Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 24 gennaio 2018 (Primo appello, a.a. 2017-2018)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \sqrt{9x^2 + 2x} - 3x$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

NOTA BENE: La convessità di $f(x)$ non è richiesta.

Esercizio 2. Studiare, per $a \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^a \Big(\log(n^2 + 2) - \log(n^2) \Big).$$

Esercizio 3. Sia $a > -1/2$, e sia

$$f(t) = \frac{\log(1+t)}{\sin(t^{2a+1} + 3t^2)}.$$

(3.a) Determinare, per ogni $a > -1/2$, il valore $\ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$ tale che $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \ell$.

(3.b) Se $\ell \in \{0, +\infty\}$, determinare, per ogni $a > -1/2$, l'ordine di infinitesimo o di infinito di $f(t)$ per $t \to 0^+$.

(3.c) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$ per ogni $a > -1/2$.

Esercizio 4. Calcolare tutte le primitive di $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2\sin x + 2}$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema di Bolzano-Weierstraß.

(5.b) Dimostrare la disuguaglianza di Jakob Bernoulli, ossia: [sia $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$; allora $(1+x)^n \geq 1 + nx$ per ogni $n \in \mathbb{N}$].

Tempo: 3 ore.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 24 gennaio 2018 (Primo appello, a.a. 2017-2018)

Cognome e nome:____________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x} - 2x$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

NOTA BENE: La convessità di $f(x)$ non è richiesta.

Esercizio 2. Studiare, per $a \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^a \Big(\log(n^3 + 3) - \log(n^3)\Big).$$

Esercizio 3. Sia $a > -1/3$, e sia

$$f(t) = \frac{1 - \cos t}{\sin(t^{3a+1} + t^2)}.$$

(3.a) Determinare, per ogni $a > -1/3$, il valore $\ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$ tale che $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \ell$.

(3.b) Se $\ell \in \{0, +\infty\}$, determinare, per ogni $a > -1/3$, l'ordine di infinitesimo o di infinito di $f(t)$ per $t \to 0^+$.

(3.c) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$ per ogni $a > -1/3$.

Esercizio 4. Calcolare tutte le primitive di $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + 2\cos x + 5}$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

(5.b) Dimostrare la proprietà di Archimede, ossia: per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$.

Tempo: 3 ore.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 24 gennaio 2018 (Primo appello, a.a. 2017-2018)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

NOTA BENE: La convessità di $f(x)$ non è richiesta.

Esercizio 2. Studiare, per $a \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^a \Big(\log(n+1) - \log n\Big).$$

Esercizio 3. Sia $a > -2$, e sia

$$f(t) = \frac{e^t - 1}{\sin(t^{a+2} + t^3)}.$$

(3.a) Determinare, per ogni $a > -2$, il valore $\ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$ tale che $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \ell$.

(3.b) Se $\ell \in \{0, +\infty\}$, determinare, per ogni $a > -2$, l'ordine di infinitesimo o di infinito di $f(t)$ per $t \to 0^+$.

(3.c) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$ per ogni $a > -2$.

Esercizio 4. Calcolare tutte le primitive di $f(x) = \frac{\log x}{x(\log^2 x + 2\log x + 3)}$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema di Bernoulli-de l'Hôpital (limiti al finito, caso di indeterminazione: rapporto di infinitesimi).

(5.b) Dimostrare la proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, ossia: per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $z \in \mathbb{Q}$ tale che $z \le x < z + \varepsilon$.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 24 gennaio 2018 (Primo appello, a.a. 2017-2018)

Cognome e nome:____________________ Matricola:__________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \sqrt{2x^2 + x} - \sqrt{2}x$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

NOTA BENE: La convessità di $f(x)$ non è richiesta.

Esercizio 2. Studiare, per $a \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^a \Big(\log(n^4 + 4) - \log(n^4) \Big).$$

Esercizio 3. Sia $a > -3/2$, e sia

$$f(t) = \frac{\arctan t}{\sin(t^{2a+3} + t^3)}.$$

(3.a) Determinare, per ogni $a > -3/2$, il valore $\ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$ tale che $\lim_{t \to 0^+} f(t) = \ell$.

(3.b) Se $\ell \in \{0, +\infty\}$, determinare, per ogni $a > -3/2$, l'ordine di infinitesimo o di infinito di $f(t)$ per $t \to 0^+$.

(3.c) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f(t)\, dt$ per ogni $a > -3/2$.

Esercizio 4. Calcolare tutte le primitive di $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+4}$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema riguardante la Formula di Taylor con resto di Peano.

(5.b) Dimostrare la proprietà della parte intera, ossia: per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un unico $n \in \mathbb{Z}$ tale che $n \le x < n + 1$.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Esame Analisi 1 gennaio 2018

Risoluzione Fila A

Esercizio 1. Studiare $f(x) = \sqrt{9x^2+2x} - 3x$

Df: bisogna imporre che $9x^2+2x \geq 0 \iff x(9x+2) \geq 0$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 9x+2 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 0 \\ 9x+2 \leq 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad [0,+\infty) \cup (-\infty, -2/9]$$

Quindi $D_f = (-\infty, -\frac{2}{9}] \cup [0, +\infty)$.

PARITÀ

Osserviamo che f non è né pari né dispari perché D_f non è simmetrico rispetto al punto 0 (infatti $\frac{1}{8} \in D_f$ e $-\frac{1}{8} \notin D_f$)

Segno
$f(x) \geq 0 \iff \begin{cases} \sqrt{9x^2+2x} \geq 3x \\ x \in D_f \end{cases}$ siccome $x \in D_f$ si ha che $9x^2+2x \geq 0$;

pertanto le $x \in (-\infty, -2/9]$ automaticamente verificano che $f(x) \geq 0$.

Sia ora $x \geq 0$: in tal caso $\sqrt{9x^2+2x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{monotonia di } \sqrt{\ }}}{\geq} \sqrt{9x^2} = 3|x| \underset{\substack{\uparrow \\ x\geq 0}}{=} 3x$

e quindi nuovamente $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, +\infty)$.

In conclusione $f(x) \geq 0 \ \forall x \in D_f$.

Osserviamo infine che $f(x) = 0 \iff \begin{cases} \sqrt{9x^2+2x} = 3x \\ x \in D_f \end{cases}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{per } x\in D_f \\ \text{si ha } f\geq 0}}{\iff} \begin{cases} 9x^2+2x = 9x^2 \\ x \in D_f \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ x \in D_f \end{cases} \iff x = 0.$$

Quindi 0 è MINIMO ASSOLUTO per f e 0 è punto di minimo assoluto per f.

Limiti I punti di accumulazione per D_f sono $-\infty$, $-\frac{2}{9}$ da sinistra, 0 da destra, $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+2x} - 3x \; \frac{\sqrt{9x^2+2x}+3x}{\sqrt{9x^2+2x}+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2+2x-9x^2}{\sqrt{9x^2+2x}+3x} = \%$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3|x|\sqrt{1+\frac{2}{9x}}+3x} \underset{\substack{\uparrow\\ x\to+\infty\\ \text{quindi mi restringo a } x>0}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x\left(\sqrt{1+\frac{2}{9x}}+1\right)}$$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+\underbrace{2/9x}_{\downarrow 0^+}}+1}_{\to 2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$ La retta $y=\frac{1}{3}$ è asintoto orizz. a $+\infty$ ~~destro~~

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{\sqrt{9x^2+2x}}_{\substack{\downarrow\\ +\infty}} \underbrace{-3x}_{\substack{\downarrow\\ +\infty}} = +\infty \Rightarrow$$
a) $\nexists$ as. orizz. a $-\infty$;
b) è possibile che esista un asintoto obliquo a $-\infty$.
c) f non ha massimo assoluto

Studio as. obliquo a $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2+2x}}{\underbrace{x}_{<0}} - 3 \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{9x^2+2x}{x^2}}-3$$

pertanto, siccome $\sqrt{x^2}=|x|=-x$ per $x<0$

$$= \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\underbrace{9+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\downarrow 0}}_{\to 9}} - 3 = -3-3 = -6 = m$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+2x}-3x+6x$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+2x}+3x = \lim_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2}\sqrt{1+\frac{2}{9x}}+3x$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ x<0}}{=} \lim_{x\to-\infty}(-3x)\left[\sqrt{1+\frac{2}{9x}}-1\right]\frac{\sqrt{1+\frac{2}{9x}}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{9x}}+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(-3x)}{\sqrt{1+2/9x}+1}\left(\cancel{1}+\frac{2}{9x}-\cancel{1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2/3}{\sqrt{1+\underbrace{2/9x}_{\to 0}}+1} = -\frac{1}{3}$$

Pertanto la retta $\boxed{y=-6x-\frac{1}{3}}$ è asintoto obliquo a $-\infty$

Osservando che f è continua dove definita perché è composizione e somma di funzioni continue;

si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to\left(-\frac{2}{9}\right)^-} f(x) = f(-2/9) = (-3)\left(-\frac{2}{9}\right) = 6$$

In particolare: f non ha asintoti verticali.

<u>Derivabilità</u>: Abbiamo già notato che f è continua dove definita. Inoltre, ricordando che $\sqrt{u}$ non è derivabile in $u_0 = 0$, abbiamo che f è derivabile solamente in $D_f \setminus \{-\frac{2}{9}, 0\}$

$$= (-\infty, -2/9) \cup (0, +\infty)$$

perché è ivi somma, composizione di funzioni derivabili.

Si ha ~~due~~ $\forall x \in D_f \setminus \{-2/9, 0\}$ che

$$f'(x) = \frac{18x+2}{2\sqrt{9x^2+2x}} - 3 = \frac{18x+2-6\sqrt{9x^2+2x}}{2\sqrt{9x^2+2x}}.$$

Inoltre $\lim_{x\to(-2/9)^-} f'(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$

Infine si noti che per $x \in \underbrace{D_f \setminus \{-2/9, 0\}}_{= D_f^{DER}}$ si ha che

$$(*)\ f'(x) \geq 0 \iff 18x+2 \geq 6\sqrt{9x^2+2x} \quad (\geq 0 \quad \forall x \in D_f^{der})$$

Pertanto se $x < -2/9 \Rightarrow 18x+2 < 0$ e la $(*)$ non è verificata; ossia $f'(x) < 0 \ \forall x < -2/9$ e

f è strettamente decrescente in $(-\infty, -2/9)$.

<u>Se $x > 0$</u>: $f'(x) > 0 \iff (18x+2)^2 > 36(9x^2+2x) \iff$

$$324x^2 + 4 + 72x > 324x^2 + 72x \iff 4 > 0.$$

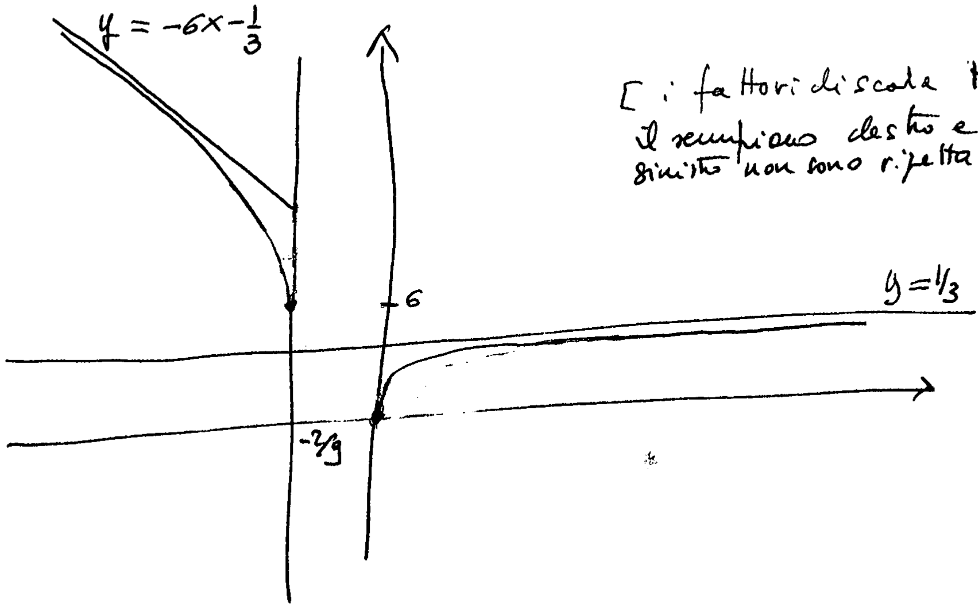
pertanto $f'(x) > 0 \ \forall x > 0$ e quindi

f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$

Inoltre f non ammette punti critici.

Notiamo però che: 0 è punto di minimo assoluto (già osservato) e $-2/9$ è punto di minimo relativo (segue dalla stretta monotonia di f in $(-\infty,-2/9)$.

Possiamo ora fornire un andamento qualitativo di f (visto che lo studio della convessità non è richiesto)



[i fattori di scala tra il semipiano destro e sinistro non sono rispettati].

Esercizio 2 Al variare di $a \in \mathbb{R}$ si studi la convergenza

di $\sum_{n=1}^{+\infty} n^a(\lg(n^2+2)-\lg(n^2))$

Sia $b_n = n^a(\lg(n^2+2)-\lg(n^2)) = n^a\left[\lg\left(1+\frac{2}{n^2}\right)-1\right]$

Ricordando che $\lg(1+x) = x+o(x)$ per $x \to 0^+$, si ha che

$$b_n = n^a\left(\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{2}{n^2}\right)\right)$$
$$= 2n^{a-2}(1+o(1)) \quad \text{per } n\to+\infty$$

Pertanto se $a \geq 2$ si ha che $b_n \to +\infty$ e quindi la serie $\sum b_n$ non può convergere perché la condizione necessaria di convergenza è falsa.

Notando inoltre che

$$\lg(n^2+2) - \lg(n^2) \geq 0 \iff \lg(n^2+2) \geq \lg(n^2)$$

$$\iff n^2+2 \geq n \iff 2 \geq 0$$

abbiamo che $b_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Quindi $\Sigma\, b_n$ è DIVERGENTE per ogni $a \geq 2$.

Sia ora $a < 2$: Il carattere della $\sum^{+\infty} b_n$, $b_n \geq 0$, è lo stesso della serie $\sum_{n=1} n^{a-2}$, $a < 2$.

Sia $c_n = n^{a-2}$; Per $a < 2$ si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{n^{2-a}}_{\to+\infty}} = 0$$ per i noti teoremi sui limiti ($a<2 \Rightarrow 2-a>0$)

Quindi $\Sigma\, c_n$ verifica la cond. necessaria di convergenza per ogni $a < 2$.

Confrontando c_n con $1/n^\alpha$, $\alpha > 0$; si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{1/n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^{2-a}} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 2-a \\ 1 & \alpha = 2-a \\ 0 & \alpha < 2-a \end{cases}$$

Dobbiamo quindi porre che $2-a > 1$ ossia

$1-a > 0 \iff a < 1$ per avere che $\Sigma\, c_n$ converge.

Il criterio asintotico implica allora che $\Sigma\, b_n$ converge per $a < 1$. e non converge (ossia diverge perché $b_n \geq 0$) per $1 \leq a < 2$)

In conclusione

$$\Sigma\, b_n \text{ converge} \iff a < 1$$

Esercizio 3

Sia $\alpha > -1/2$ e sia $f(t) = \dfrac{\lg(1+t)}{\sin(t^{2a+1}+3t^2)}$.

1) Determinare il valore $l = \lim\limits_{t\to0^+} f(t)$; $l \in \tilde{\mathbb{R}}$.

2) Se $l \in \{0, +\infty\}$, determinare l'ordine di infinitesimo o infinito di $f(t)$ per $t \to 0^+$

3) Studiare la convergenza di $\int_0^1 f(t)\,dt$.

3.1) Abbiamo ($a > -1/2 \Rightarrow 2a+1>0$)

$$\lim_{t\to0^+} f(t) = \lim_{t\to0^+} \underbrace{\frac{\lg(1+t)}{t}}_{\to 1} \; \frac{t}{t^{2a+1}+3t^2} \; \underbrace{\frac{t^{2a+1}+3t^2}{\sin(t^{2a+1}+3t^2)}}_{\to 1}$$

limiti notevoli

$$= \lim_{t\to0^+} \frac{1}{t^{2a}+3t} = \begin{cases} +\infty & a>0\\ 1 & a=0 \\ 0 & -1/2<a<0\end{cases}$$

3.2) Analogamente a quanto sopra per $a \in (-1/2, 0) \cup (0, +\infty)$ abbiamo

$\underline{a>0}$ $$\lim_{t\to0^+} \frac{f(t)}{1/t^\alpha} \overset{(\alpha>0)}{=} \lim_{t\to0^+} \frac{t^\alpha}{t^{2a}+3t} = \lim_{t\to0^+} \frac{t^\alpha}{t(\underbrace{t^{2a-1}}_{\to 0}+3)}$$

se $2a-1 \geq 0$ ($a \geq 1/2$)

$$= \frac{1}{3} \lim_{t\to0^+} t^{\alpha-1} = \{\, 1/3 \quad \text{per } \alpha = 1$$

Quindi se $a \geq 1/2$, $f(t) \xrightarrow[t\to0^+]{} +\infty$ di ordine 1

$\underline{0<a<1/2}$ $$\lim_{t\to0^+} \frac{f(t)}{1/t^\alpha} = \lim_{t\to0^+} \frac{t^\alpha}{t^{2a}+3t} = \lim_{t\to0^+} \frac{t^\alpha}{t^{2a}(1+3\underbrace{t^{1-2a}}_{\to 0^+})}$$

$$= 1 \quad \text{per } \alpha = 2a$$

Quindi se $0<a<1/2$, $f(t) \xrightarrow[t\to0^+]{} +\infty$ di ordine $2a$

Sia $-1/2 < a < 0$ allora $(\alpha > 0)$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t^\alpha} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^\alpha(t^{2a}+3t)} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^{\alpha+2a}(1+3\underbrace{t^{\overbrace{1-2a}^{>0}}}_{\to 0^+})}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^{\alpha+2a}} = 1 \iff \alpha = -2a \in (0,1)$$

per $a \in (-1/2, 0)$

In tal caso quindi $(a \in (-1/2, 0))$

$$f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 \quad \text{di ordine } -2a \in (0,1).$$

<u>3c)</u> Per la convergenza dell'integrale si possono avere problemi solamente nel caso in cui $f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty$.

Pertanto per $a \in (-1/2, 0]$ l'integrale è di Riemann e quindi converge.

Sia $a > 0$: per il punto (3.2) sappiamo che per

$$a \geq 1/2 : f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty \quad \text{di ordine } 1$$

$$0 < a < 1/2 : f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} +\infty \quad \text{di ordine } 2a$$

Il criterio dell'ordine di infinito ci permette di concludere che $(a>0)$ $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge $\iff 0 < 2a < 1$

$\iff 0 < a < 1/2$

In conclusione $\int_0^1 f(t)\,dt$ converge per $a \in (-1/2, 1/2)$.

Ex 4 Calcolare tutte le primitive di

$$f(x) = \frac{\sin x \cos x}{(\sin x)^2 + 2\sin x + 2}$$

4): $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{(\sin x)^2 + 2\sin x + 2}\,dx$; si pone $t = \sin x$ $\quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$

$\Rightarrow g(t) = \arcsin t \quad t \in (-1, 1)$

Allora
$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt \Big]_{x=g(t)}$$
$$= \int \frac{t}{t^2+2t+2}\,dt \Big]_{x=g(t)}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+2t+2}\,dt \Big]_{x=g(t)}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t+2}{t^2+2t+2}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{2}{t^2+2t+2}\,dt \Big]_{x=g(t)}$$
$$= \frac{1}{2}\lg|t^2+2t+2| - \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} \Big]_{x=g(t)}$$
$$= \frac{1}{2}\lg|t^2+2t+2| - a\,tg(t+1) + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$F(x) := \boxed{= \frac{1}{2}\lg(\sin^2 x + 2\sin x + 2) + a\,tg(\sin x + 1)} + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

[perché $t^2+2t+2 = (t+1)^2+1 \geq 1 > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$]

per ogni $x \in (-\pi/2, \pi/2) =: I$

Se $x \in \mathbb{R} \setminus I$, basta derivare $F(x) = \frac{1}{2}\lg(\dots) + a\,tg(\dots)$ per osservare che anche in tale regione si ha che $F(x)$ è una primitiva di f

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 22 febbraio 2018 (Secondo appello, a.a. 2017-2018)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	8	6	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = (3 - |x|)\exp(\frac{1}{x+3})$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

(1.e) **Nota bene:** lo studio della convessità non è richiesto; $\exp(u) := e^u$.

Esercizio 2. Calcolare tutte le primitive di $f(t) = \frac{t-2}{(t^2+1)(t+2)}$.

Esercizio 3. Per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, studiare la convergenza di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2-3} \frac{(x-1)^n}{(x+1)^n}$$

Esercizio 4. Per ogni $a > 0$, calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(\sinh x) - \cosh x}{\log(1 + ax^2) - \sinh(x^2)}$$

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema fondamentale del Calcolo Integrale.

(5.b) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Dimostrare che se $f\colon I \to \mathbb{R}$ è derivabile in I e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$ allora f è strettamente crescente in I.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 22 febbraio 2018 (Secondo appello, a.a. 2017-2018)

Cognome e nome:____________________ Matricola:__________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	8	6	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = (|x| - 2)\exp(\frac{1}{x-2})$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

(1.e) **Nota bene:** lo studio della convessità non è richiesto; $\exp(u) := e^u$.

Esercizio 2. Calcolare tutte le primitive di $f(t) = \frac{t+2}{(t^2+1)(t-3)}$.

Esercizio 3. Per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2+3} \frac{(x-2)^n}{(x+2)^n}$$

Esercizio 4. Per ogni $a > 0$, calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(e^x - 1) - \cos x}{\log(1 - ax^3) + \sin(x^3)}$$

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema del differenziale.

(5.b) Dimostrare il teorema di unicità del limite.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 22 febbraio 2018 (Secondo appello, a.a. 2017-2018)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	8	6	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = (2 - |x|)\exp(\frac{1}{x+2})$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

(1.e) **Nota bene:** lo studio della convessità non è richiesto; $\exp(u) := e^u$.

Esercizio 2. Calcolare tutte le primitive di $f(t) = \frac{t+2}{(t^2+1)(t-2)}$.

Esercizio 3. Per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, studiare la convergenza di

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2-2} \frac{(x+1)^n}{(x-1)^n}$$

Esercizio 4. Per ogni $a > 0$, calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\log(1 + ax^2) - \sin(x^2)}$$

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema della media integrale.

(5.b) Dimostrare la condizione necessaria del primo ordine per punti estremali interni.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 22 febbraio 2018 (Secondo appello, a.a. 2017-2018)

Cognome e nome:____ Matricola:________________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	8	6	8	s/n	32

Esercizio 1. Sia $f(x) = (|x| - 3)\exp(\frac{1}{x-3})$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

(1.e) **Nota bene:** lo studio della convessità non è richiesto; $\exp(u) := e^u$.

Esercizio 2. Calcolare tutte le primitive di $f(t) = \frac{t+3}{(t^2+1)(t-3)}$.

Esercizio 3. Per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, studiare la convergenza di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+2}{n^2-3} \frac{(x+1)^n}{(x-2)^n}$$

Esercizio 4. Per ogni $a > 0$, calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(e^x - 1) - \cosh x}{\log(1 - ax^3) - \sinh(x^3)}$$

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il criterio integrale per la convergenza delle serie numeriche.

(5.b) Dimostrare che se f è debolmente crescente e derivabile nel suo dominio I, I intervallo, allora $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Esame di Analisi Matematica I

II Appello del 22/02/2018

Risoluzione File G

Esercizio 1 Studiare $f(x) = (2-|x|)\, e^{\frac{1}{x+2}}$ (convessità non richiesta)

- D_f: $x+2 \neq 0$; ossia $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
- f non è né pari né dispari (D_f non simmetrico rispetto a 0)
- $f \geq 0 \iff \begin{cases} 2-|x| \geq 0 \\ x \in D_f \end{cases} \iff \begin{cases} |x| \leq 2 \\ x \in D_f \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [-2,2] \\ x \in D_f \end{cases}$

quindi $\boxed{\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \iff x \in (-2, 2]; \quad f(x) = 0 \iff x = 2 \\ f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty). \end{array}}$

Limiti e asintoti: i punti di accumulazione di D_f sono $-\infty, -2, +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x>0)}} \underbrace{(2-x)}_{\to -\infty}\, \underbrace{e^{\overbrace{1/x+2}^{\to 0}}}_{\to 1} = -\infty$$

(f non ha minimo globale)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x<0}} \underbrace{(2+x)}_{\to -\infty}\, \underbrace{e^{\overbrace{1/x+2}^{\to 0}}}_{\to 1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to-2^+ \\ (x\in(-2,-2+\delta) \\ \text{tale che } x<0)}} \underbrace{(2+x)}_{\to 0^+}\, \underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{x+2}}^{\to 0^+ \;\to +\infty}}}_{\to +\infty}$$

indeterminato di tipo $0\cdot\infty$

poniamo $u = (2+x)^{-1}$ e studiamo $\lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$

per la gerarchia degli infiniti

Pertanto

$\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$ (f non ha massimo globale) ($x=-2$ è asintoto verticale destro)

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \underbrace{(2+x)}_{\to 0^-}\, \underbrace{e^{\overbrace{1/x+2}^{\to -\infty}}}_{\to 0^+} = 0^-$$

Studio asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{2-x}{x}}_{\downarrow\, -1} \underbrace{e^{\frac{1}{x+2}}}_{\downarrow\, 1} = -1 \; := m$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} (2-x)\, e^{\frac{1}{x+2}} + x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \Big[2 \underbrace{e^{1/x+2}}_{\downarrow\, 1} + x \left(1 - e^{1/x+2}\right) \Big]$$

$$= 2 + \lim_{x\to+\infty} x \, \frac{1 - e^{\frac{1}{x+2}}}{\frac{1}{x+2}} \cdot \left(\frac{1}{x+2}\right)$$

$$= 2 + \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x}{x+2}}_{\downarrow\, 1} \; \frac{1 - e^{\frac{1}{x+2}}}{\frac{1}{x+2}}$$

Inoltre con la sostituzione $u = \frac{1}{x+2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$ si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{x+2}}}{1/x+2} = \lim_{u\to0^+} \frac{1-e^u}{u} = -1 \quad \text{(limiti notevoli)}$$

Pertanto: $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + x) = -1 + 2 = 1$

Quindi $\boxed{y = -x + 1 \text{ è ASINTOTO OBLIQUO a } +\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{2+x}{x}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{e^{\frac{1}{x+2} \to 0}}_{\downarrow\, 1} = 1 \; := m$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to-\infty} (2+x)\, e^{\frac{1}{x+2}} - x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \Big(\underbrace{2 e^{\frac{1}{x+2}}}_{\downarrow\, 2} + x \left(e^{\frac{1}{x+2}} - 1\right) \Big)$$

$$= 2 + \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{x}{x+2}}_{\downarrow\, 1} \; \frac{e^{1/x+2} - 1}{1/x+2}$$

La sost. $u = \frac{1}{x+2} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^-$ si ha che $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{1/x+2} - 1}{1/x+2} = \lim_{u\to0^-} \frac{e^u - 1}{u} = 1$ (limiti notevoli)

Quindi $\boxed{y = x+3 \text{ è asintoto obliquo a } -\infty}$

<u>continuità e derivabilità</u>: f è composizione di f. continue in D_f e pertanto è continua $\forall x \in D_f$.

<u>Inoltre</u> per ogni $x \neq 0$; $x \in D_f$, la funzione è prodotto e composizione di funzioni derivabili. Quindi

f è derivabile in $x \in (-\infty,-2) \cup (-2,0) \cup (0,+\infty)$.

Il punto $\bar{x} = 0$ è di NON derivabilità per f.

<u>Sia $x>0$</u>: allora $f(x) = (2-x)\, e^{\frac{1}{x+2}}$ da cui segue

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{x+2}} + (2-x)\, e^{\frac{1}{x+2}} \cdot \left(-\frac{1}{(x+2)^2}\right)$$

$$= -e^{\frac{1}{x+2}}\left[+1+\frac{2-x}{(x+2)^2}\right] = -e^{\frac{1}{x+2}}\,\frac{x^2+3x+6}{\underbrace{(x+2)^2}_{>0\ \forall x\in D_f}}$$

siccome $x^2+3x+6>0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\boxed{f'(x) < 0 \quad \forall x > 0}$$

Pertanto $\boxed{f \text{ è strettamente decrescente in } (0,+\infty)}$

Sia <u>$x \in (-\infty,-2) \cup (-2,0)$</u>: allora $f(x) = (2+x)\, e^{\frac{1}{x+2}}$ da cui

segue: $f'(x) = e^{\frac{1}{x+2}} + (2+x)\, e^{\frac{1}{x+2}}\left(-\frac{1}{(x+2)^2}\right)$

$$= e^{\frac{1}{x+2}}\left(1-\frac{2+x}{(x+2)^2}\right) = e^{\frac{1}{x+2}}\left(1-\frac{1}{x+2}\right)$$

$$= \underbrace{e^{\frac{1}{x+2}}}_{>0\ \forall x\in\mathbb{R}} \cdot \frac{x+1}{x+2} > 0 \iff \begin{cases} \frac{x+1}{x+2} > 0 \\ x<0 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

Siccome $\frac{x+1}{x+2} > 0 \iff \left(\begin{cases} x+1>0 \\ x+2>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+1<0 \\ x+2<0 \end{cases}\right)$ abbiamo che

$f'(x) > 0$ per $x \in (-\infty,-2) \cup (-1,0)$

$f'(x) < 0$ per $x \in (-2,-1)$

$f'(-1) = 0$ (-1 è punto critico)

Quindi

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ è strettamente crescente in } (-\infty,-2)\cup(-1,0) \\ f \text{ è } \quad \text{"} \quad \text{ decrescente in } \quad (-2,-1) \end{array}}$$

Mettendo insieme i due casi otteniamo che:

<u>-1 è pto di minimo locale per f</u>

<u>0 è pto di massimo locale per f</u> (si ricordi che 0 è di non derivabilità)

$$f(-1)=e\ ;\quad f(0)=2e^{1/2}.$$

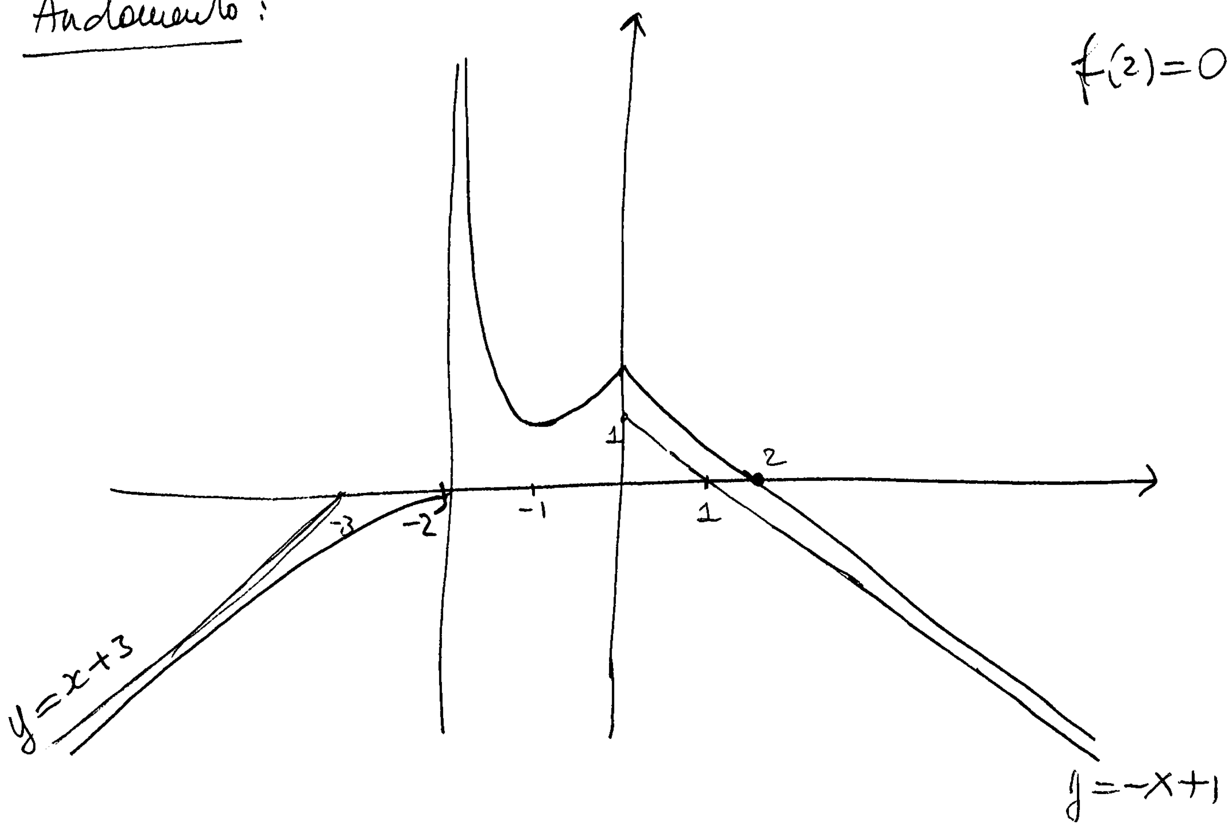
<u>Osservando che</u> $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x+2}}\,\dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{1}{2}e^{1/2}$

e che $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(-e^{\frac{1}{x+2}}\,\dfrac{x^2+3x+6}{(x+2)^2}\right) = -\dfrac{3}{2}e^{1/2}$

possiamo concludere che $\boxed{0 \text{ è pto Angoloso}}$

<u>Andamento:</u>

$f(2)=0$



Esercizio 2   Calcolare $\displaystyle\int \frac{t+2}{(t^2+1)(t-2)}\,dt$ 5

Siamo in presenza di un integranda razionale il cui denominatore ha una radice reale semplice (2) e una radice complessa coniugata $(i,-i)$. Il metodo di integrazione suggerisce di porre

$$\frac{t+2}{(t^2+1)(t-2)} = \frac{A}{t-2} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{A(t^2+1)+(Bt+C)(t-2)}{(t-2)(t^2+1)}$$

$$= \frac{(A+B)t^2+(C-2B)t+A-2C}{(t-2)(t^2+1)}$$

da cui segue che

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-2B=1 \\ A-2C=2 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A \\ C+2A=1 \\ A-2C=2 \end{cases} \quad \begin{cases} C+4C+4=1 \\ A=2C+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5C=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-4/5 \\ C=-3/5 \\ A=-6/5+2=4/5 \end{cases}$$

Pertanto

$$\int \frac{t+2}{(t^2+1)(t-2)}\,dt = \int \frac{4/5}{t-2}\,dt + \int \frac{-4/5\,t-3/5}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{4}{5}\lg|t-2| - \frac{1}{5}\int \frac{4t+3}{t^2+1}\,dt$$

Ma $\displaystyle\int \frac{4t+3}{t^2+1}\,dt = 2\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt + 3\int \frac{dt}{t^2+1}$

$$= 2\lg|t^2+1| + 3\,\mathrm{arctg}(t) + c;\ c\in\mathbb{R}.$$

In conclusione

$$\int \frac{t+2}{(t^2+1)(t-2)}\,dt = \frac{4}{5}\lg|t-2| - \frac{2}{5}\lg(t^2+1) - \frac{3}{5}\,\mathrm{artg}(t) + c;\ c\in\mathbb{R}$$

NB. Dominio dell'integrando non è un intervallo pertanto la costante arbitraria è in realtà

./.

una funzione costante a tratti: $\begin{cases} c_1 & \text{se } x < 2 \\ c_2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

Esercizio 3 Studiare per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie $$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2-2} \, \frac{(x+1)^n}{(x-1)^n}.$$

È evidente che $x \neq 1$. Sia $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e
$$a_n(x) = \frac{n+1}{n^2-2} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n \quad \text{per ogni } x \in D.$$
Utilizziamo il criterio della radice:
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n(1+1/n)}{n^2(1-2/n)}} \left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}_{\to 1} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1+1/n}{1-2/n}}}_{\to 1} \left|\frac{x+1}{x-1}\right| \quad \forall x \in D$$
$$= \left|\frac{x+1}{x-1}\right|$$
Pertanto per ogni $x \in D$ tale che $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 1$, si ha che $\sum a_n(x)$ converge assolutamente; Risolvendo $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 1$ si ha che $x < 0$. Pertanto per $x < 0$ si ha che $\sum a_n(x)$ converge assolutamente.

Sia ora $x \in D$ tale che $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 1$: ossia $x = 0$ ed in tal caso $\frac{x+1}{x-1} = -1$. La serie diviene allora
$$\sum a_n(0) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2-2}(-1)^n = \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2-2}.$$
Sia $b_n = \frac{n+1}{n^2-2}$. Abbiamo che, per $n \geq 3$, $b_n \geq 0$ ed inoltre $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Sia $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2}$; $x \geq 3$.

Osserviamo che
$$f'(x) = \frac{(x^2-2)-(x+1)2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-x^2-2x-2}{(x^2-2)^2}$$
$$= -\frac{x^2+2x+2}{(x^2-2)^2} = -\frac{\overbrace{(x+1)^2+1}^{>0 \ \forall x \in \mathbb{R}}}{\underbrace{(x^2-2)^2}_{>0 \ \forall x \geq 3}}$$
Pertanto $f'(x) < 0$ $\forall x \geq 3$, ossia f è decrescente strettamente per $x \geq 3$. Di conseguenza $b_n = f(n)$ è succ. decrescente. In conclusione, applicando

il criterio di Leibniz, si ha che $\sum a_n(0) = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n^2-2}\right)(-1)^n$ è convergente. 7

Quindi $\sum_{n=3}^{+\infty} b_n(x)$ converge se e solo se $x \leq 0$.

Esercizio 4

Calcolare, per $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\lg(1+\alpha x^2) - \sin(x^2)}.$$

Osservo che sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi per $x \to 0$.

Siccome $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5)$ per $y \to 0$

abbiamo che

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{24}(\sin x)^4 + o((\sin x)^5)$$

per $x \to 0$

D'altra parte

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$

e quindi

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{x^4}{24}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^4 + o(x^5)$$

Quindi

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{x^4}{36} + o(x^6) - \frac{x^2}{3} + o(x^3) + o(x^5)\right) +$$

$$+ \frac{x^4}{24}\left(1 + 4\underbrace{\left(-\frac{x^2}{6} + o(x^3)\right) + o(x^2)}_{\text{usando } (1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u)}\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right) +$$

$$+ \frac{x^4}{24}\left(1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^5) + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{36} + o(x^6)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0$$

Pertanto

$$\cos(\sin x) - \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$= \frac{x^4}{6} + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0$$

8

Esaminiamo il denominatore:

$$\lg(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4) \quad \text{per } y \to 0$$

da cui segue che, per $\alpha > 0$, si ha

$$\lg(1+\alpha x^2) = \alpha x^2 - \frac{1}{2}(\alpha x^2)^2 + \frac{1}{3}(\alpha x^2)^3 - \frac{1}{4}(\alpha x^2)^4 + o(x^8) \quad \text{per } x \to 0$$

D'altra parte $\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^8)$ per $x \to 0$

Quindi

$$\lg(1+\alpha x) = \alpha x^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 x^4 + \frac{\alpha^3}{3}x^6 + o(x^6) - x^2 + \frac{x^6}{6} + o(x^8)$$

$$= (\alpha - 1)x^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$

Notiamo che per $\alpha \neq 1$ ($\alpha > 0$) il denominatore è infinitesimo di ordine 2 per $x \to 0$ e che per $\alpha = 1$ esso è di ordine 4.

In conclusione:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\lg(1+\alpha x^2) - \sin(x^2)} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4/6 + o(x^5)}{(\alpha-1)x^2 + o(x^2)} & \alpha \neq 1, \ \alpha > 0 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4/6 + o(x^5)}{-x^4/2 + o(x^4)} & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \neq 1, \alpha > 0 \\ -1/3 & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$$

per il principio di sostituzione degli infinitesimi di ordine superiore.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 26 giugno 2018 (Terzo appello, a.a. 2017-2018)

Cognome e nome:____________________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = 3\sqrt{|x^2-1|} - |x| + 1$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-x^2} - \cosh(ax) - \sin x}{\log(1+\tan x) - x}$$

Esercizio 3. Studiare per quali $b \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 x e^{3x}(e^{3x}-1)^{b/5}\,\mathrm{d}x,$$

e calcolarlo per $b = -5/2$.

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy: $y(x)y'(x) = x + x(y(x))^2$; $y(0) = 1$.

Esercizio 5. (5.a) Fornire l'enunciato della condizione di estremalità locale con le derivate successive.

(5.b) Dimostrare l'esistenza della successione minimizzante.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 26 giugno 2018 (Terzo appello, a.a. 2017-2018)

Cognome e nome:____________________ Matricola:__________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = 2\sqrt{|x^2-2|} - |x| + \sqrt{2}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-x^2} - \cos(ax) - \sinh x}{\log(1+\tan x) - x}$$

Esercizio 3. Studiare per quali $b \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 xe^{4x}(e^{4x}-1)^{b/4}\,\mathrm{d}x,$$

e calcolarlo per $b = -2$.

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy: $y(x)y'(x) = x - x(y(x))^2$; $y(0) = 2$.

Esercizio 5. (5.a) Fornire l'enunciato della condizione necessaria di estremalità locale.

(5.b) Dimostrare il Teorema di Rolle.

Tempo: 3 ore.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 26 giugno 2018 (Terzo appello, a.a. 2017-2018)

Cognome e nome:______________________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = 3\sqrt{|x^2-4|} - |x| + 2$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-x^2} - \cosh(ax) - \sin x}{\log(1+\sinh x) - x}$$

Esercizio 3. Studiare per quali $b \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 xe^{2x}(e^{2x}-1)^{b/2}\,\mathrm{d}x,$$

e calcolarlo per $b = -1$.

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy: $y(x)y'(x) = x^2 - x^2(y(x))^2$; $y(0) = 2$.

Esercizio 5. (5.a) Fornire l'enunciato della condizione necessaria di convergenza di una serie numerica.

(5.b) Dimostrare il Teorema di Lagrange.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 26 giugno 2018 (Terzo appello, a.a. 2017-2018)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = 3\sqrt{|x^2 - 9|} - |x| + 3$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-x^2} - \cos(ax) - \sin x}{\log(1 + \sinh x) - x}$$

Esercizio 3. Studiare per quali $b \in \mathbb{R}$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 x e^{3x}(e^{3x} - 1)^{b/3}\, \mathrm{d}x,$$

e calcolarlo per $b = -3/2$.

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy: $y(x)y'(x) = x^2 + x^2(y(x))^2$; $y(0) = -1$.

Esercizio 5. (5.a) Fornire la classificazione dei punti di discontinuità di una funzione di una variabile reale.

(5.b) Dimostrare il teorema della media integrale.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Risoluzione fila D

Esercizio 1 $f(x) = 3\sqrt{|x^2-9|} - |x| + 3$

1a) D_f : $|x^2-9| \geq 0$; pertanto $D_f = \mathbb{R}$.

Osserviamo che
$$f(-x) = 3\sqrt{|(-x)^2-9|} - |-x| + 3 = 3\sqrt{|x^2-9|} - |x| + 3 = f(x)$$
ossia f è PARI.

Sia $x \geq 0$: $f(x) \geq 0 \iff 3\sqrt{|x^2-9|} \geq |x| - 3 = x - 3$

$$\iff \underbrace{\begin{cases} 3\sqrt{|x^2-9|} \geq x-3 \\ x-3 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}}_{\text{I}} \cup \underbrace{\begin{cases} 3\sqrt{|x^2-9|} \geq 0 \\ x-3 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}}_{\text{II}}$$

Il sistema II equivale $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 0 \leq x < 3 \end{cases}$ cioè $x \in [0,3)$

Il sistema I equivale a: $\begin{cases} 9|x^2-9| \geq (x-3)^2 \\ x \geq 3 \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} 9(x^2-9) \geq (x-3)^2 \\ x \geq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-3)(9x+27-x+3) \geq 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 8x+30 \geq 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad x \in [3, +\infty)$$

Quindi $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$. Grazie alla parità di f si ha che $f(x) \geq 0$ $\forall x \in D_f$. Inoltre $f(3) = f(-3) = 0$ da cui segue che 0 è MINIMO GLOBALE e $-3, 3$ sono punti di MINIMO GLOBALE.

1b) Considerando la parità di f si ha che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x>3)}} 3\sqrt{x^2-9} - x + 3 = \lim_{x\to+\infty} 3x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}} - x + 3$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \underbrace{\Big[3 \underbrace{\sqrt{1-9/x^2}}_{\to 1} - 1 \Big]}_{\to 2} + 3 = +\infty$$

Pertanto f non ha MASSIMO GLOBALE e non ha asintoti orizzontali.

Studiamo gli asintoti obliqui

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3\sqrt{1-9/x^2} - 1\right) + 3}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 3\underbrace{\sqrt{1-9/x^2}}_{\to 1} - 1 = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(3\sqrt{1-9/x^2} - 1\right) + 3 - 2x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 3x\left(\sqrt{1-9/x^2} - 1\right) + 3$$

$$\underset{\substack{(1+u)^\alpha = 1+\alpha u + o(u) \\ u\to 0}}{=} \lim_{x\to+\infty} 3x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{9}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1\right) + 3$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 3x\left(\frac{9}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + 3$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{27}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + 3 = 3$$

Quindi la retta $y = 2x + 3$ è asintoto obliquo a $+\infty$.

Osservando che (grazie alla parità di f)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(-x)}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{-x}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$$

e $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(-x)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=3$

si ha che $y=-2x+3$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

1c) f è continua dove definita perché composizione di funzioni continue. f è derivabile $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,0,3\}$ perché ivi composizione di funzioni derivabili.

Osserviamo che

$$f(x)=\begin{cases}3\sqrt{x^2-9}-x+3 & x\geq 3\\ 3\sqrt{9-x^2}-x+3 & x\in[0,3)\\ 3\sqrt{9-x^2}+x+3 & x\in(-3,0)\\ 3\sqrt{x^2-9}+x+3 & x\in(-\infty,-3]\end{cases}$$

Grazie alla parità di f ne studiamo la monotonia soltanto per $x\geq 0$:

Sia $x>3$: $\quad f'(x)=\dfrac{3(2x)}{2\sqrt{x^2-9}}-1=\dfrac{3x-\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x^2-9}}>0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x>\sqrt{x^2-9}\\ x>3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9x^2>x^2-9\\ x>3\end{cases}\begin{cases}8x^2+9>0\\ x>3\end{cases}$$

$\Rightarrow$ f è strettamente crescente per $x>3$.

Sia $x\in(0,3)$: $\quad f'(x)=\dfrac{3(-2x)}{2\sqrt{9-x^2}}-1=\dfrac{-3x-\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{9-x^2}}<0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3x<\sqrt{9-x^2}\\ x\in(0,3)\end{cases}\Leftrightarrow x\in(0,3)$$

$\Rightarrow$ f è strettamente decrescente per $x\in(0,3)$

Grazie alla parità di f abbiamo anche che:

f è strettamente decrescente per $x < -3$;
f è strettamente crescente per $x \in (-3, 0)$.

Possiamo quindi concludere che

-3 è pto di minimo locale; $f(-3) = 0$
0 è pto di massimo locale; $f(0) = 12$
3 è pto di minimo locale; $f(3) = 0$

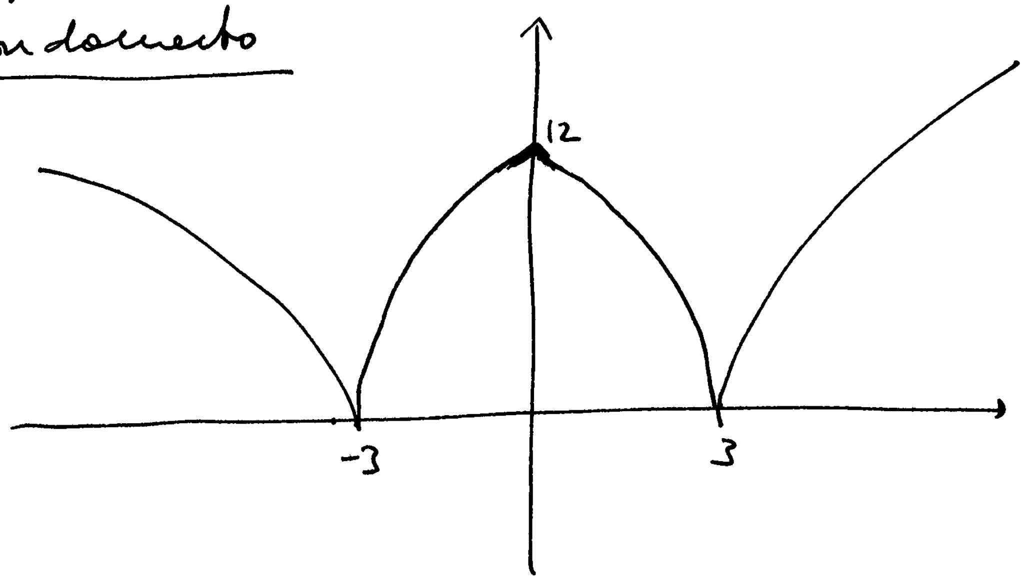
Inoltre i punti $-3, 3$ sono punti CUSPIDALI; mentre 0 è pto angoloso.

1d) <u>Convessità</u>: Sia $x > 0$; $x \neq 3$: allora

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-27}{(x^2-9)^{3/2}} & \text{se } x > 3 \\ \dfrac{-27}{(9-x^2)^{3/2}} & \text{se } x \in (0,3) \end{cases}$$

pertanto f è concava per $x \in (0,3) \cup (3, +\infty)$.
Grazie alla parità: f è concava anche per $(-\infty,-3) \cup (-3,0)$.

<u>Andamento</u>



Esercizio 2 Per ogni $a \in \mathbb{R}$ calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-x^2} - \cos(ax) - \sin x}{\lg(1+\sinh x) - x}$$

Osservo che il denominatore è un infinitesimo per $x \to 0^+$

Inoltre $\lg(1+\sinh x) = \sinh x - \frac{(\sinh x)^2}{2} + o((\sinh x)^2)$ per $x\to 0^+$

Siccome $\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ per $x \to 0^+$

otteniamo che

$$\lg(1+\sinh x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + o(x^2) \quad \text{per } x\to 0^+$$

$$= x + o(x^2) - \frac{1}{2}\left(x^2 + x^6/36 + o(x^8) + \frac{1}{3}x^4 + o(x^5) + \right.$$
$$\left. + o(x^7)\right) + o(x^2)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0^+$$

In conclusione il denominatore è

$$\lg(1+\sinh x) - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0^+$$

ossia un infinitesimo di ordine 2.

Anche il numeratore è un infinitesimo:

$$e^{x-x^2} = 1 + (x-x^2) + \frac{(x-x^2)^2}{2} + \frac{(x-x^2)^3}{6} + o(x^3)$$

$$= 1 + x - x^2 + \frac{1}{2}(x^2 + x^4 - 2x^3) + \frac{1}{6}x^3(1-x)^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + x - x^2 + \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^3) - x^3 + \frac{x^3}{6}(1 - 3x + o(x))$$

$$= 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^3) - \frac{5}{6}x^3$$

$$= 1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0^+$$

$$\cos(ax) = 1 - \frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{24} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0^+$$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0^+$.

Pertanto

$$N = \cancel{1} + \cancel{x} - \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) - \cancel{1} + \frac{a^2x^2}{2} - \frac{a^4x^4}{24} + $$
$$+ o(x^4) - \cancel{x} + x^3/6 + o(x^3)$$
$$= \frac{1}{2}(a^2-1)x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

Di conseguenza: il Numeratore è infinitesimo di ordine 2 se e solo se $a^2 \neq 1$; ed è di ordine 3 se e solo se $a^2 = 1$.

In conclusione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 0^+} \begin{cases} \dfrac{-2/3\, x^3 + o(x^3)}{-x^2/2 + o(x^2)} & \text{se } a^2 = 1 \\ \dfrac{\frac{1}{2}(a^2-1)x^2 + o(x^2)}{-x^2/2 + o(x^2)} & \text{se } a^2 \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } a = 1, -1 \\ 1-a^2 & \text{se } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \end{cases}$$

Esercizio 3 Studiare ($b \in \mathbb{R}$) la convergenza di

$$\int_0^1 x e^{3x} (e^{3x} - 1)^{b/3}\, dx$$

e calcolarlo per $b = -3/2$.

Osserviamo che per $b \geq 0$, $f(x) := x e^{3x}(e^{3x}-1)^{b/3}$ è definita e continua in $[0,1]$. In tal caso abbiamo un integrale di Riemann (e non si hanno problemi di convergenza) e sia $b < 0$: in tal caso $f(x)$ è definita in $(0,1]$ e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{x e^{3x}}^{\to 0}}{\underbrace{(e^{3x}-1)^{-b/3}}_{\to 0}}$$ va studiato più in dettaglio

Siccome $e^{3x}-1 = 3x + o(x)$ per $x \to 0^+$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{e^{3x}}_{\to 1} \frac{x}{(3x+o(x))^{-b/3}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^{-b/3}\underbrace{(3+o(1))^{-b/3}}_{\to 3^{-b/3}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1+b/3}}{(3+o(1))^{-b/3}}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } 1+b/3 \geq 0;\ b<0 \\ +\infty & \text{se } 1+b/3<0;\ b<0. \end{cases}$$

Pertanto per $0>b\geq -3$, f è prolungabile per continuità in 0 e non vi sono problemi di convergenza.

Se $b<-3$: $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ di ordine $-1-b/3$.

Siccome f è asintotica a $\frac{1}{x^\alpha}$; $\alpha = -1-b/3$; per $x\to 0^+$, l'integrale improprio converge se e solo se $0<-1-b/3<1$ ossia $b\in(-6,-3)$.

In conclusione: l'integrale converge (o è di Riemann) se e solo se $b>-6$.

Sia $b=-3/2$: Calcoliamo

$$\int_0^1 \frac{x e^{3x}}{\sqrt{e^{3x}-1}}\,dx =: I.$$

Operiamo la sostituzione $t=e^{3x}>0$; $g(t)=\frac{1}{3}\lg t$
$g'(t)=\frac{1}{3t}>0$ $\forall t>0$. otteniamo che

$$I = \frac{1}{3}\int_1^{e^3} \lg t \,\frac{t}{\sqrt{t-1}}\,\frac{1}{3t}\,dt = \frac{1}{9}\int_1^{e^3} \frac{\lg t}{\sqrt{t-1}}\,dt$$

Integrando per parti si ha che

$$I = \frac{1}{9}\left[\left[2\sqrt{t-1}\,\lg t\right]_1^{e^3} - \int_1^{e^3} \frac{2\sqrt{t-1}}{t}\,dt \right]$$

$$= \frac{2}{9}\left(3\sqrt{e^3-1} - \int_1^{e^3}\frac{\sqrt{t-1}}{t}\,dt\right)$$

Operiamo la sostituzione $u=\sqrt{t-1}\geq 0$ $\quad (t\geq 1)$

$\Rightarrow u^2+1=t$; $g(u)=u^2+1$ crescente per $u\geq 0$.

$$\int_1^{e^3}\frac{\sqrt{t-1}}{t}\,dt = \int_0^{\sqrt{e^3-1}} 2\frac{u}{u^2+1}\,u\,du = 2\int_0^{\sqrt{e^3-1}}\frac{u^2}{u^2+1}\,du$$

$$=2\int_0^{\sqrt{e^3-1}}\frac{u^2+1-1}{u^2+1}\,du = 2\int_0^{\sqrt{e^3-1}}du - 2\int_0^{\sqrt{e^3-1}}\frac{du}{u^2+1}$$

$$=2\sqrt{e^3-1}-2\,\mathrm{atg}(\sqrt{e^3-1}).$$

In conclusione

$$I = \frac{2}{3}\sqrt{e^3-1} - \frac{4}{9}\sqrt{e^3-1}+\frac{4}{9}\,\mathrm{atg}(\sqrt{e^3-1})$$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{e^3-1}+\frac{4}{9}\,\mathrm{atg}(\sqrt{e^3-1})$$

<u>Esercizio 4</u> Risolvere il pb. di Cauchy

$$\begin{cases} y'y = x^2+x^2y^2 \\ y(0)=-1. \end{cases}$$

Siamo in presenza di una eq. a variabili separabili:

$$y'(x)\,y(x) = x^2(1+y(x)^2) \quad \text{ossia}$$

$$\frac{y'(x)\,y(x)}{1+y(x)^2} = x^2.$$

Posto $u = y(x)$ il lato di sinistra diviene

$$\int \frac{u}{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}\lg(1+u^2) + c \quad ; c \in \mathbb{R}$$

Quindi si ottiene che

$$\frac{1}{2}\lg(1+(y(x))^2) = \frac{x^3}{3} + c \quad ; c \in \mathbb{R}$$

cioè

$$0 \leq \lg(1+(y(x))^2) = \frac{2}{3}x^3 + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

da cui si ricava

$$1+(y(x))^2 = e^{2/3\,x^3+c} = C_1 e^{2/3\,x^3} \quad ; C_1 \in \mathbb{R}$$

$(C_1 = e^c)$

$C_1 > 0$

cioè

$$0 \leq (y(x))^2 = C_1 e^{2/3\,x^3} - 1 \qquad (*)$$

In conclusione

$$|y(x)| = \sqrt{C_1 e^{2/3\,x^3} - 1} \quad ; \quad C_1 > 0$$

il cui dominio di definizione è tale che

$$C_1 e^{2/3\,x^3} \geq 1 \iff e^{2/3\,x^3} \geq 1/C_1$$

$$\iff \frac{2}{3}x^3 \geq \lg(1/C) \iff x^3 \geq 3/2 \lg(1/C)$$

$$\iff x \geq \sqrt[3]{3/2 \lg(1/C_1)}.$$

La condizione iniziale è calcolata in 0 che richiede $C_1 \geq 1$.

Dalla $(*)$ si ha, ponendo $y(0) = -1$, che

$$1 = C_1 - 1 \Rightarrow C_1 = 2$$

In definitiva

$$y(x) = -\sqrt{2e^{2/3\,x^3} - 1} \quad ; \quad x \geq \sqrt[3]{3/2 \lg 1/2}.$$

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 18 settembre 2018 (Quarto appello, a.a. 2017-2018)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Per ogni $a > 0$, calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sin(e^{-x}))^a - e^{-ax}}{\log(\frac{1+3^x}{3^x}) - \frac{1}{3^x}}.$$

Esercizio 2. Studiare, per $x \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\cos x)^n}{n+1}.$$

Esercizio 3. Calcolare tutte le primitive di $f(x) = \frac{\cos x}{2+\sin^2 x - \sin x}$. Calcolare poi $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2-t}$.

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy: $y''(t) + 2y'(t) - 8y(t) = 2e^{2t}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Esercizio 5. (5.a) Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari che ammette la retta $y = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, come asintoto obliquo a $+\infty$. Provare che la retta $y = -mx + n$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

(5.b) Enunciare il Teorema dei valori intermedi.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 18 settembre 2018 (Quarto appello, a.a. 2017-2018)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Per ogni $a > 0$, calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sinh(e^{-x}))^a - e^{-ax}}{1-\cosh(3^{-x})}.$$

Esercizio 2. Studiare, per $x \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sin x)^n}{n-1}.$$

Esercizio 3. Calcolare tutte le primitive di $f(x) = \frac{\cos x}{2+\sin^2 x+\sin x}$. Calcolare poi $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2+t}$.

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy: $y''(t) + y'(t) - 12y(t) = 3e^{3t}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Esercizio 5. (5.a) Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione dispari che ammette la retta $y = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, come asintoto obliquo a $+\infty$. Provare che la retta $y = mx - n$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

(5.b) Enunciare il Teorema degli zeri.

Tempo: 3 ore.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica I IV appello 2017/18 L1

18/09/2018

Fila A

Ex1 calcolare $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\sin(e^{-x}))^a - e^{-ax}}{\lg\left(\frac{1+3^x}{3^x}\right) - \frac{1}{3^x}}$; $a>0$.

Osserviamo che sia denominatore che numeratore sono infinitesimi.

$$D = \lg(1+3^{-x}) - 3^{-x} \underset{\uparrow}{=} 3^{-x} - \frac{1}{2}(3^{-x})^2 + o(3^{-2x}) - 3^{-x}$$

McLaurin
$3^{-x} = y \to 0$
per $x\to+\infty$

$$= -\frac{1}{2}3^{-2x} + o(3^{-2x})$$
per $x\to+\infty$

Per il numeratore:

$$\sin(e^{-x}) \underset{\uparrow}{=} e^{-x} - \frac{1}{6}(e^{-x})^3 + o((e^{-x})^4) =$$

McLaurin
$e^{-x} = y \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

$$= e^{-x} - \frac{1}{6}e^{-3x} + o(e^{-4x}) \quad \text{per } x\to+\infty$$

Quindi
$$(\sin(e^{-x}))^a = \left(e^{-x} - \frac{1}{6}e^{-3x} + o(e^{-4x})\right)^a$$

$$= e^{-ax}\left(1 - \frac{1}{6}e^{-2x} + o(e^{-3x})\right)^a$$

$$\underset{\uparrow}{=} e^{-ax}\left(1 - \frac{a}{6}e^{-2x} + o(e^{-2x})\right)$$

M.Laurin
$(1+u)^a \underset{u\to0}{=} 1 + au + o(u)$

$$= e^{-ax} - \frac{a}{6}e^{-(a+2)x} + o(e^{-(a+2)x})$$
per $x\to+\infty$

Pertanto il numeratore è

$$N = e^{-ax} - \frac{a}{6} e^{-(a+2)x} + o(e^{-(a+2)x}) - e^{-ax}$$

$$= -\frac{a}{6} e^{-(a+2)x} + o(e^{-(a+2)x}) \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{N}{D} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-a/6\, e^{-(a+2)x} + o(e^{-(a+2)x})}{-1/2\, 3^{-2x} + o(3^{-2x})}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{3} e^{-(a+2)x} \cdot 3^{2x}$$

Principio sost. infinitesimi

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{3} e^{(2\lg 3 - (a+2))x} = \begin{cases} a/3 & \text{se } a = 2\lg 3 - 2 \\ 0 & \text{se } a > 2\lg 3 - 2 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 2\lg 3 - 2 \end{cases}$$

<u>Ex 2</u> Studiare la convergenza di $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\cos x)^n}{n+1}$

Studiamo la conv. assoluta ossia $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\cos x|^n}{n+1}$; poiché $\sqrt[n]{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|\cos x|^n}{n+1}} = |\cos x| \,.$$

Pertanto per $x \neq k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ si ha che $\sum \frac{|\cos x|^n}{n+1}$ converge e $\sum \frac{(-1)^n (\cos x)^n}{n+1}$ converge assolutamente.

Se $\cos x = 1$ ($x = 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$) otteniamo $\sum (-1)^n / (n+1)$ che è convergente per il criterio di Leibniz.

Se $\cos x = -1$ ($x = \pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$) otteniamo $\sum \frac{(-1)^n (-1)^n}{n+1} = \sum \frac{1}{n+1}$ che è divergente ($a_n \to 0$ di ordine 1) per il criterio dell'ordine di infinitesimo.

Ex3 Primitive di $\dfrac{\cos x}{2+\sin^2 x-\sin x}$ e calcolo di

di $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^2-t}$.

Calcolo delle primitive:

$$\int \frac{\cos x}{2+\sin^2 x-\sin x}\,dx = \int R(\sin x)\cdot(\sin x)'\,dx$$

dove $R(t)=\dfrac{1}{2+t^2-t}$; posto $t=\sin x$ si ha

che $$\int \frac{\cos x}{2+\sin^2 x-\sin x}\,dx = \int \frac{dt}{2+t^2-t}\Big]_{t=\sin x}$$

$$= \int \frac{dt}{(t-1/2)^2+7/4} = \frac{4}{7}\int \frac{dt}{\left(\frac{2}{\sqrt7}t-\frac{1}{\sqrt7}\right)^2+1}$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{4}{7}\int \frac{\sqrt7/2}{u^2+1}\,du\Big]_{u=2/\sqrt7\, t-1/\sqrt7} = \frac{2}{\sqrt7}\,\operatorname{atg}\left(\frac{2}{\sqrt7}\sin x-\frac{1}{\sqrt7}\right)+c;$$

$u=\frac{2}{\sqrt7}t-\frac{1}{\sqrt7}$; $u+\frac{1}{\sqrt7}=\frac{2}{\sqrt7}t$ $\quad t=\sin x \quad\quad c\in\mathbb{R}$

$t=\frac{\sqrt7}{2}u+\frac{1}{2}=g(u)$

Calcolo di $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2+t^2-t}$:

Osserviamo che l'integrale è convergente perché

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^2-t+2}=0$ di ordine 2.

Per quanto visto sopra, $\displaystyle\int\frac{dt}{2+t^2-t}=\frac{2}{\sqrt7}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt7}t-\frac{1}{\sqrt7}\right)+c$;

Quindi, posto $F(t)=2/\sqrt7\,\operatorname{atg}\left(2/\sqrt7\,t-\frac{1}{\sqrt7}\right)$, $c\in\mathbb{R}$.

si ha $$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{2+t^2-t}=\lim_{u\to+\infty}\int_0^u\frac{dt}{2+t^2-t}=\lim_{u\to+\infty}(F(u)-F(0))$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{2}{\sqrt7}\operatorname{atg}\left(2/\sqrt7\,u-1/\sqrt7\right)-\frac{2}{\sqrt7}\operatorname{atg}\left(-\frac{1}{\sqrt7}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\sqrt7}\operatorname{atg}\left(\frac{1}{\sqrt7}\right).$$

Ex 4 Risolvere $\begin{cases} y''+2y'-8y=2e^{2t} \\ y(0)=2 \\ y'(0)=1. \end{cases}$ L4

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2+2\lambda-8$
$=(\lambda-2)(\lambda+4)$.
Le sol. dell'eq. omogenea sono dunque tutte e sole

$$y(t)=c_1 e^{2t}+c_2 e^{-4t}\ ;\ c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Con il metodo di somiglianza, osserviamo che $2e^{2t}=f(t)$ ha 2 che è sol. di $p(\lambda)=0$. Una soluzione particolare dell'eq. diff^le non omogenea è dunque: $\bar{y}(t)=c\,t\,e^{2t}$, $c\in\mathbb{R}$

otteniamo $\bar{y}'(t)=ce^{2t}+2cte^{2t}=ce^{2t}(1+2t)$

$$\bar{y}''(t)=2ce^{2t}(1+2t)+2ce^{2t}=2ce^{2t}(2+2t)$$
$$=4ce^{2t}(1+t)$$

Pertanto
$\bar{y}''+2\bar{y}'-8\bar{y}=4ce^{2t}(1+t)+2ce^{2t}(1+2t)-8cte^{2t}$

$$=2ce^{2t}(2+2t+1+2t-4t)=2ce^{2t}(3)$$

$=6ce^{2t}$ che deve essere uguale a $2e^{2t}$

ciò accade se e solo se $c=1/3$.
Quindi tutte e sole le sol. dell'eq. diff^le non omogenea sono

$$y(t)=c_1 e^{2t}+c_2 e^{-4t}+\frac{t}{3}e^{2t}\ ;\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

Risolvo il problema di Cauchy;
Ponendo $\begin{cases} 2=y(0)=c_1+c_2 \\ 1=y'(0)=2c_1-4c_2+1/3 \end{cases}$ $\begin{cases} c_1=2-c_2 \\ 2(2-c_2)-4c_2+1/3=1 \end{cases}$

$$\left(y'(t)=2c_1e^{2t}-4c_2e^{-4t}+\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{2}{3}te^{2t}\right)$$

$\begin{cases} c_1=2-c_2 \\ 4-6c_2=2/3 \end{cases}$ $\begin{cases} \dots \\ 6c_2=10/3 \end{cases}$ $\begin{cases} c_1=13/9 \\ c_2=5/9 \end{cases}$. La sol. del pb. di Cauchy è $y(t)=\frac{13}{9}e^{2t}+\frac{5}{9}e^{-4t}+\frac{t}{3}e^{2t}$.