxed{y=-4x \text{ è asintoto obliquo a } -\infty}$

1c) f è definita come ~~somma~~ composizione di funzioni continue in D_f.
Pertanto f è continua in D_f.
Per la derivabilità: il problema è nel punto di annullamento di $|e^{-3x}-1|$ ossia in $x=0$; ma $0\notin D_f$; pertanto f è derivabile in D_f perché ivi composizione di funzioni derivabili.

$$f(x)=\begin{cases}-x+\lg(1-e^{-3x}) & x>0\\ -x+\lg(e^{-3x}-1) & x<0\end{cases}$$

Quindi

$$f'(x) = \begin{cases} -1 + \dfrac{1}{1-e^{-3x}} \cdot e^{-3x} \cdot (+3) & (x>0) \\ -1 + \dfrac{1}{e^{-3x}-1} \cdot e^{-3x}(-3) & (x<0) \end{cases}$$ 4

$$= \begin{cases} -1 + 3 \dfrac{1}{e^{3x}-1} & \text{se } x>0 \\ -1 - 3 \dfrac{1}{1-e^{3x}} & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 + \dfrac{3}{e^{3x}-1} & \text{se } x>0 \\ -1 - \dfrac{3}{1-e^{3x}} & \text{se } x<0 \end{cases} = -1 + \frac{3}{e^{3x}-1} \quad \forall x \neq 0$$

<u>Segno di $f'(x)$</u> :

Se <u>$x>0$</u>: $f'(x) > 0 \iff -1 + \dfrac{3}{e^{3x}-1} > 0 \iff$

$$\iff \frac{3}{\underbrace{e^{3x}-1}_{>0 \text{ per } x>0}} > 1 \iff e^{3x}-1 < 3 \iff e^{3x} < 4$$

$$\iff 3x < 2\lg 2 \iff x < \frac{2}{3}\lg 2$$

Quindi si ha: $\boxed{\begin{array}{l} f \text{ è strett. crescente in } (0, \frac{2}{3}\lg 2) \\ f \text{ è } \text{ " decrescente in } (\frac{2}{3}\lg 2, +\infty) \end{array}}$

il punto $\boxed{\frac{2}{3}\lg 2 \text{ è un punto di massimo locale}}$

<u>Se $x<0$</u> $\quad f'(x) > 0 \iff -1 + \dfrac{3}{e^{3x}-1} > 0 \iff \dfrac{3}{\underbrace{e^{3x}-1}_{<0 \text{ per } x<0}} > 1$

$$\iff 3 < e^{3x}-1 \iff 4 < e^{3x} \iff 2\lg 2 < 3x$$

che è falsa per ogni $x<0$. Non vi sono neanche punti di annullamento di $f'(x)$.

Quindi $\quad f'(x) < 0 \quad \forall x<0 \quad$ ossia

$$\boxed{f \text{ è strettamente decrescente in } (-\infty, 0)}$$

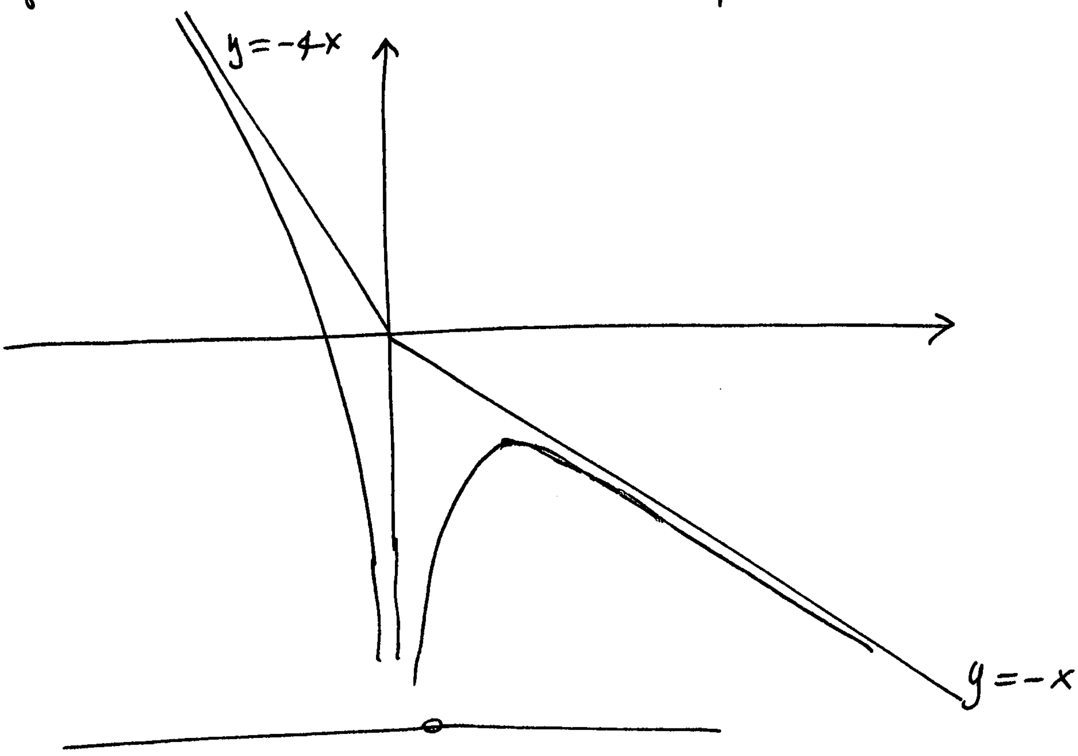
1d) $f'(x) = \frac{3}{e^{3x}-1} - 1 \quad \forall x \in D_f.$

Siccome $f'(x)$ è rapporto di f. derivabili in D_f
$\Rightarrow$ Esiste $f''(x)$ in D_f

$$f''(x) = 3\left[(e^{3x}-1)^{-1}\right]' = -3\,(e^{3x}-1)^{-2} \cdot 3e^{3x}$$

$$= -9\,\frac{\overbrace{e^{3x}}^{>0}}{\underbrace{(e^{3x}-1)^2}_{>0\ \forall x \neq 0}} < 0 \quad \forall x \in D_f$$

f è concava nel suo D_f



Esercizio 2

Notiamo che per $x \to 0^+$ si ha che $1-\cos x > 0$; quindi $(1-\cos x)^\alpha$, $\alpha \geq 0$, è ben definito in intorni destri di 0 suff. piccoli. Osserviamo che sia numeratore che denominatore ~~convergono~~ sono infinitesimi per $x \to 0^+$.

Conviene per prima cosa esaminare il denominatore.

Per la f. di MacLaurin abbiamo che

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^4) \text{ per } x \to 0^+$$

e quindi $D: \ 2x - \sin(2x) = 2x - 2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)$

$$= \frac{4}{3}x^3 + o(x^4) \text{ per } x \to 0^+$$

ossia il denominatore è infinitesimo di ordine 3 per $x \to 0^+$

<u>Numeratore</u> siccome

$$1 - \cos x = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \text{ per } x \to 0^+$$

e $\sinh(x) = x + o(x^2)$ per $x \to 0^+$

si ha che $(\sinh(x))^4 = (x + o(x^2))^4 = (x(1 + o(x)))^4$

$$= x^4(1 + o(x))^4 = x^4(1 + o(x)) \text{ per } x \to 0$$

e che $\quad (1 - \cos x)^\alpha = \left(\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right)\right)^\alpha$

$$= \frac{x^{2\alpha}}{2^\alpha}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right)^\alpha.$$

Pertanto

$$x(1 - \cos x)^\alpha = \frac{x^{2\alpha+1}}{2^\alpha}\left(1 - \frac{x^2}{12} + o(x^3)\right)^\alpha \text{ per } x \to 0^+$$

$$= \frac{x^{2\alpha+1}}{2^\alpha}\left(1 + o(x)\right)^\alpha \quad \text{per } x \to 0^+$$

$$= \frac{x^{2\alpha+1}}{2^\alpha}(1 + o(x)) \quad \text{per } x \to 0^+$$

grazie al fatto che $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u)$ per $u \to 0$.

In conclusione:

$$N: \ \frac{x^{2\alpha+1}}{2^\alpha} + x^4 + o(x^{2\alpha+1}) + o(x^5)$$

che è un infinitesimo di ordine $\begin{cases} 2\alpha+1 & \text{se } 2\alpha+1 < 4 \\ 4 & \text{se } 2\alpha+1 \geq 4 \end{cases}$

con $(\alpha \geq 0)$

$$\begin{cases} 2\alpha+1<4 \\ \alpha \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\alpha < 3 \\ \alpha \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha < 3/2 \\ \alpha \geq 0 \end{cases} \iff \alpha \in [0, 3/2)$$

Allora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^{2\alpha+1}}{2^\alpha} + x^4 + o(x^{2\alpha+2}) + o(x^5)}{4/3\, x^3 + o(x^3)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Principio} \\ \text{Sost. infinitesimi}}}{=} \lim_{x\to 0^+} \begin{cases} \frac{3}{4}\frac{x^{2\alpha+1-3}}{2^\alpha} & \text{se } 0 \leq \alpha < \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} x^{4-3} & \text{se } \alpha \geq 3/2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{2^{\alpha+2}} x^{2\alpha-2} \\ 0 & \text{se } \alpha \geq 3/2 \end{cases}$$

$(2\alpha-2>0 \iff \alpha>1)$

$$= \begin{cases} +\infty & 0 \leq \alpha < 1 \\ 3/8 & \alpha = 1 \\ 0 & 1<\alpha < 3/2 \\ 0 & \alpha \geq 3/2 \end{cases}$$

In conclusione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x(1-\cos x)^\alpha + (\sinh x)^4}{2x - \sin(2x)} = \begin{cases} +\infty & \alpha \in [0,1) \\ 3/8 & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

Esercizio 3

Se $\alpha < 0$; $f(x) = (x+1)\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{-\alpha}$ è def in $[0,3]$ e quindi siamo in presenza di un int. di Riemann che certamente converge.

Se $\alpha = 0$, $f(x) = (x+1)$; e si conclude come sopra.

Sia $\alpha > 0$: f non è definita in 3; valutiamo il suo ordine di infinito in 3 da sinistra

Siccome $f(x) = \dfrac{x+1}{(1-\frac{x^2}{9})^\alpha} = \dfrac{x+1}{9^{-\alpha}(9-x^2)^\alpha} = \dfrac{9^\alpha(x+1)}{(3-x)^\alpha(3+x)^\alpha}$

è immediato notare che $f(x)$ è infinito di ordine α in 3 da sinistra.

Il criterio dell'ordine di infinito ci permette di concludere che l'integrale converge $\iff 0<\alpha<1$

Pertanto l'integrale è convergente per ogni $\alpha \in (-\infty, 1)$.

<u>Sia $\alpha = 1/2$</u> : considero

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2/9}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2/9}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2/9}}$$

$$\underset{t=x/3}{=} \int \frac{3t}{\sqrt{1-t^2}}\,3\,dt + \int \frac{3}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$3t = g(t) = x$

$g'(t) = 3$

$$= (-9)\int \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + 3\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= (-9)\sqrt{1-t^2} + 3\arcsin(t) + c \,\Big|_{t=x/3} \; ; \; c \in \mathbb{R}$$

$$= (-9)\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} + 3\arcsin(x/3) + c$$

$$=: F(x) + c \; ; \; c \in \mathbb{R}$$

Siccome, per definizione, si ha

$$\int_0^3 \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2/9}}\,dx = \lim_{u\to 3^-}\int_0^u \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2/9}} = \lim_{u\to 3^-}(F(u)-F(0))$$

$$= \lim_{u\to 3^-}\Big(\underbrace{-9\sqrt{1-\frac{u^2}{9}}}_{\to 0} + 3\arcsin\left(\frac{u}{3}\right) + 9\Big)$$

$$= 3\arcsin(1) + 9$$

Esercizio 4 Sia $\alpha \geq 0$.

Siccome $\lg(1+\frac{1}{n}) > 0$ per ogni $n \geq 1$ e

$$\lg(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \quad \text{per } n \to +\infty,$$

osserviamo che la serie in questione è a segni alterni e che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{\lg(1+\frac{1}{n})}{n^\alpha} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lg(1+1/n)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(\alpha)$$

ha il termine generale $b_n(\alpha) = \frac{1}{n^{\alpha+1}}(1+o(1))$.

Quindi per $\alpha > 0$, $b_n(\alpha) \to 0$ di ordine $\alpha+1 > 1$ e il criterio dell'ordine di infinitesimo implica che $\sum b_n(\alpha)$ converge.

Di conseguenza, per $\alpha > 0$, $\sum (-1)^n b_n(\alpha)$ converge.

Sia ora $\alpha = 0$: il termine generale della serie diviene $(-1)^n \lg(1+\frac{1}{n})$ che è una serie a segni alterni. Siccome $b_n(0) = \lg(1+\frac{1}{n})$ si ha

$$b_{n+1}(0) \leq b_n(0) \iff \lg(1+\frac{1}{n+1}) \leq \lg(1+\frac{1}{n}) \iff$$

$$\iff 1+\frac{1}{n+1} \leq 1+\frac{1}{n} \iff \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \quad \text{che è vero.}$$

Per il criterio di Leibniz, si ha allora che

$$\sum (-1)^n \lg(1+\frac{1}{n}) \text{ converge.}$$

In conclusione $\sum (-1)^n \frac{\lg(1+1/n)}{n^\alpha}$ converge $\forall \alpha \geq 0$.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 24 febbraio 2017 (Secondo appello, a.a. 2016-2017)

Cognome e nome:________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arctan\Big(\dfrac{x-1}{|x+1|}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $a > 0$ calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a - \sinh x + (1-\cos x)^{3/2}}{(e^{x^2}-1)^{3/2} - e^{-1/x^2}}.$$

Esercizio 3. Studiare per quali $b \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{(\arctan(\sqrt{x}))^b}{(1-x)^{1/2}(1+(1-x)^{1/2})}\mathrm{d}x,$$

e calcolarlo per $b = 0$.

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \sin x + \cos x; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

Esercizio 5. (5.a) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e inferiormente limitato. Dimostrare che esiste una successione $a_n \in A$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf A$.

(5.b) Enunciare il criterio integrale per le serie.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 24 febbraio 2017 (Secondo appello, a.a. 2016-2017)

Cognome e nome:____ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arctan\Big(\dfrac{x-2}{|x+2|}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $a > 0$ calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a - \sinh x + (\sin x)^3}{(1-\cos x)^{3/2} - e^{-1/x^3}}.$$

Esercizio 3. Studiare per quali $b \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{(\tan(\sqrt{x}))^b}{(1-x)^{1/2}(2-x)}\mathrm{d}x,$$

e calcolarlo per $b = 0$.

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \sin x + \cos x; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

Esercizio 5. (5.a) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ e superiormente limitato. Dimostrare che esiste una successione $a_n \in A$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup A$.

(5.b) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 24 febbraio 2017 (Secondo appello, a.a. 2016-2017)

Cognome e nome:________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arctan\Big(\dfrac{x+1}{|x-1|}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $a > 0$ calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a - \sinh x + (e^{x^2}-1)^{3/2}}{(1-\cos x)^{3/2} - e^{-1/x^4}}.$$

Esercizio 3. Studiare per quali $b \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{(\sin(\sqrt{x}))^b}{(1-x)^{1/2}(2-(1-x)^{1/2})}\mathrm{d}x,$$

e calcolarlo per $b = 0$.

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \sin x - \cos x; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare il teorema del differenziale di Lagrange.

(5.b) Enunciare il criterio dell'ordine di infinitesimo per gli integrali impropri su insiemi illimitati.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 24 febbraio 2017 (Secondo appello, a.a. 2016-2017)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \arctan\Big(\dfrac{x+2}{|x-2|}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $a > 0$ calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a - \sin x + (\sinh x)^3}{(e^{x^2}-1)^{3/2} - e^{-1/x^2}}.$$

Esercizio 3. Studiare per quali $b \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{(\sinh(\sqrt{x}))^b}{(1-x)^{1/2}(3-x)}\mathrm{d}x,$$

e calcolarlo per $b = 0$.

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = -\sin x - \cos x; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare il teorema della media integrale.

(5.b) Enunciare la condizione necessaria di convergenza per le serie numeriche.

II appello del 24/02/2017

Esercizio 1 : Sia $f(x) = \operatorname{atg}\left(\frac{x-2}{|x+2|}\right)$. $\boxed{\text{Fila B}}$

1a) $D_f = \{ |x+2| \neq 0 \} = \{ x \neq -2 \} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Siccome D_f non è simmetrico rispetto a 0, f è né pari né dispari. $f(0) = \operatorname{atg}(-1) = -\pi/4$

$$f(x) \geq 0 \iff \operatorname{atg}\left(\frac{x-2}{|x+2|}\right) \geq 0 \iff \frac{x-2}{|x+2|} \geq 0$$

$$\iff \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x \in D_f \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq 2 \\ x \in D_f \end{cases} \iff x \in (2, +\infty)$$

$f(2) = 0$; $f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$.

1b) I punti di accumulazione di D_f sono: $-\infty, +\infty, -2$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \operatorname{atg}\left(\frac{x-2}{|x+2|}\right) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x \to -\infty} \operatorname{atg}\left(\frac{x-2}{-x-2}\right)$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \operatorname{atg}\left(\underbrace{\frac{2-x}{x+2}}_{\to -1}\right) = \operatorname{atg}(-1) = -\pi/4$$

[$y = -\pi/4$ asintoto orizzontale a $-\infty$]

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{atg}\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \operatorname{atg}(1) = \pi/4$$

[$y = \pi/4$ asintoto orizzontale a $+\infty$]

$$\lim_{x \to (-2)^-} f(x) = \lim_{x \to (-2)^-} \operatorname{atg}\left(\frac{\overbrace{x-2}^{\to (-4)^-}}{\underbrace{|x+2|}_{\to 0^+}}\right) = \lim_{u \to -\infty} \operatorname{atg}(u) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim_{x \to (-2)^+} \operatorname{atg}\left(\frac{\overbrace{(x-2)}^{\to (-4)^+}}{\underbrace{|x+2|}_{\to 0^+}}\right) = \lim_{u \to -\infty} \operatorname{atg}(u) = -\pi/2$$

[$\nexists$ asintoti verticali]

1.c) dove definita f è composizione di funzioni continue $\Rightarrow$ f è continua in D_f.

Essendo comp. di f. derivabili in D_f (il punto di non deriv. per $|x+2|$ è in $-2 \notin D_f$), f è derivabile in D_f. Siccome

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{atg}\left(\frac{x-2}{x+2}\right) & x > -2 \\ \operatorname{atg}\left(\frac{2-x}{x+2}\right) & x < -2 \end{cases} = \begin{cases} \operatorname{atg}\left(\frac{x-2}{x+2}\right) & x > -2 \\ \operatorname{atg}\left(-\frac{x-2}{x+2}\right) & x < -2 \end{cases}$$

si ha per $x > -2$ che $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2} \frac{(x+2)-(x-2)}{(x+2)^2}$

$$= \frac{(x+2)^2}{(x+2)^2+(x-2)^2} \frac{x+2-x+2}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2+(x-2)^2} \quad \text{per } x > -2$$

Per $x < -2$: $f'(x) = -\frac{4}{(x+2)^2+(x-2)^2}$ per $x < -2$

Pertanto $f'(x) > 0 \iff x > -2$; $f'(x) < 0 \iff x < -2$ ossia

f è strettamente crescente in $(-2, +\infty)$;

f è " decrescente in $(-\infty, -2)$;

$\nexists$ punti critici.

Inoltre, combinando quanto sopra con i limiti, si ha che f è limitata: $\operatorname{Im} f = (-\pi/2, \pi/4)$.

Non esistono punti di estremo locale; $\nexists$ pti di estremo globale. infatti se $x_0 \in D_f$ / $f(x_0) = -\pi/2$) $\Rightarrow$ $-\pi/2 \in \operatorname{Im}(\operatorname{atg})$ che è falso.

Se esistesse x_1 / $f(x_1) = \pi/4$ allora $\operatorname{atg}\left(\frac{x_1-2}{|x_1+2|}\right) = \frac{\pi}{4}$

ossia $\frac{x_1-2}{|x_1+2|} = 1$ cioè $\begin{cases} x_1 - 2 = |x_1+2| \\ x_1 \neq -2 \end{cases}$ che è privo di soluzioni.

1d) Osserviamo che $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2+4} & x\ x > -2 \\ \frac{-2}{x^2+4} & x\ x < -2 \end{cases}$

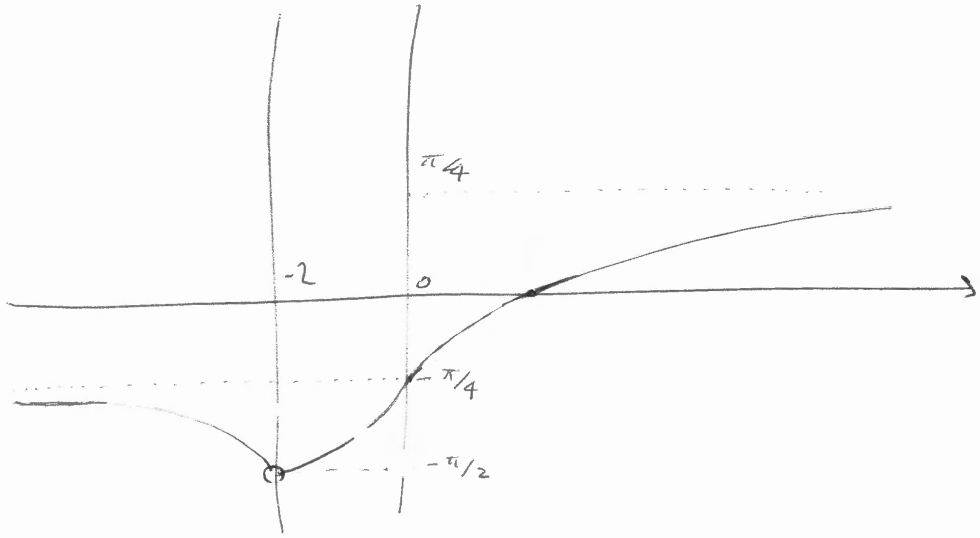
Quindi $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{(x^2+4)^2} & \text{se } x > -2 \\[2mm] \dfrac{-4x}{(x^2+4)^2} & \text{se } x < -2 \end{cases}$

da cui si ottiene

f convessa $\iff x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

f concava $\iff x \in (-2, 0)$

Un andamento qualitativo è



Esercizio 2 Sia $a > 0$. calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a - \sinh(x) + \sin^3 x}{(1-\cos x)^{3/2} - e^{-1/x^2}}$

Il limite è un rapporto di infinitesimi per $x \to 0^+$.

Mediante Taylor-Peano si ha che $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

e quindi, siccome $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{x^{100}} = 0$, si ha che

$$D: \left(x^2/2 + o(x^2)\right)^{3/2} + o(x^{100}) \quad \text{per } x \to 0^+$$

$$= (x^2/2)^{3/2}(1 + o(1))^{3/2} + o(x^{100})$$

$$= 2^{-3/2} x^3 (1 + o(1)) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Siccome $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$; $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

otteniamo che

$$N: x^a - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + (x + o(x))^3$$

per $x \to 0^+$

da cui segue

$$N = x^a - x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + x^3(1+o(1))^3$$
$$= x^a - x + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Pertanto se $\boxed{a = 1}$ si ha che N è infinitesimo di ordine 3 per $x \to 0^+$. Quindi

$$(a=1) \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5/6\, x^3 (1+o(1))}{2^{-3/2} x^3 (1+o(1))} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$$

Se $\boxed{a \in (0,1)}$ allora N è infinitesimo di ordine a e

$$a \in (0,1). \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^a(1+o(1))}{2^{-3/2} x^3 (1+o(1))} = +\infty$$

Se $\boxed{a > 1}$ allora N è infinitesimo di ordine 1 per $x \to 0^+$ e

$$(a>1) \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x(1+o(1))}{2^{-3/2} x^3 (1+o(1))} = -\infty$$

<u>Esercizio 3</u> $\quad b \in \mathbb{R}$: convergenza di $\displaystyle\int_0^1 \frac{(tg\sqrt{x})^6}{(1-x)^{1/2}(2-x)}dx$

Osserviamo che Dom $f(x)$ dove $f(x) = (tg\sqrt{x})^6 / [(1-x)^{1/2}(2-x)]$

è dato da $\begin{cases} x > 0 \\ 1-x > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0,1)$.

Pertanto l'integrale ha problemi di convergenza sia in 0 che in 1.

Siano $I_1 = \int_0^{1/2} f(x)dx$; $I_2 = \int_{1/2}^1 f(x)dx$; $I = I_1 + I_2$.

Sappiamo che I converge $\Leftrightarrow$ I_1 e I_2 convergono entrambi.

I_2: $f(x)$ è asintotica a $\frac{1}{(1-x)^{1/2}}$ per $x \to 1^-$; infatti

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{1/(1-x)^{1/2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(tg\sqrt{x})^6}{2-x} = (tg\,1)^6 \neq 0$$

Pertanto f è infinita di ordine $1/2$ per $x \to 1^-$ ed il criterio dell'ordine di infinito ci fa concludere che I_2 converge $\forall b \in \mathbb{R}$

I_1: Ricordando che $\lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = 1$, abbiamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x^{b/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\operatorname{tg}\sqrt{x})^b}{x^{b/2}} \underbrace{\frac{1}{(1-x)^{1/2}(2-x)}}_{\to 1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^b = \frac{1}{2} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

Quindi $f(x) \sim x^{b/2}$ per $x \to 0^+$

Se $b \geq 0$ allora $f(x)$ è prolungabile per continuità in 0 e quindi I_1 converge.

Se $b<0$ allora $f(x)$ è infinita di ordine $-b/2$ in 0 da destra. Il criterio dell'ordine di infinito impone di avere $0 < -b/2 < 1$ ossia $\begin{cases} b<0 \\ b>-2 \end{cases} \Leftrightarrow b \in (-2,0)$

In conclusione I_1 converge $\forall b > -2$.

Di conseguenza $\boxed{I \text{ converge } \Leftrightarrow b > -2}$.

Sia ora $b=0$; dobbiamo calcolare $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}(2-x)} =: J$

Si ponga $t^2 = 1-x \geq 0$ $(x \leq 1)$ $\Rightarrow t = \sqrt{1-x}$ $x<1$

da cui $g(t) = 1-t^2$, $t \in (0,+\infty)$.

Sia $t_0 \,/\, g(t_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t^2 = 0 \\ t>0 \end{cases} \begin{cases} t^2 = 1 \\ t>0 \end{cases} \{ t = 1$

Sia $t_1 \,/\, g(t_1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t^2 = 1 \\ t>0 \end{cases} \begin{cases} t^2=0 \\ t>0 \end{cases}$ $\nexists$ sol.

L'integrale è improprio in 1. Calcolo $(g(t_u) = u \Leftrightarrow 1-t^2 = u \Leftrightarrow t^2 = 1-u$

$$F(u) = \int_0^u \frac{dx}{(1-x)^{1/2}(2-x)} \underset{\substack{x=g(t)=1-t^2 \\ g'(t)=-2t}}{=} -2\int_1^{\sqrt{1-u}} \frac{t\,dt}{t\,(2-1+t^2)}$$

$$= 2\int_{\sqrt{1-u}}^1 \frac{dt}{t^2+1} = 2\,\operatorname{atg}(t)\Big|_{\sqrt{1-u}}^1 = 2\left(\operatorname{atg}(1) - \operatorname{atg}\sqrt{1-u}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\,\operatorname{atg}(\sqrt{1-u})$$

Pertanto 6

$$J = \lim_{u\to 1^-} F(u) = \lim_{u\to 1^-} \Big(\frac{\pi}{2} - \underbrace{2\,\mathrm{atg}(\sqrt{1-u})}_{\downarrow 0} \Big)$$
$$= \pi/2$$

<u>Esercizio 4</u> Risolvere $\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \sin x + \cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 . \end{cases}$

Il polinomio caratteristico dell'eq. diff^{le} omogenea è
$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$.
Pertanto tutte e sole le sol. dell'omogenea associata sono
$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Siccome $\sin x + \cos x = e^{0x}(1 \cdot \cos(1 \cdot x) + \sin(1x))$
possiamo usare il metodo di somiglianza $(\alpha = 0, \beta = 1)$;
siccome $\pm i$ non sono soluzioni di $p(\lambda) = 0$, cerchiamo
soluzioni particolari del tipo
$$\overline{y}(x) = A \cos x + B \sin x \quad , \quad A, B \in \mathbb{R} .$$
$\overline{y}'(x) = -A \sin x + B \cos x \; ; \quad \overline{y}''(x) = -A \cos x - B \sin x$

Quindi $\overline{y}'' - 3\overline{y}' + 2\overline{y} = -A\cos x - B \sin x - 3(-A \sin x + B \cos x) +$
$$+ 2 \, (A \cos x + B \sin x)$$
$$= \cos x \, (-A - 3B + 2A) + \sin x \, (-B + 3A + 2B)$$
che è soluzione del problema $\Leftrightarrow \begin{cases} A - 3B = 1 \\ 3A + B = 1 \end{cases}$

Risolvendo si ha $\begin{cases} A = 1 + 3B \\ 3 + 9B + B = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \\ 10B = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} A = 2/5 \\ B = -1/5 \end{cases}$

cioè $\overline{y}(x) = \frac{2}{5} \cos x - \frac{1}{5} \sin x$.

Allora tutte e sole le sol. dell'eq. diff^{le} sono
$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{2}{5} \cos x - \frac{1}{5} \sin x \; ; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$
Osservando che $y'(x) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} - 2/5 \sin x - 1/5 \cos x$ Ho che
$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 + c_2 + 2/5 \\ 1 = y'(0) = c_1 + 2c_2 - 1/5 \end{cases} \begin{cases} c_1 + c_2 = 3/5 \\ c_1 + 2c_2 = 6/5 \end{cases} \begin{cases} c_1 + c_2 = 3/5 \\ c_2 = 3/5 \end{cases} \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 3/5 \end{cases}$$
e l'unica sol. del pb. di Cauchy è $y(x) = \frac{3}{5} e^{2x} + 2/5 \cos x - 1/5 \sin x$ —

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 28 giugno 2017 (Terzo appello, a.a. 2016-2017)

Cognome e nome:____ Matricola:________________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log\Big(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per $a > 0$ calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^a) - x^a - 1 + \cosh x}{\sqrt{1+x^a} - \sqrt{1-x^a}}.$$

Esercizio 3. Studiare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^a(x + 2\sqrt{x} + 4)}$$

e calcolarlo per $a = 1/2$.

Esercizio 4. Sia $b > 0$. Determinare il carattere di convergenza e di convergenza assoluta di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{(1+n^2)^b}.$$

Esercizio 5. (5.a) Sia $f\colon I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile su I. Dimostrare che f è costante su I se e solo se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$.

(5.b) Enunciare il teorema di Bolzano-Weierstaß.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 28 giugno 2017 (Terzo appello, a.a. 2016-2017)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log\Big(\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{|x|}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per $a > 0$ calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(x^a) - x^a - 1 + \cos x}{\sqrt{1-x^{2a}} - \sqrt{1+x^{2a}}}.$$

Esercizio 3. Studiare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza dell'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2a}(x - 2\sqrt{x} + 4)}$$
e calcolarlo per $a = 1/4$.

Esercizio 4. Sia $b > 0$. Determinare il carattere di convergenza e di convergenza assoluta di
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{(2+n^3)^b}.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare che se f è Riemann-integrabile in $[a,b]$, dato $x_0 \in [a,b]$, allora $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$ è continua in $[a,b]$.

(5.b) Enunciare teorema di Lagrange.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi 1 28/06/2017
Ing. Chimica e Materiali **Fila B**

Esercizio 1 $f(x) = \lg\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{|x|}\right)$

1.a) $D_f = \begin{cases} |x| \neq 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+2}}{|x|} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ \mathbb{R} \end{cases} \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Osserviamo che $f(-x) = \lg\left(\frac{\sqrt{(-x)^2+2}}{|-x|}\right) = \lg\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{|x|}\right) = f(x)$ per ogni $x \in D_f$. Quindi f è una funzione PARI ;

$f(x) > 0 \iff \lg\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{|x|}\right) > 0 \iff \frac{\sqrt{x^2+2}}{|x|} > 1 \iff \sqrt{x^2+2} > |x|$

Ma $x^2+2 > x^2 \Longrightarrow \sqrt{x^2+2} > \sqrt{x^2} = |x|$ per la stretta monotonia della funzione $\sqrt{u}$. Pertanto $f(x) > 0 \ \forall x \in D_f$

1b) I punti di accumulazione di D_f sono $-\infty, +\infty, 0$.

$$\lim_{x\to-\infty} \lg\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{|x|}\right) = \lim_{x\to-\infty} \lg\left(\frac{|x|\sqrt{1+2/x^2}}{|x|}\right) =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \lg\left(\underbrace{\sqrt{1+\underbrace{2/x^2}_{\to 0^+}}}_{\to 1^+}\right) = 0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \underset{u=-x}{=} \lim_{u\to-\infty} f(-u) \underset{f \text{ pari}}{=} \lim_{u\to-\infty} f(u) = 0^+$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \lg\left(\underbrace{\frac{\overbrace{\sqrt{x^2+2}}^{\to 2^+}}{\underbrace{|x|}_{\to 0^+}}}_{\to +\infty}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) \underset{u=-x}{=} \lim_{u\to0^+} f(-u) \underset{f \text{ pari}}{=} \lim_{u\to0^+} f(u) = +\infty$$

Abbiamo quindi che f NON ha MASSIMO GLOBALE ;

$y=0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$, $x=0$ è asintoto verticale destro e sinistro.

1.c) f è composizione di funzioni continue in D_f.
$\Rightarrow$ f è continua in D_f.

Per la derivabilità si osservi che $|x|$ non è derivabile in 0 che però è escluso dal D_f; quindi f, essendo composizione di funzioni derivabili in D_f, è anch'essa derivabile in D_f.

Sia $x>0$: $f(x) = \lg\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right) = \frac{1}{2}\lg(x^2+2) - \lg x$;

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-x^2-2}{x(x^2+2)} = \frac{-2}{x(x^2+2)}$$

Sia $x<0$: $f(x) = \lg\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{|x|}\right) = \frac{1}{2}\lg(x^2+2) - \lg|x|$;

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x}{x^2+2} - \frac{1}{x} = \frac{-2}{x(x^2+2)} \quad \text{ossia}$$

$f'(x) = \frac{-2}{x(x^2+2)}$ $\forall x\in D_f$. Si noti che $f'(x)\neq 0$ $\forall x\in D_f$

e che $f'(x)>0 \iff x<0$; $f'(x)<0 \iff x>0$;

Quindi $f(x)$ è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$
$f(x)$ " decrescente in $(0,+\infty)$.

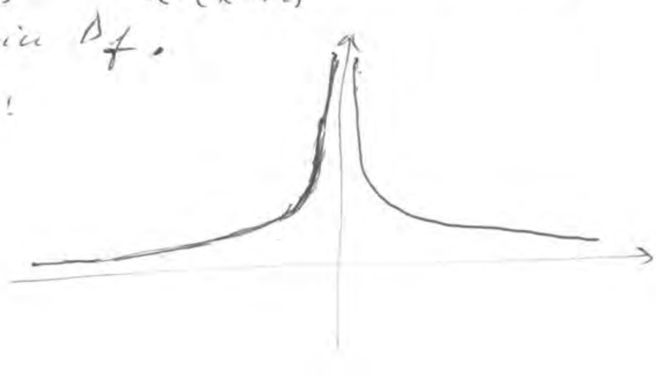
Non esistono punti critici e quindi non esistono punti estremali locali interni.

1d) $f'(x)$ è derivabile in D_f; $f''(x) = (-2)\frac{-(x^2+2)-x(2x)}{x^2(x^2+2)^2} =$

$$= (-2)\frac{-x^2-2-2x^2}{x^2(x^2+2)^2} = \frac{6x^2+4}{x^2(x^2+2)^2} > 0 \quad \forall x\in D_f$$

Quindi f è convessa in D_f.

Un andamento di f è:



Esercizio 2 il limite in questione è un rapporto di infinitesimi per $x \to 0^+$.

Usiamo la formula di Maclaurin per il numeratore:

Per $u \to 0^+$ si ha che $tg(u) - u = \frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{15} + \frac{17u^7}{315} + o(u^8)$;

siccome $x^a \to 0^+$ per $x \to 0^+$, abbiamo che

$$tg(x^a) - x^a = \frac{x^{3a}}{3} + \frac{2}{15}x^{5a} + \frac{17}{315}x^{7a} + o(x^{8a}) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Inoltre $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ per $x \to 0^+$.

Pertanto:
$$N = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^{3a}}{3} + \frac{2}{15}x^{5a} + o(x^5) + o(x^{6a}) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Per il denominatore usiamo la f. di Maclaurin di $(1+u)^{1/2}$ ed. $(1-u)^{1/2}$:

$$(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \frac{5}{128}u^4 + \frac{7}{256}u^5 + o(x^5) \quad \text{per } u \to 0^+,$$

$$(1-u)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 - \frac{u^3}{16} - \frac{5}{128}u^4 - \frac{7}{256}u^5 + o(u^5) \quad \text{per } u \to 0^+,$$

da cui segue: $(1-u)^{1/2} - (1+u)^{1/2} = -u - \frac{1}{8}u^3 - \frac{7}{128}u^5 + o(u^6)$ per $u \to 0^+$

Siccome $x^{2a} \to 0^+$ per $x \to 0^+$, abbiamo che

$$(1-x^{2a})^{1/2} - (1+x^{2a})^{1/2} = -x^{2a} - \frac{1}{8}x^{6a} - \frac{7}{128}x^{10a} + o(x^{12a}) \quad \text{per } x \to 0^+$$

$$= -x^{2a} + o(x^{2a}) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Pertanto: $D = -x^{2a} + o(x^{2a})$ per $x \to 0^+$.

Ricordando che $N = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^{3a}}{3} + o(x^3) + o(x^{4a})$ per $x \to 0^+$

osserviamo che
$$N = \begin{cases} -x^2/2 + o(x^2) & 3a > 2 \\ -x^2/6 + o(x^2) & a = 2/3 \\ \frac{x^{3a}}{3} + o(x^{3a}) & 0 < a < 2/3 \end{cases}$$

Pertanto: se $a > 2/3$ si ha $\lim_{x \to 0^+} \frac{N}{D} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2/2 + o(x^2)}{-x^{2a} + o(x^{2a})}$

./.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{principio} \\ \text{sost. infinitesimi} \\ \text{ord. superiore}}}{=} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{2} x^{2-2a} \right) = \begin{cases} 0^+ & 2/3 < a < 1 \\ 1/2 & a = 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

Se $a = 2/3$: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{6} x^2 + o(x^2)}{-x^{4/3} + o(x^{4/3})} = 0^+$

Se $a \in (0, 2/3)$: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{3a}/3 + o(x^{3a})}{-x^{2a} + o(x^{2a})} =$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{p. sost. infinitesimi}}}{=} \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{3} x^a = 0^-$$

Esercizio 3 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{2a}(x - 2\sqrt{x} + 4)}$ $a \in \mathbb{R}$.

Osservo che $x - 2\sqrt{x} + 4 = (\sqrt{x} - 1)^2 + 3 > 0 \quad \forall x \geq 0$.

Quindi: se $\boxed{a = 0}$ non ci sono problemi di convergenza in 0;

ma $f(x) = \dfrac{1}{x - 2\sqrt{x} + 4} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ di ordine 1;

Il criterio dell'ordine di infinitesimo implica che l'int^{le} diverge.

Se $a > 0$: abbiamo problemi di convergenza in 0 ed in $+\infty$;

in 0 f è infinita di ordine $2a$; pertanto, per il criterio dell'ordine di infinito, l'integrale $\int_0^1 f(x)dx$ converge se e solo se $0 < 2a < 1 \iff 0 < a < 1/2$.

per $x \to +\infty$; $f(x) = \dfrac{1}{x^{2a+1} \underbrace{(1 - 2/\sqrt{x} + 4/x)}_{\to 1}} \to +\infty$ di ordine $2a+1$

Il criterio dell'ordine di infinitesimo implica che $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge se e solo se $2a + 1 > 1 \iff a > 0$

Quindi (per $a > 0$) $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff 0 < a < 1/2$

Se $a < 0$: $f(x) = \dfrac{x^{-2a}}{x - 2\sqrt{x} + 4}$; in 0 non vi sono pb. di convergenza.

5

Per $x \to +\infty$: $f(x) = \dfrac{x^{-2a-1}}{\underbrace{(1 - 2/\sqrt{x} + 4/x)}_{\to 1}} = \begin{cases} +\infty & -2a-1>0 \\ 1 & -2a-1=0 \\ 0^+ & -2a-1<0 \end{cases}$
$(a<0)$

l'unica possibilità perché $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, $a<0$, converga è che $-2a-1<0$. In tal caso $f \to 0^+$ di ordine $1+2a<1$ (si ricordi che $a<0$) e quindi, per il criterio dell'ordine di infinitesimo, $\int_0^{+\infty} f(x)$ diverge per ogni $a<0$.

In conclusione $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff 0<a<\frac{1}{2}$.

Sia ora $a = 1/4$: $f(x) = \dfrac{1}{x^{1/2}(x-2\sqrt{x}+4)}$; posto $t=\sqrt{x}$

$t^2=x$, $t>0$: si ha che $(g(t)=t^2)$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{2t}{t(t^2-2t+4)}\,dt \Big|_{t=\sqrt{x}} = 2\int \frac{dt}{(t-1)^2+3}\Big|_{t=\sqrt{x}}$$

$$= 2\int \frac{dt}{3\left[\left(\frac{t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]}\Big|_{t=\sqrt{x}} \underset{\substack{u=\frac{t-1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{3}u+1=t}}{=} \frac{2}{3}\int \frac{\sqrt{3}\,du}{u^2+1}\Big|_{\substack{u=\frac{t-1}{\sqrt{3}} \\ t=\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{atg}(u)\Big|_{\substack{u=t-1/\sqrt{3} \\ t=\sqrt{x}}} = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{atg}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}}\right)}_{F(x)} + c\,; \quad c\in\mathbb{R}$$

Pertanto
$$\left(\lim_{v\to+\infty} F(v)\right) - \left(\lim_{u\to 0^+} F(u)\right) = \lim_{v\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\,\underbrace{\mathrm{atg}\left(\frac{\sqrt{v}-1}{\sqrt{3}}\right)}_{\to\pi/2}\right] + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{atg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}\,\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}\pi = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx. \quad (a=1/4)$$

Esercizio 4 Carattere di convergenza e conv. assoluta:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{(2+n^3)^b}, \quad b>0$$

Sia $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{(2+n^3)^b} = \dfrac{\sqrt{n}}{n^{3b}(1+2/n^3)^b} = \dfrac{1}{n^{3b-1/2}\underbrace{(1+2/n^3)^b}_{\downarrow 1 \ n\to+\infty \ \forall b>0}}$

Pertanto: se $3b-1/2=0 \Rightarrow a_n \not\to 0$

se $3b-1/2<0 \Rightarrow a_n \not\to 0$

Quindi per $0<b\le 1/6$ si ha che $\sum(-1)^n a_n$ non converge e che $\sum a_n = \sum|(-1)^n a_n|$ diverge. (INDETERMINATA).

Sia allora $3b-1/2>0$ cioè $\boxed{b>1/6}$: da quanto sopra abbiamo che $a_n\geq 0$, $a_n\to 0^+$ di ordine $3b-1/2$. Il criterio dell'ordine di infinitesimo per le serie ci assicura che $\sum a_n = \sum|(-1)^n a_n|$ converge se e solo se $3b-1/2>1$ cioè $3b>3/2 \Leftrightarrow b>1/2$

Quindi $\sum(-1)^n a_n$ converge assolutamente $\Leftrightarrow b>1/2$

Sia adesso $b\in(1/6, \frac{1}{2}]$: sappiamo che $a_n\to 0^+$, $a_n\geq 0$.
Studiamo la monotonia di a_n. posto $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{(2+x^3)^b}$

abbiamo che $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2+x^3)^b - \sqrt{x}\, b\,(2+x^3)^{b-1}\cdot 3x^2}{(2+x^3)^{2b}}$

$$= \frac{1/2\sqrt{x} - 3b\,x^{5/2}/(2+x^3)}{(2+x^3)^b}$$

$$= \frac{(2+x^3)-6bx^3}{2(2+x^3)^{b+1}\sqrt{x}} = \frac{2+x^3\overbrace{(1-6b)}^{<0 \ (b>1/6)}}{2\sqrt{x}\,(2+x^3)^{b+1}}$$

Se abbiamo $x^3(1-6b)+2<0 \Rightarrow x^3 > \dfrac{2}{6b-1} \Rightarrow x > \underbrace{\sqrt[3]{\dfrac{2}{6b-1}}}_{"x_b"} > 0$

allora $f'(x)<0 \ \forall x>x_b$. Di conseguenza f è strettamente decrescente in $(x_b,+\infty)$. Quindi $f(n)=a_n$ ./.

è strettamente decrescente $\forall n \geq \lfloor x_b \rfloor + 1$.

Quindi $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$, e $\exists N$ tale che $a_{n+1} < a_n$ per $n > N$; valendo le ipotesi del criterio di Leibniz abbiamo che

$$\sum (-1)^n a_n \text{ converge } \forall b \in \left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{2}\right]$$

In conclusione:

se $0 < b \leq 1/6$ $\sum (-1)^n a_n$ indeterminata; $\sum |(-1)^n a_n|$ diverge

se $\frac{1}{6} < b \leq 1/2$: $\begin{cases} \sum (-1)^n a_n \text{ converge} \\ \sum |(-1)^n a_n| \text{ diverge} \end{cases}$

se $1/2 < b$: $\begin{cases} \sum (-1)^n a_n \text{ converge} \\ \sum |(-1)^n a_n| \text{ converge} \end{cases}$

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 20 settembre 2017 (Quarto appello, a.a. 2016-2017)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = (1 - 2|x|)\exp(\frac{1}{x+1})$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $a > 0$ calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + x^a \sin x) - e^{x^2} + 1}{(1 + 3x^2)^a - 1 - e^{-1/x}}$$

Esercizio 3. Sia $f_a(x) = \dfrac{2\log x + 3}{x^a(\log^2 x + 4\log x + 5)}$.

(3.a) Determinare per quali $a > 0$ si ha la convergenza di $\int_0^1 f_a(x)\ \mathrm{d}x$.

(3.b) Per $a = 1$ calcolare $\int_{1/e}^1 f_1(x)\ \mathrm{d}x$.

Esercizio 4. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ studiare il carattere di convergenza assoluta e di convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log(2x-2))^n}{n+2}.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare che: se f derivabile in I intervallo e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$ allora f è strettamente crescente in I.

(5.b) Enunciare il criterio del confronto per gli integrali impropri su $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 20 settembre 2017 (Quarto appello, a.a. 2016-2017)

Cognome e nome:________________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	7	6	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = (1 - |x|)\exp(\frac{1}{x+2})$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $a > 0$ calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + x^a \tan x) + \cos x - 1}{(1 + 2x^2)^a - 1 - e^{-1/x^2}}$$

Esercizio 3. Sia $f_a(x) = \dfrac{2\log x + 1}{x^{2a}(\log^2 x + 2\log x + 2)}$.

(3.a) Determinare per quali $a > 0$ si ha la convergenza di $\int_0^1 f_a(x)\, dx$.

(3.b) Per $a = 1/2$ calcolare $\int_{1/e}^1 f_{1/2}(x)\, dx$.

Esercizio 4. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ studiare il carattere di convergenza assoluta e di convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x} - 3)^n}{3n + 1}.$$

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare che: se $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed esiste $x_0 \in A$ punto estremale locale interno ad A per cui f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

(5.b) Enunciare il criterio integrale per le serie.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica 1

Ing. Chimica e Materiali Fila A

20/09/2017

Esercizio 1 $\quad f(x) = (1-2|x|)\, e^{\frac{1}{x+1}}$

1a) $D_f = \{x \neq -1\}$; f né pari né dispari perché D_f non simmetrico rispetto a 0.

$$f(x)>0 \iff \begin{cases} 1-2|x|>0 \\ x\in D_f \end{cases} \begin{cases} 2|x|<1 \\ x\in D_f \end{cases} \begin{cases} x\in(-1/2,1/2) \\ x\in D_f \end{cases} \quad x\in(-1/2,1/2)$$

$$f(x)=0 \iff 2|x|=1 \iff x\in\{-1/2, 1/2\}$$

1b) I punti di accumulazione sono $-\infty, -1^+, -1^-, +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \underset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty} \underbrace{(1+2x)}_{\to -\infty}\, \underbrace{e^{1/x+1}}_{\to 1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \underset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty} \underbrace{(1-2x)}_{-\infty}\, \underbrace{e^{1/x+1}}_{\to 1} = -\infty$$

$\Rightarrow$ f non ha minimo assoluto.

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) \underset{x<0}{=} \lim_{x\to(-1)^-} \underbrace{(1+2x)}_{\to -1}\, \underbrace{e^{1/x+1}}_{\to 0^+} = 0^-$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) \underset{x<0}{=} \lim_{x\to(-1)^+} \underbrace{(1+2x)}_{\to -1}\, \underbrace{e^{1/x+1}}_{\to +\infty} = -\infty$$

f non ha asintoti orizzontali; $x=-1$ è asintoto verticale destro

Asintoti obliqui: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \underset{x>0}{=} \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{1-2x}{x}}_{\to -2}\, \underbrace{e^{1/x+1}}_{\to 1} = -2$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)+2x) = \lim_{x\to+\infty} (1-2x)e^{1/x+1} + 2x = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{1/x+1} + 2x\left(1-e^{1/x+1}\right)\right)$$

che è indet. di tipo $\infty \cdot 0$;

Studio $\lim_{x\to+\infty} x\left(1-e^{\frac{1}{x+1}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{\frac{1}{x+1}}}{1/x}$

$$\underset{u=\frac{1}{x+1}}{=} \lim_{u\to 0^+} \frac{1-e^u}{u}\cdot\frac{u}{u/(1-u)} = \lim_{u\to 0^+} \underbrace{\frac{1-e^u}{u}}_{\to -1}\underbrace{(1-u)}_{\to 1} = -1$$

$x+1 = \frac{1}{u}$

$x = 1/u - 1 = \frac{1-u}{u}$

Allora $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+2x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\overset{\to 1}{e^{\frac{1}{x+1}}} + 2x\left(1-e^{\frac{1}{x+1}}\right)\right) = 1-2 = -1$

Quindi $\boxed{y=-2x-1 \text{ è asintoto obliquo a } +\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \underset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1+2x}{x}\underbrace{e^{\frac{1}{x+1}}}_{\to 1} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x+1}} + 2x\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right)\right) = \text{indet.}$$

Siccome $\lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x+1}}-1}{1/x} =$

$$\underset{u=\frac{1}{x+1}}{=} \lim_{u\to 0^-}\frac{e^u-1}{u}\cdot\frac{u}{u/(1-u)} = \lim_{u\to 0^-}\underbrace{\frac{e^u-1}{u}}_{\to 1}\underbrace{(1-u)}_{\to 1} = 1,$$

$x = \frac{1-u}{u}$

abbiamo $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{e^{\frac{1}{x+1}}}_{\to 1} + 2\underbrace{x\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right)}_{\to 1}\right) = 3$

da cui segue che $\boxed{y=2x+3 \text{ è as. obliquo a } -\infty}$

c) f è composizione di f. continue in $D_f \Rightarrow f$ è continua in D_f

f non è derivabile in 0 perché $|x|$ non lo è; quindi

f è derivabile in $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty) = A$

Per $x<0, x\neq -1$, si ha che $f(x) = (1+2x)e^{\frac{1}{x+1}} \Rightarrow$

$$f'(x) = 2e^{\frac{1}{x+1}} + (1+2x)e^{\frac{1}{x+1}}\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{x+1}}\left[2-\frac{1+2x}{(x+1)^2}\right] = e^{\frac{1}{x+1}}\left[\frac{2(x^2+1+2x)-1-2x}{(x+1)^2}\right]$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2}\left(2x^2+2x+1\right)$$

Per $x>0$. $f(x) = (1-2x)\, e^{\frac{1}{x+1}} \Rightarrow$

$$f'(x) = -2e^{1/x+1} + (1-2x)\, e^{1/x+1} \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$= -e^{1/x+1}\left[2 + \frac{1-2x}{(x+1)^2}\right] = -e^{1/x+1}\left[\frac{2x^2+4x+2+1-2x}{(x+1)^2}\right]$$

$$= -\frac{e^{1/x+1}}{(x+1)^2}\left(2x^2+2x+3\right)$$

Quindi $f'(x) = \dfrac{e^{1/x+1}}{(x+1)^2} \cdot \begin{cases} 2x^2+2x+1 & \text{se } x<0,\ x\neq -1 \\ -(2x^2+2x+3) & \text{se } x>0 \end{cases}$

Pertanto $f'(x)>0$ $\forall x<0,\ x\neq-1 \Rightarrow f$ strett. crescente in $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

$f'(x)<0$ $\forall x>0$ $\rightarrow f$ strett. decrescente in $(0,+\infty)$.

Sebbene 0 sia punto di non derivabilità, la monotonia di f implica che $\boxed{0 \text{ sia punto di massimo locale; } f(0)=e}$

1d) f è derivabile in $A=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

Sia $x<0,\ x\neq-1$; $f''(x) = e^{1/x+1}\left(\frac{-1}{(x+1)^4}\right)(2x^2+2x+1) +$

$$+\, e^{1/x+1}\left(\frac{-2}{(x+1)^3}\right)(2x^2+2x+1) + e^{1/x+1}\frac{1}{(x+1)^2}(4x+2)$$

$$= \frac{e^{1/x+1}}{(x+1)^2}\left[\frac{-2x^2-2x-1}{(x+1)^2} + \frac{-4x^2-4x-2}{(x+1)} + 4x+2\right]$$

$$= \frac{e^{1/x+1}}{(x+1)^4}\left[-2x^2-2x-1 + (-2)(x+1)(2x^2+2x+1) + 2(2x+1)(x+1)^2\right]$$

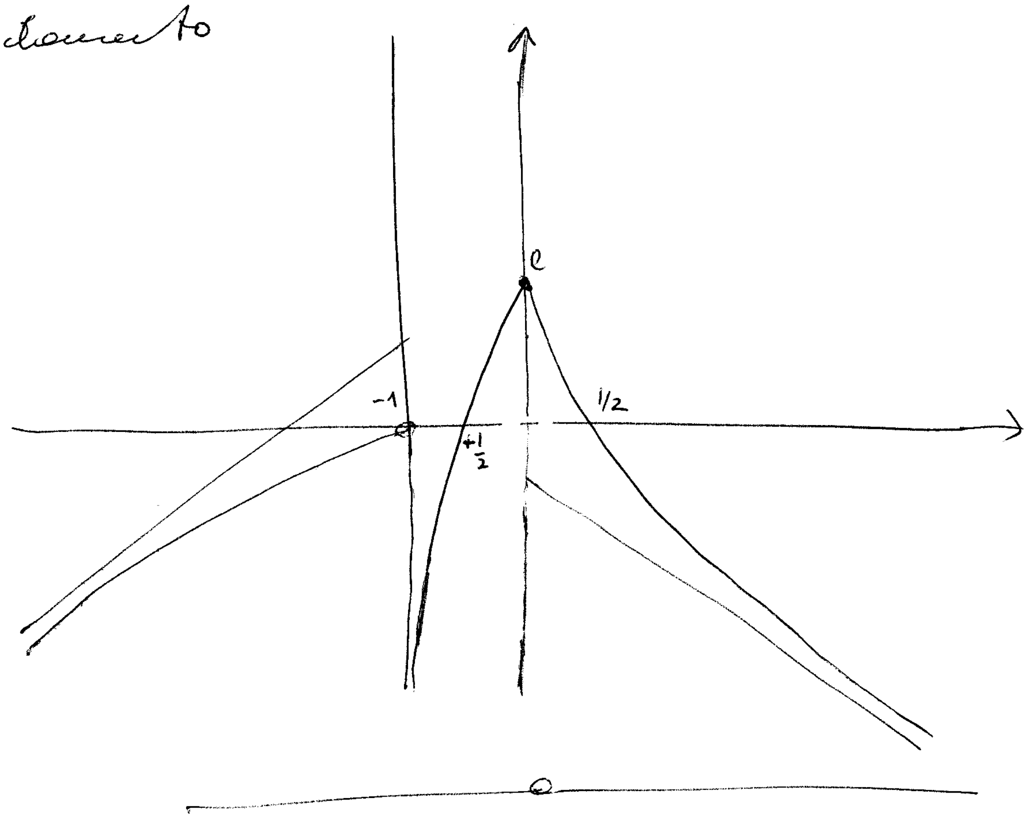
$$\ldots = -\frac{1}{(x+1)^4}\, e^{1/x+1} < 0 \quad \forall x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$$

ossia f è concava in $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

Sia $x>0$: $f''(x) = \ldots = \dfrac{4x+7}{(x+1)^4}\, e^{1/x+1} > 0$

ossia f è convessa $\forall x\in(0,+\infty)$

Andamento



Esercizio 2 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\lg(1+x^a \sin x) - e^{x^2}+1}{(1+3x^2)^a - 1 - e^{-1/x}}$ $(a>0)$

Conviene esaminare il denominatore:

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} = 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^{10}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x^{10}}{e^{1/x}} = 0$

ossia $e^{-1/x} = o(x^{10})$ per $x\to 0^+$

Inoltre $(1+u)^a = 1 + au + \frac{a(a-1)}{2}u^2 + o(u^2)$ per $u\to 0$

da cui segue che $(1+3x^2)^a - 1 = 3ax^2 + \frac{9}{2}a(a-1)x^4 + o(x^4)$ per $x\to 0^+$

Pertanto il Denominatore è $= 3ax^2 + o(x^2)$ per $x\to 0^+$

Ricordando che $e^u = 1 + u + u^2/2 + o(u^2)$ per $u\to 0$, si ha

che $e^{x^2} - 1 = x^2 + x^4/2 + o(x^4)$ per $x\to 0^+$, da cui

$1 - e^{x^2} = -x^2 - x^4/2 + o(x^4)$ per $x\to 0^+$

Siccome $\lg(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$ per $u\to 0$

si ha che $\lg(1+x^a\sin x) = x^a\sin x - \frac{x^{2a}\sin^2 x}{2} + o(x^{2a}\sin^2 x)$ per $x\to 0^+$

Ricordando che $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ per $x \to 0^+$

si ha che

$$\lg(1+x^a \sin x) = x^a\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - \frac{x^{2a}\left(x - x^3/6 + o(x^4)\right)^2}{2}$$

$$+\, o\left(x^{2a+2}\right) \quad \text{per } x \to 0^+$$

$$= x^{a+1} - \frac{x^{a+3}}{6} + o(x^{4+a}) - \frac{1}{2}\left(x^{2a+2} + o(x^{2a+3})\right)$$

$$+\, o(x^{2a+2})$$

$$= x^{a+1} - \frac{x^{a+3}}{6} - \frac{1}{2} x^{2a+2} + o(x^{2a+2}) + o(x^{a+4})$$

per $x \to 0^+$

Pertanto il numeratore è

$$x^{a+1} - \frac{x^{a+3}}{6} - \frac{1}{2} x^{2a+2} - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) + o(x^{2a+2})$$

per $x \to 0^+$

$$= \begin{cases} x^{a+1}\,(1+o(1)) & 0<a<1 \\ -\frac{7}{6} x^4\,(1+o(1)) & a=1 \\ -x^2\,(1+o(1)) & a>1 \end{cases} \quad \text{per } x \to 0^+$$

In conclusione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N}{D} = \lim_{x \to 0^+} \frac{N}{3a x^2 + o(x^2)} = \begin{cases} +\infty & 0<a<1 \\ 0 & a=1 \\ -\frac{1}{3a} & a>1 \end{cases}$$

Esercizio 3 $\quad f_a(x) = \dfrac{2\lg x + 3}{x^a(\lg^2 x + 4\lg x + 5)}$; $a > 0$

3a) convergenza di $\int_0^1 f_a(x)\,dx$: l'unico problema di convergenza è in 0. Osservo che

$$f_a(x) = \frac{\lg x\,(2 + 3/\lg x)}{x^a \lg^2 x\,(1 + 4/\lg x + 5/\lg^2 x)}$$ da cui

segue che
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_a(x)}{\frac{1}{x^a \lg x}} = 2$$
Pertanto $f_a(x)$ e' infinito per $x \to 0^+$ dello stesso ordine di $\frac{1}{x^a \lg x}$. Siccome $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^a \lg x}$ converge se e solo se $a<1$, abbiamo che $\int_0^1 f_a(x)dx$ converge $\iff a<1$

3b) Sia $a=1$: Calcolare $\displaystyle\int_{1/e}^1 \frac{2\lg x+3}{x(\lg^2 x+4\lg x+5)}dx$

Poniamo $t=\lg x$; $e^t = x$, $x>0$, $t\in\mathbb{R}$.

$$F(x) = \int \frac{2\lg x+3}{x(\lg^2 x+4\lg x+5)}dx = \int \frac{2t+3}{(t^2+4t+5)\,e^t}e^t dt$$
$$= \int \frac{2t+3}{t^2+4t+5}dt = \int \frac{2t+4}{t^2+4t+5}dt - \int \frac{dt}{t^2+4t+5}$$

Ma $\displaystyle\int \frac{2t+4}{t^2+4t+5}dt = \lg|t^2+4t+5| + c$; $c\in\mathbb{R}$
(N.B. $t^2+4t+5>0$ $\forall t\in\mathbb{R}$)

e $\displaystyle\int \frac{dt}{t^2+4t+5} = \int \frac{dt}{(t+2)^2+1} = \operatorname{atg}(t+2)+c$; $c\in\mathbb{R}$

Quindi $F(x) = \lg(t^2+4t+5) - \operatorname{atg}(t+2)\Big|_{t=\lg x} + c$; $c\in\mathbb{R}$
$$= \underbrace{\lg(\lg^2 x+4\lg x+5) - \operatorname{atg}(2+\lg x)}_{G(x)} + c; \quad c\in\mathbb{R}$$

Allora $\displaystyle\int_{1/e}^1 f_1(x)dx = G(1)-G(1/e)$
$$= \lg(5) - \operatorname{atg}(2) - [\lg(2) - \operatorname{atg}(1)]$$
$$= \pi/4 - \operatorname{atg}(2) + \lg(5/2).$$

Esercizio 4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lg(2x-2))^n}{n+2}$ 7

Osserviamo che $a_n(x) = (\lg(2x-2))^n/(n+2)$ è definito se e solo se $\boxed{x>1}$

Per il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(\lg(2x-2))^n}{n+2}\right|^{1/n} = |\lg(2x-2)| \;;$$

pertanto se $|\lg(2x-2)|<1$ si ha che $\sum\left|\frac{(\lg(2x-2))^n}{n+2}\right|$ converge

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{e} < 2x-2 < e$$

$$1/e+2 < 2x < e+2$$

$$1+\frac{1}{2e} < x < 1+e/2$$

Inoltre se $|\lg(2x-2)|>1$ si ha che $\sum |\cdots|$ DIVERGE

$$\Uparrow$$

$$x\in\left(1, 1+\tfrac{1}{2e}\right)\cup\left(1+\tfrac{e}{2}, +\infty\right)$$

Sia ora $x = 1+\frac{1}{2e}$: $a_n\left(1+\frac{1}{2e}\right) = \frac{(-1)^n}{n+2}$ che converge per il criterio di Leibniz

Sia ora $x = 1+\frac{e}{2}$: $a_n\left(1+\frac{e}{2}\right) = \frac{1}{n+2}$ che DIVERGE

Notiamo infine che per $x\in\left(1, 1+\frac{1}{2e}\right)\cup\left(1+\frac{e}{2}, +\infty\right)$, abbiamo che $a_n(x) \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ e pertanto $\sum a_n(x)$ non può convergere.