Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 23 gennaio 2019 (Primo appello, a.a. 2018-2019)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log\left(\frac{|x^2-3|}{x+2}\right)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

NOTA BENE: La convessità di $f(x)$ non è richiesta.

Esercizio 2. Studiare, per $x \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log(x-2))^n}{n+1}.$$

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$, e sia

$$f_a(x) = \frac{1}{x^a \sqrt{x^2-2}}.$$

(3.a) Determinare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinito di $f_a(x)$ in $\sqrt{2}$ da destra.

(3.b) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $f_a(x)$ è un infinitesimo in $+\infty$; in tali casi determinare l'ordine di infinitesimo di $f_a(x)$ in $+\infty$.

(3.c) Studiare la convergenza di $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} f_a(x)\,\mathrm{d}x$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(3.d) Calcolare $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 4. Calcolare per ogni $b \in \mathbb{R}$ il valore di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\sin x) - \cosh x}{\arctan(bx^2) - \sin(x^2)}.$$

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema di Bolzano-Weierstraß.

(5.b) Dimostrare la disuguaglianza di Jakob Bernoulli, ossia: [sia $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$; allora $(1+x)^n \geq 1 + nx$ per ogni $n \in \mathbb{N}$].

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 23 gennaio 2019 (Primo appello, a.a. 2018-2019)

Cognome e nome:____________________________________ Matricola:_______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log\left(\frac{|x^2-2|}{x+1}\right)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

NOTA BENE: La convessità di $f(x)$ non è richiesta.

Esercizio 2. Studiare, per $x \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x}-2)^n}{n-1}.$$

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$, e sia

$$f_a(x) = \frac{1}{x^a\sqrt{x^2-1}}.$$

(3.a) Determinare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinito di $f_a(x)$ in 1 da destra.

(3.b) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $f_a(x)$ è un infinitesimo in $+\infty$; in tali casi determinare l'ordine di infinitesimo di $f_a(x)$ in $+\infty$.

(3.c) Studiare la convergenza di $\int_1^{+\infty} f_a(x)\, dx$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(3.d) Calcolare $\int_1^{+\infty} f_1(x)\, dx$.

Esercizio 4. Calcolare per ogni $b \in \mathbb{R}$ il valore di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sinh x) - \cos x}{\arctan(bx^2) - \log(1+x^2)}.$$

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

(5.b) Dimostrare la proprietà di Archimede, ossia: per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 23 gennaio 2019 (Primo appello, a.a. 2018-2019)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:_______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log\left(\frac{|x^2-3|}{x+1}\right)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

NOTA BENE: La convessità di $f(x)$ non è richiesta.

Esercizio 2. Studiare, per $x \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log(x+3))^n}{n+1}.$$

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$, e sia

$$f_a(x) = \frac{1}{x^a\sqrt{x^2-3}}.$$

(3.a) Determinare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinito di $f_a(x)$ in $\sqrt{3}$ da destra.

(3.b) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $f_a(x)$ è un infinitesimo in $+\infty$; in tali casi determinare l'ordine di infinitesimo di $f_a(x)$ in $+\infty$.

(3.c) Studiare la convergenza di $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} f_a(x)\,\mathrm{d}x$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(3.d) Calcolare $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 4. Calcolare per ogni $b \in \mathbb{R}$ il valore di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\log(1+x^2) - \arctan(bx^2)}.$$

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema di Bernoulli-de l'Hôpital (limiti al finito, caso di indeterminazione: rapporto di infinitesimi).

(5.b) Dimostrare la proprietà di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, ossia: per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $z \in \mathbb{Q}$ tale che $z \le x < z + \varepsilon$.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 23 gennaio 2019 (Primo appello, a.a. 2018-2019)

Cognome e nome:____________________ Matricola:__________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log\left(\frac{|x^2-4|}{x+1}\right)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

NOTA BENE: La convessità di $f(x)$ non è richiesta.

Esercizio 2. Studiare, per $x \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x}-3)^n}{n-1}.$$

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$, e sia

$$f_a(x) = \frac{1}{x^a\sqrt{x^2-4}}.$$

(3.a) Determinare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinito di $f_a(x)$ in 2 da destra.

(3.b) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $f_a(x)$ è un infinitesimo in $+\infty$; in tali casi determinare l'ordine di infinitesimo di $f_a(x)$ in $+\infty$.

(3.c) Studiare la convergenza di $\int_2^{+\infty} f_a(x)\, dx$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(3.d) Calcolare $\int_2^{+\infty} f_1(x)\, dx$.

Esercizio 4. Calcolare per ogni $b \in \mathbb{R}$ il valore di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sin x) - 1 - \arctan(x^2)/2}{\sin(bx^2) - \log(1+x^2)}.$$

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema riguardante la Formula di Taylor con resto di Peano.

(5.b) Dimostrare che $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ per ogni $q \neq 1$.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica I — Primo appello | 1

Risoluzione File G — 23/01/2019

Esercizio 1 Studiare $f(x) = \log\left(\frac{|x^2-3|}{x+1}\right)$

1A) Dominio di f: $\begin{cases} \frac{|x^2-3|}{x+1} > 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} |x^2-3| \neq 0 \\ x+1 > 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq -\sqrt{3} ; \ x \neq \sqrt{3} \\ x > -1 \end{cases} \iff D_f = (-1, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

PARITÀ: si noti che D_f NON è simmetrico rispetto a 0
$\Rightarrow f$ né pari, né dispari.

SEGNO $f(x) > 0 \underset{\substack{\text{monotonia} \\ \text{di } \log(u)}}{\iff} \begin{cases} \frac{|x^2-3|}{x+1} > 1 \\ x \in D_f \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{|x^2-3| - x - 1}{x+1} > 0 \\ x \in D_f \end{cases}$

caso I $\quad x > \sqrt{3}$: $\begin{cases} \frac{x^2-3-x-1}{\underbrace{x+1}_{>0}} > 0 \\ x > \sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - x - 4 > 0 \\ x > \sqrt{3} \end{cases}$

le radici di $x^2-x-4=0$ sono $x_1 = \frac{1+\sqrt{1+16}}{2} = \frac{1+\sqrt{17}}{2} > \sqrt{3}$
e $x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{2} < 0$.

Pertanto se $x \in (\sqrt{3}, x_1) \Rightarrow f(x) < 0$
se $x \in (x_1, +\infty) \Rightarrow f(x) > 0$
$f(x_1) = 0$

caso II: $x \in (-1, \sqrt{3})$:

$f(x) > 0 \iff \begin{cases} \frac{3-x^2-x-1}{\underbrace{x+1}_{>0}} > 0 \\ -1 < x < \sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + x - 2 < 0 \\ -1 < x < \sqrt{3} \end{cases}$

le radici di x^2+x-2 sono $y_1 = \frac{-1-\sqrt{1+8}}{2} = -2$
e $y_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$

Pertanto $\begin{cases} \text{se } x \in (-1,1) \Rightarrow f(x) > 0 \\ \text{se } x \in (1, \sqrt{3}) \Rightarrow f(x) < 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$ $\boxed{2}$

In conclusione

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$$
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, \sqrt{3}) \cup \left(\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$$
$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \left\{1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}.$$

(B) I punti di accumulazione di D_f sono: $(-1)^+, (\sqrt{3})^-, (\sqrt{3})^+, +\infty$

$$\lim_{x\to(-1)^+} \lg\left(\frac{|x^2-3|}{\underbrace{x+1}_{\to 0^+}}\right) = \lim_{u\to+\infty} \lg u = +\infty$$

($x=-1$ è asintoto verticale destro; f non ammette massimo globale)

$$\lim_{x\to(\sqrt{3})^-} \lg\left(\frac{\overbrace{|x^2-3|}^{\to 0^+}}{\underbrace{x+1}_{\to 1+\sqrt{3}}}\right) = \lim_{u\to 0^+} \lg(u) = -\infty$$

($x=\sqrt{3}$ è as. verticale sinistro; f non ammette minimo globale)

$$\lim_{x\to(\sqrt{3})^+} \lg\left(\frac{\overbrace{|x^2-3|}^{\to 0^+}}{\underbrace{x+1}_{\to 1+\sqrt{3}}}\right) = \lim_{u\to 0^+} \lg(u) = -\infty$$

($x=\sqrt{3}$ è as. vert. destro)

$$\lim_{x\to+\infty} \lg\left(\frac{|x^2-3|}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \lg\left(\underbrace{\frac{x^2-3}{x+1}}_{\to+\infty}\right) =$$

$$= \lim_{u\to+\infty} \lg(u) = +\infty$$

Non esistono asintoti orizzontali. Studiamo l'esistenza di asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\lg\left(\frac{x^2-3}{x+1}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\lg\left(\frac{x^2-3}{x+1}\right)}{\frac{x^2-3}{x+1}} \underbrace{\frac{x^2-3}{x(x+1)}}_{\to 1}$$

$$= \lim_{u\to+\infty} \frac{\lg(u)}{u} = 0$$ (per quanto visto a lezione sui limiti di questo tipo)

Quindi NON esistono asintoti orizzontali.

1c) <u>Continuità di f</u>: f è composizione di funzioni continue in D_f $\Rightarrow$ f è continua in D_f.

<u>Derivabilità di f</u>: Riscriviamo $f(x)$ come segue:

per $x \in D_f$ si ha che $f(x) = \lg(|x^2-3|) - \lg(x+1)$

$= g(x) - h(x)$. Le funzioni $g(x)$ e $h(x)$ sono derivabili in D_f e quindi $f(x)$ è derivabile in D_f.

Ricordando che $(\lg|u|)' = \frac{1}{u}$ $\forall u \neq 0$, si ha che

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-3} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+2x+3}{(x^2-3)(x+1)} \quad \forall x \in D_f$$

<u>Segno di $f'(x)$</u>: $(x \in D_f) \Rightarrow x+1 > 0$

Inoltre $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 \geq 2 > 0$ $\forall x \in D_f$

Quindi

$$f'(x) > 0 \iff \begin{cases} x^2-3>0 \\ x\in D_f \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (\sqrt{3}, +\infty) \end{cases}$$

$$f'(x) < 0 \iff x \in (-1, \sqrt{3})$$

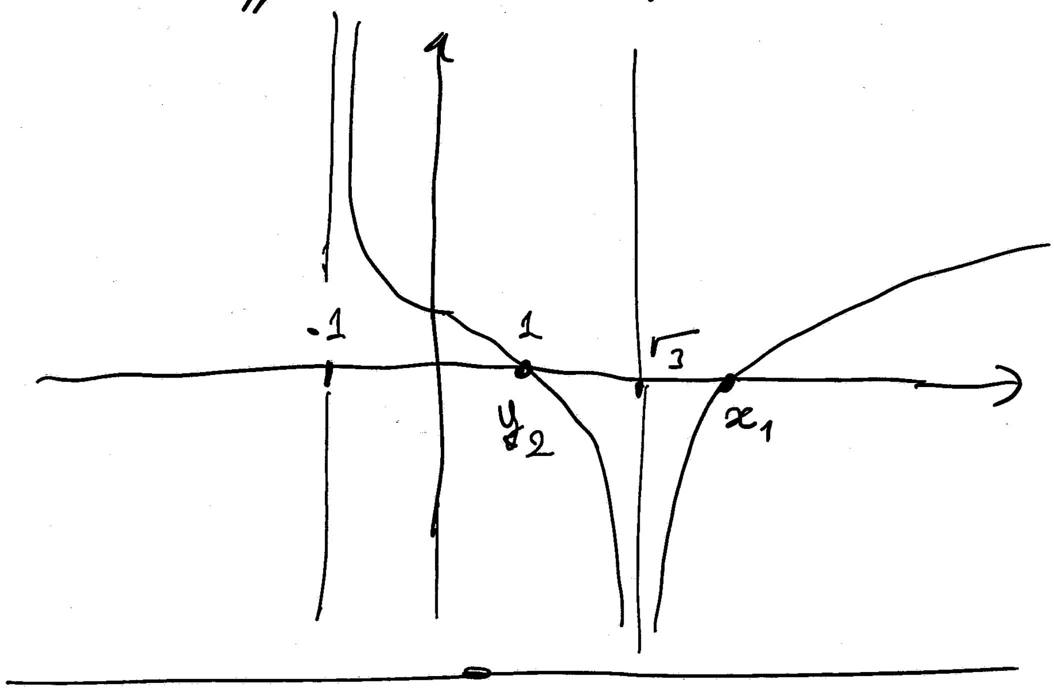
Pertanto:

f è strettamente crescente in $(\sqrt{3}, +\infty)$

f è strettamente decrescente in $(-1, \sqrt{3})$

Inoltre f non ha punti critici interni; di conseguenza f non ha punti estremali locali interni.

1e) Non tenendo conto della convessità, un andamento approssimato di f è



Esercizio 2 Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lg(x+3))^n}{n+1} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

Sol.) Sia $a_n(x) = (\lg(x+3))^n/(n+1)$; perché esso sia definito si deve porre $x > -3$.

Sia $D = (-3, +\infty)$ e $x \in D$.

Per ogni $x \in D$ studiamo la conv. assoluta di $\sum a_n(x)$: Per il criterio della radice, va studiato

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|\lg(x+3)|}{\underbrace{(n+1)^{1/n}}_{\to 1}} = |\lg(x+3)|$$

Quindi se $\begin{cases} x \in D \\ |\lg(x+3)| < 1 \end{cases}$ si ha che $\sum a_n(x)$ converge assolutamente; la condizione

$$\begin{cases} |\lg(x+3)| < 1 \\ x \in D \end{cases} \iff \begin{cases} -1 < \lg(x+3) < 1 \\ x \in D \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1/e < x+3 < e \\ x \in D \end{cases} \iff x \in \underbrace{\left(-3+\frac{1}{e}, -3+e\right)}_{=I}$$

Di conseguenza $\sum a_n(x)$ converge assolutamente per ogni $x \in I$.

Notiamo che se $|\lg(x+3)| > 1$, allora $\sum |a_n(x)|$ diverge e quindi $\sum a_n(x)$ non converge.

<u>Infine</u>: se $x = -3+e$ allora

$$a_n(-3+e) = 1/n+1 \quad e \quad \sum \frac{1}{n+1} \text{ diverge};$$

se $x = -3+1/e$ allora $a_n(-3+1/e) = (-1)^n/n+1$

e $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge per il criterio di Leibniz (fatto visto a lezione).

In conclusione $\sum a_n(x)$ converge se e solo se $x \in [-3+1/e, -3+e)$.

Esercizio 3) A) Studiare la convergenza di $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x^a\sqrt{x^2-3}}$; $a \in \mathbb{R}$.

B) Calcolare l'integrale precedente nel caso $a=1$.

Sol

3A): È necessario che $x^2-3>0 \iff x \in (-\infty,-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},+\infty)$

Inoltre se $a>0$, serve che $x \neq 0$. In conclusione

$$D_f = (-\infty,-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},+\infty),\ \forall a \in \mathbb{R}$$

Intersecando tale dominio con $(\sqrt{3},+\infty)$ si nota che in ogni caso si possono avere pb. di convergenza in $\sqrt{3}$ ed in $+\infty$.

Conv. in $\sqrt{3}$) osserviamo che: $(\alpha>0)$

$$\lim_{x\to(\sqrt{3})^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{(x-\sqrt{3})^\alpha}} = \lim_{x\to(\sqrt{3})^+} \frac{(x-\sqrt{3})^\alpha}{x^a(x-\sqrt{3})^{1/2}(x+\sqrt{3})^{1/2}}$$

$$= \lim_{x\to(\sqrt{3})^+} \frac{(x-\sqrt{3})^{\alpha-1/2}}{\underbrace{x^a(x+\sqrt{3})^{1/2}}_{\to\, l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}} = m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

se e solo se $\alpha = 1/2$.

Ossia f è infinito di ordine $1/2$ in $\sqrt{3}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$

Il criterio dell'ordine di infinito ci assicura allora che l'integrale è convergente in $\sqrt{3}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$

Convergenza in $+\infty$. Siccome

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1/\sqrt{x^2-3}\right)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1-3/x^2}} = 1,$$ abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^a\sqrt{x^2-3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{a+1}}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } a+1>0 \\ 1 & \text{se } a=-1 \\ +\infty & \text{se } a<-1 \end{cases} \quad (*)$$

Possiamo quindi concludere che per $a \le -1$, l'integrale in questione è DIVERGENTE.
Sia $\underline{a>-1}$; Da $(*)$ sappiamo che f è infinitesima per $x\to+\infty$ ed è immediato notare che il suo ordine di infinitesimo è $\alpha = a+1$.
Applicando il criterio dell'ordine di infinitesimo si ha che l'integrale converge se e solo se

$$a+1>1 \quad \text{ossia} \quad \boxed{a>0}$$

In conclusione $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x^a\sqrt{x^2-3}}$ converge se e solo se $\boxed{a>0}$

3B Posto $a=1$, per 3a sappiamo che l'integrale è convergente.

In conclusione $\sum a_n(x)$ converge se e solo se $x \in [-3+1/e, -3+e)$.

Esercizio 3) A) Studiare la convergenza di $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x^a\sqrt{x^2-3}}$; $a \in \mathbb{R}$.

B) Calcolare l'integrale precedente nel caso $a=1$.

Sol

3A : È necessario che $x^2-3>0 \iff x \in (-\infty,-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},+\infty)$

Inoltre se $a>0$, serve che $x \neq 0$. In conclusione

$$D_f = (-\infty,-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},+\infty), \ \forall a \in \mathbb{R}$$

Intersecando tale dominio con $(\sqrt{3},+\infty)$ si nota che in ogni caso si possono avere pb. di convergenza in $\sqrt{3}$ ed in $+\infty$.

Conv. in $\sqrt{3}$) osserviamo che: $(\alpha>0)$

$$\lim_{x\to(\sqrt{3})^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{(x-\sqrt{3})^\alpha}} = \lim_{x\to(\sqrt{3})^+} \frac{(x-\sqrt{3})^\alpha}{x^a(x-\sqrt{3})^{1/2}(x+\sqrt{3})^{1/2}}$$

$$= \lim_{x\to(\sqrt{3})^+} \frac{(x-\sqrt{3})^{\alpha-1/2}}{\underbrace{x^a(x+\sqrt{3})^{1/2}}_{\to\, l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}}} = m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

se e solo se $\alpha = 1/2$.

Ossia f è infinito di ordine $1/2$ in $\sqrt{3}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$

Per calcolarlo utilizziamo la sost. consigliata [8]

$t = \sqrt{x^2-3} - x \quad , \quad t > \sqrt{3}$, da cui

segue $x = -\frac{1}{2}\frac{t^2+3}{t} = g(t)$. Applicando

il teorema di sostituzione per gli integrali

abbiamo che

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}} = \int \frac{1}{-\left(\frac{t^2+3}{2t}\right)\left(\frac{t^2-3}{2t}\right)} \frac{(-(t^2-3))}{2t^2} dt$$

$$= -\int \frac{4t^2}{(t^2-3)(t^2+3)} \frac{(-(t^2-3))}{2t^2} dt$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t/\sqrt{3})^2+1} \overset{u = t/\sqrt{3}}{\uparrow}{=}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{3}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{atg}(u) + c \, ; \, c \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{atg}\left(\frac{\sqrt{x^2-3} - x}{\sqrt{3}}\right) + c = F(x) + c \, ; \, c \in \mathbb{R}$$

Allora:

$$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}} \overset{def}{=} \left(\lim_{z \to (\sqrt{3})^+} \int_z^0 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}}\right) +$$

$$+ \left(\lim_{w \to +\infty} \int_0^w \frac{\quad}{x\sqrt{x^2-3}}\right)$$

$$\underset{\uparrow\, F.F.C.I}{=} \lim_{z \to (\sqrt{3})^+} \left(F(0) - F(z)\right) + \lim_{w \to +\infty} \left(F(w) - F(0)\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{w \to +\infty} \mathrm{atg}\left(\frac{\sqrt{w^2-3} - w}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{z \to (\sqrt{3})^+} \mathrm{atg}\left(\frac{\sqrt{z^2-3} - z}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= A - B$$

$$B = \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{t \to -1} \operatorname{atg}(t) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{4}$$

Osservando che $\lim_{w \to +\infty} \left(\sqrt{w^2-3} - w\right) = \lim_{w \to +\infty} \frac{w^2-3-w^2}{\sqrt{w^2-3}+w} = 0$

si ha che

$$A = \frac{2}{\sqrt{3}} \lim_{t \to 0} \operatorname{atg}(t) = 0$$

Di conseguenza

$$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-3}} = 0 - \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Esercizio 4 | Calcolare, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\lg(1+x^2) - \operatorname{arctg}(ax^2)}$$

Svolg.: Si osserva che il limite in questione è un rapporto di infinitesimi per ogni $a \in \mathbb{R}$.

NUMERATORE: utilizzando le formule di MacLaurin si ha che

$$\cos(y) = 1 - \tfrac{1}{2} y^2 + \frac{1}{24} y^4 + o(y^5) \quad \text{per } y \to 0$$

da cui segue che

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{1}{24} (\sin x)^4 + o\left((\sin x)^5\right)$$

per $x \to 0^+$

Siccome $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ abbiamo che

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{1}{24}(\sin x)^4 + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Grazie alle formule di MacLaurin,

$\sin x = x - x^3/6 + o(x^4)$ per $x \to 0^+$,
e quindi

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + $$
$$+ \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^5)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{x^4}{24}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^4 + o(x^5)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{x^4}{36} + o(x^6) - \frac{x^2}{3} + o(x^3) + o(x^5)\right) +$$
$$+ \underbrace{\frac{x^4}{24}\left(1 + 4\left(-x^2/6 + o(x^3)\right) + o(x^2)\right)}_{\uparrow \text{usando } (1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u)} + o(x^5)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right) + x^4/24\left(1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)\right) + o(x^5)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^5) + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{36} + o(x^6) + o(x^5)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Allora

$$\cos(\sin x) - \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)$$
$$= \frac{x^4}{6} + o(x^5) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 20 febbraio 2019 (Secondo appello, a.a. 2018-2019)

Cognome e nome:________________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \sqrt{(x-1)|2-x|}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Sia $a \in \mathbb{R}$ e $f_a(t) = te^{at}(2 + \sin t)$.

(2.a) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\int_0^{+\infty} f_a(t)\, dt$ converge.

(2.b) Calcolare $\int_0^{+\infty} f_{-1}(t)\, dt$. [**N.B.**: si calcolino per prima cosa le primitive di $te^{-t}\sin t$].

Esercizio 3. Per ogni $b \in \mathbb{R}$, calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \tan x + x^{7/2}\log x}{(\sin x)^b(1-\cos x)}.$$

Esercizio 4. Determinare, al variare di $d > 0$, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x)+4dy'(x)+4y(x) = 0$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema fondamentale del Calcolo Integrale.

(5.b) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Dimostrare che se $f\colon I \to \mathbb{R}$ è derivabile in I e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$ allora f è strettamente crescente in I.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 20 febbraio 2019 (Secondo appello, a.a. 2018-2019)

Cognome e nome:________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \sqrt{(x-1)|3-x|}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Sia $a \in \mathbb{R}$ e $f_a(t) = te^{at}(2 - \sin t)$.

(2.a) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\int_0^{+\infty} f_a(t)\, dt$ converge.

(2.b) Calcolare $\int_0^{+\infty} f_{-1}(t)\, dt$. [**N.B.**: si calcolino per prima cosa le primitive di $te^{-t} \sin t$].

Esercizio 3. Per ogni $b \in \mathbb{R}$, calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sinh x - \tanh x + x^{7/2} \log x}{(\sin x)(1 - \cos x)^b}.$$

Esercizio 4. Determinare, al variare di $d > 0$, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x) - 4dy'(x) + 4y(x) = 0$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema del differenziale.

(5.b) Dimostrare il teorema di unicità del limite.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 20 febbraio 2019 (Secondo appello, a.a. 2018-2019)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \sqrt{(x-2)|3-x|}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Sia $a \in \mathbb{R}$ e $f_a(t) = te^{at}(2 - \cos t)$.

(2.a) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\int_0^{+\infty} f_a(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

(2.b) Calcolare $\int_0^{+\infty} f_{-1}(t)\ \mathrm{d}t$. [**N.B.**: si calcolino per prima cosa le primitive di $te^{-t}\cos t$].

Esercizio 3. Per ogni $b \in \mathbb{R}$, calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2(1-\cos x) - (\arctan x)^2 + x^{9/2}\log x}{(\sin x)^b (\log(1+x))^2}.$$

Esercizio 4. Determinare, al variare di $d > 0$, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x) - 2dy'(x) + 2y(x) = 0$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema della media integrale.

(5.b) Dimostrare la condizione necessaria del primo ordine per punti estremali interni.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 20 febbraio 2019 (Secondo appello, a.a. 2018-2019)

Cognome e nome:____ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \sqrt{(x-2)|4-x|}$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Sia $a \in \mathbb{R}$ e $f_a(t) = te^{at}(2+\cos t)$.

(2.a) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\int_0^{+\infty} f_a(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

(2.b) Calcolare $\int_0^{+\infty} f_{-1}(t)\ \mathrm{d}t$. [**N.B.**: si calcolino per prima cosa le primitive di $te^{-t}\cos t$].

Esercizio 3. Per ogni $b \in \mathbb{R}$, calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2(1-\cosh x) + (\operatorname{arctanh} x)^2 + x^{9/2}\log x}{(\sin x)^2(\log(1+x))^b}.$$

Esercizio 4. Determinare, al variare di $d > 0$, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x)+2dy'(x)+2y(x) = 0$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il criterio integrale per la convergenza delle serie numeriche.

(5.b) Dimostrare che se f è debolmente crescente e derivabile nel suo dominio I, I intervallo, allora $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 20 febbraio 2019 (Secondo appello, a.a. 2018-2019)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	s/n	33

Esercizio 4. Determinare, al variare di $d > 0$, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x)+4dy'(x)+4y(x) = 0$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema di Lagrange.

(5.b) Dimostrare che se f è debolmente crescente e derivabile nel suo dominio I, I intervallo, allora $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.

Tempo: 75 minuti.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica I 2018/19

II Appello 20/02/2019

Fila A

Esercizio 1. Sia $f(x) = \sqrt{(x-1)\,|2-x|}$.

1a) Dominio di $f(x)$: va studiato $(x-1)\,|2-x| \geq 0$

$\iff x-1 \geq 0 \iff x \geq 1$. Quindi $D_f = [1, +\infty)$

$f(x) = 0 \iff x = 1$ oppure $x = 2$.

Inoltre $f(x) \geq 0 \;\forall x \in D_f$ (proprietà di $\sqrt{u}$ per $u \geq 0$)

e f non è né pari né dispari perché D_f non è simmetrico rispetto al punto 0. Si noti che 0 e 2 sono pti di minimo globale.

1b) Notiamo che f è continua dove definita perché è composizione di funzioni continue.

Quindi $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 0$. L'altro punto di acc. è $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x>2}} \sqrt{\underbrace{(x-1)(x-2)}_{\to +\infty}} =$$

$$\lim_{u\to+\infty} \sqrt{u} = +\infty.$$

Da ciò segue che f non ha massimo globale e che f non ha asintoti orizzontali. Studiamo l'esistenza di asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x>2}} \frac{\sqrt{(x-1)(x-2)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\underbrace{\frac{x^2-3x+2}{x^2}}_{\to 1}}$$

$$= \lim_{u\to 1} \sqrt{u} = 1 =: m$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\x>2}}\left(\sqrt{(x-1)(x-2)}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1\underbrace{-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}_{u}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)$$

$\uparrow$
$(1+u)^\alpha=1+\alpha u+o(u)$
per $u\to 0$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{-3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{3}{2}+o(1)=-3/2$$

Pertanto la retta $y=x-3/2$ è asintoto obliquo a $+\infty$

1c) Nel punto 1b) abbiamo già notato che f è continua dove definita.
Ricordando che $\sqrt{u}$ è derivabile in $u>0$, e $|v|$ è derivabile per $v\neq 0$, grazie al teorema di derivabilità della funzione composta, abbiamo che

f è derivabile per $x\in(1,2)\cup(2,+\infty)$.

Siccome
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{(x-1)(2-x)} & \text{se } x\in[1,2]\\ \sqrt{(x-1)(x-2)} & \text{se } x>2\end{cases}$$

abbiamo che
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2x+3}{2\sqrt{(x-1)(2-x)}} & \text{se } x\in(1,2)\\[2ex] \dfrac{2x-3}{2\sqrt{(x-1)(x-2)}} & \text{se } x>2.\end{cases}$$

Sia $x\in(1,2)$: l'equazione $f'(x)=0 \Leftrightarrow$

$-2x+3=0 \iff 2x=3 \iff x=3/2$.

Inoltre $f'(x)>0 \iff \begin{cases} -2x+3>0 \\ x\in(1,2) \end{cases} \begin{cases} 2x<3 \\ x\in(1,2) \end{cases} \begin{cases} x\in(1,3/2) \end{cases}$

Quindi

f è strett. crescente per $x\in(1,3/2)$
f è " decrescente per $x\in(3/2,2)$

il punto $3/2$ è pto di massimo locale.

Sia $x>2$, $f'(x)>0 \iff \begin{cases} 2x-3>0 \\ x>2 \end{cases} \begin{cases} 2x>3 \\ x>2 \end{cases}$

$\iff x>2$. Pertanto

f è strettamente crescente in $(2,+\infty)$

Osserviamo che $x_0=2$ è di non derivabilità per f e che

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} \Big(\underbrace{\frac{2x-3}{2\sqrt{x-1}}}_{\to 1/2} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x-2}}_{\to 0^+}}\Big) = +\infty$$

e $$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} \underbrace{\frac{-2x+3}{2\sqrt{x-1}}}_{\to -1/2} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt{2-x}}_{\to 0^+}} = -\infty$$

da cui segue che 2 è pto cuspidale.

Notando che f è strett. decrescente in $(3/2,2)$ e
f è " crescente in $(2,+\infty)$
possiamo concludere che
2 è pto di minimo locale

[ciò poteva anche essere dedotto da $f(2)=0$ e $f(x)\geq 0$ $\forall x\in D_f$
cioè 2 è pto di min. globale]

Ricordiamo che anche 1 è punto di minimo globale; osservando che

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \underbrace{\frac{-2x+3}{2\sqrt{(2-x)}}}_{\to -1/2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}_{\to 0^+} = -\infty$$

abbiamo che

1 è pto cuspidale.

1d) Sia $x\in(1,2)$; in tal caso $f'(x) = \dfrac{-2x+3}{2\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ che è un rapporto di funzioni derivabili per $x\in(1,2)$. Quindi f' è derivabile in $(1,2)$ e

$$f''(x) = \frac{-1}{4\underbrace{(x-1)^{3/2}}_{>0}\underbrace{(2-x)^{3/2}}_{>0}} < 0 \quad (x\in(1,2))$$

e quindi

f è CONCAVA in $(1,2)$

Sia $x>2$, in tal caso $f'(x) = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ che è un rapporto di f. derivabili per $x>2$. Quindi f' è derivabile per $x>2$ e

$$f''(x) = \frac{-1}{4\underbrace{(x-1)^{3/2}(x-2)^{3/2}}_{>0}} < 0 \quad \text{e quindi}$$

f è CONCAVA in $(2,+\infty)$.

Ossia f è CONCAVA dove definita

o/o

Ricordiamo che anche 1 è punto di minimo globale; osservando che

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \underbrace{\frac{-2x+3}{2\sqrt{(2-x)}}}_{\to -1/2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}_{\to 0^+} = -\infty$$

abbiamo che

1 è pto cuspidale.

1d) Sia $x\in(1,2)$; in tal caso $f'(x)=\dfrac{-2x+3}{2\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ che è un rapporto di funzioni derivabili per $x\in(1,2)$. Quindi f' è derivabile in $(1,2)$ e

$$f''(x) = \frac{-1}{4\underbrace{(x-1)^{3/2}}_{>0}\underbrace{(2-x)^{3/2}}_{>0}} < 0 \quad (x\in(1,2))$$

e quindi

f è CONCAVA in $(1,2)$

Sia $x>2$, in tal caso $f'(x) = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ che è un rapporto di f. derivabili per $x>2$. Quindi f' è derivabile per $x>2$ e

$$f''(x) = \frac{-1}{4\underbrace{(x-1)^{3/2}(x-2)^{3/2}}_{>0}} < 0 \quad \text{e quindi}$$

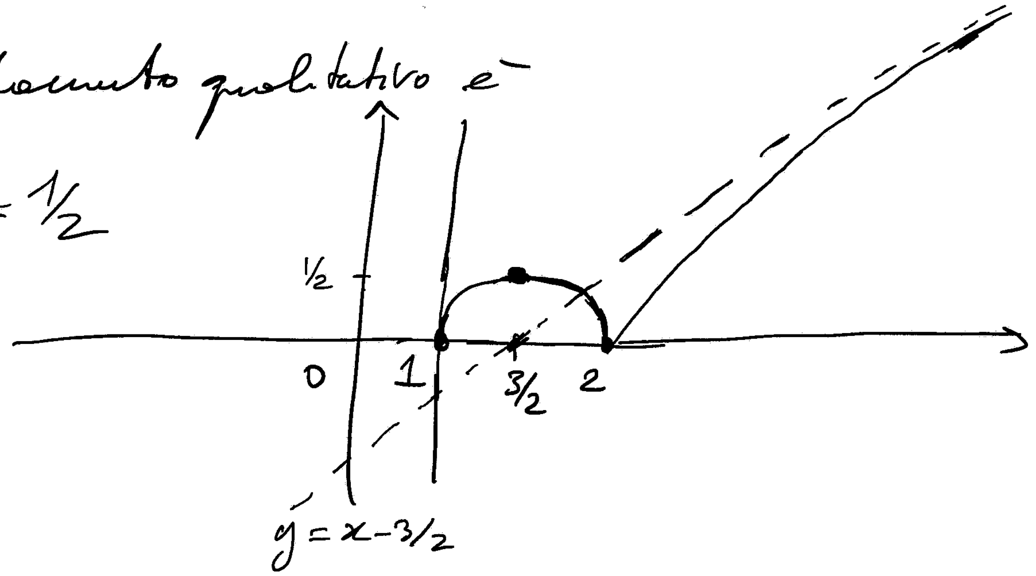
f è CONCAVA in $(2,+\infty)$.

Ossia f è CONCAVA dove definita

a/o

Un andamento qualitativo è

$f(3/2) = 1/2$



Esercizio 2)

2a) osserviamo che $f_a(t) \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Siccome per ogni $a \geq 0$

$$\lim_{t \to +\infty} f_a(t) = \lim_{t \to +\infty} \underbrace{t(2+\sin t)}_{\downarrow +\infty} e^{at} = +\infty ,$$

(funzione infinita e $1 \leq 2+\sin t \leq 3$; teorema del confronto)

l'unica possibilità per avere la convergenza dell'integrale richiesto è che $a<0$. Osserviamo che, per $a<0$, si ha che

$$f_a(t) \underset{\substack{\uparrow \\ 1 \leq 2+\sin t \leq 3 \ \forall t \in \mathbb{R}}}{\leq} 3te^{at} = \frac{3t}{e^{-at}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \quad (a<0)$$

di ordine superiore ad ogni potenza. Quindi $\int_0^{+\infty} 3te^{at}\,dt$, $a<0$, converge (crit. ord. infinitesimo).

Grazie al criterio del confronto, si ha allora che

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f_a(t)\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow a<0.}$$

2b) Sia $a=-1$. Considero $\int \frac{t(2+\sin t)}{e^t}\,dt$

$$= 2\int t e^{-t}\,dt + \int t(\sin t)e^{-t}\,dt = 2I + J$$

Per parti si ha che

$$I = \int \underset{g}{t}\,\underset{f'}{e^{-t}}\,dt = -e^{-t}t - \int(-e^{-t})\,dt$$

$$= -te^{-t} - e^{-t} + c\ ;\ c\in\mathbb{R}$$

$$= -(t+1)e^{-t} + c\ ;\ c\in\mathbb{R}$$

e che

$$H = \int \underset{f'}{e^{-t}}\,\underset{g}{\sin t}\,dt = -e^{-t}\sin t + \int e^{-t}\cos t\,dt$$

Siccome $\int \underset{f'}{e^{-t}}\,\underset{g}{\cos t}\,dt = -e^{-t}\cos t + \int e^{-t}(-\sin t)\,dt$ (*)

si ha che

$$H = -e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t - \int e^{-t}\sin t\,dt$$

$$= -e^{-t}(\sin t + \cos t) - H$$

cioè

$$2H = -e^{-t}(\sin t + \cos t) + c$$

da cui $H = -\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t) + c$; $c\in\mathbb{R}$

Osserviamo ora che, integrando per parti, si ha

$$J = \int t \underbrace{(\sin t) e^{-t}}_{H'(t)} dt = \int \underset{f}{t} \, \underset{g'}{H'(t)} dt$$

$$= t H(t) - \int H(t) dt$$

$$= t H(t) + \frac{1}{2} \int e^{-t} (\sin t + \cos t) \, dt$$

$$= t H(t) + \frac{1}{2} \int e^{-t} \sin t \, dt + \frac{1}{2} \int e^{-t} \cos t \, dt$$

$$= t H(t) + 1/2 \, H(t) + \frac{1}{2} \left(-e^{-t} \cos t - H(t) \right) + c$$

per (*) pag 6

$$= t H(t) - 1/2 \, e^{-t} \cos t + c \; ; c \in \mathbb{R}$$

$$= -t/2 \, e^{-t} (\sin t + \cos t) - 1/2 \, e^{-t} \cos t + c$$

$$= -t/2 \, e^{-t} \sin t - 1/2 (t+1) e^{-t} \cos t + c \; ; \quad c \in \mathbb{R}$$

In conclusione

$$\int \frac{t(2 + \sin t)}{e^t} dt = 2I + J$$

$$= -2(t+1) e^{-t} - t/2 \, e^{-t} \sin t - \frac{t+1}{2} e^{-t} \cos t + c \; ; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$=: F(t) + c \; ; \; c \in \mathbb{R}$$

Per definizione

$$\int_0^{+\infty} \frac{t(2+\sin t)}{e^t}\,dt = \lim_{u\to+\infty} \int_0^u \frac{t(2+\sin t)}{e^t}\,dt$$

$$\underset{\text{F.F.C.I}}{=} \lim_{u\to+\infty} \left(F(u) - F(0)\right)$$

$$= \lim_{u\to+\infty} \Big[-2(u+1)\underbrace{e^{-u}}_{\to 0} - \frac{u}{2}\underbrace{e^{-u}}_{\to 0}\sin u - \frac{u+1}{2}\underbrace{e^{-u}}_{\to 0}\cos u\Big] +$$

$$-\left[-2-\tfrac{1}{2}\right]$$

$$= 5/2$$

Esercizio 3) Osserviamo che il numeratore

$\sin x - \operatorname{tg} x - x^{7/2}\lg x$ è infinitesimo per $x\to 0^+$

Inoltre $x^{7/2}\lg x = o(x^3)$ per $x\to 0^+$ perché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{7/2}\lg x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} x^{1/2}\lg x = 0.$$

Poiché $\sin x = x - x^3/6 + o(x^4)$ per $x\to 0^+$

e $\operatorname{tg}(x) = x + x^3/3 + o(x^4)$ per $x\to 0^+$

si ha che

$$\text{NUMERATORE} = x - x^3/6 + o(x^4) - x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) + o(x^3)$$

$$= -x^3/2 + o(x^3) \quad \text{per } x\to 0^+$$

ossia il numeratore è infinitesimo di ordine 3

Al denominatore si ha che $(1-\cos x) = +\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0^+$ e $(\sin x)^b = \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^b$.

$\boxed{\text{Se } b = 0}$ il denominatore è in futesimo di ordine 2 e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\sin x - tg\, x + x^{7/2} \lg x}^{\text{ordine } 3}}{\underbrace{1 - \cos x}_{\text{ordine } 2}} = 0$$

$\boxed{\text{Se } b < 0}$ allora il limite diviene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{(\sin x)^{-b}}^{\text{ordine } -b}\overbrace{(\sin x - tg\, x + x^{7/2}\lg x)}^{\text{ordine } 3}}{\underbrace{1-\cos x}_{\text{ordine } 2}}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \sin x \sim x \\ x \to 0^+}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(x^{-b} + o(x^{-b}))(-x^3/2 + o(x^3))}{x^2/2 + o(x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{3-b}/2 + o(x^{3-b})}{x^2/2} = 0$$

perché $3-b > 2$ essendo $b < 0$.

Se $b > 0$, il denominatore ha ordine di infinitesimo $2+b$; infatti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - tg\, x + x^{7/2}\lg x}{(\sin x)^b (1-\cos x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3/2 + o(x^3)}{(x^b + o(x^b))\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}$$

./.

$(b>0)$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^3/2 + o(x^3)}{\frac{x^{2+b}}{2} + o(x^{2+b})} = \begin{cases} -1 & \text{se } 2+b=3 \\ 0 & \text{se } 2+b<3 \\ -\infty & \text{se } 2+b>3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 & \text{se } b=1 \\ 0 & \text{se } 0<b<1 \\ -\infty & \text{se } b>1 \end{cases}$$

In conclusione il limite richiesto è

$$\begin{cases} -1 & \text{se } b=1 \\ 0 & \text{se } b<1 \\ -\infty & \text{se } b>1 \end{cases}.$$

Esercizio 4 | L'eq. differenziale in questione è omogenea e del secondo ordine a coeff. costanti. Calcoliamo le sol. dell'eq. caratteristica:

$p(\lambda) = \lambda^2 + 4d\lambda + 4 = 0$ con $d>0$.

Se $d=1$, $p(\lambda)=0 \iff \lambda=-2$ e l'eq. differenziale ha sol $c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$, $c_1 c_2 \in \mathbb{R}$

Se $d>1$, $p(\lambda)=0 \iff \lambda_1 = -2d + 2\sqrt{d^2-1}$; e $\lambda_2 = -2d - 2\sqrt{d^2-1}$

le sol. dell'equazione differenziale sono

$$c_1 e^{(-2d+2\sqrt{d^2-1})x} + c_2 e^{(-2d-2\sqrt{d^2-1})x}$$

$c_1 c_2 \in \mathbb{R}$,

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 26 giugno 2019 (Terzo appello, a.a. 2018-2019)

Cognome e nome:________________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log\Big(\dfrac{\sin x}{|\cos x|}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, la periodicità ed il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio. **N.B.** lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Per ogni $a > 0$, calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + x^{1/3}) - \sinh(x^{1/3})}{\sin(x^a) - \cos(x^{1/3})\log(1 + \sin x)}.$$

Esercizio 3. Sia data $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^{2x} - 2e^x + 2}$.

(3.a) Calcolare tutte le primitive di $f(x)$.

(3.b) Studiare la convergenza di $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ e, nel caso in cui converga, calcolarlo.

Esercizio 4. Studiare, per ogni $b \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\cos b)^n}{n + \sqrt{n} + 3}.$$

Esercizio 5. (5.a) Fornire l'enunciato della condizione di estremalità locale con le derivate successive.

(5.b) Dimostrare l'esistenza della successione minimizzante.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 26 giugno 2019 (Terzo appello, a.a. 2018-2019)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log\left(\frac{|\sin x|}{\cos x}\right)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, la periodicità ed il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio. **N.B.** lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Per ogni $a > 0$, calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^{1/4}) - \arctan(x^{1/4})}{\sinh(x^a) - \cos(\sqrt{x})\log(1+\sin x)}.$$

Esercizio 3. Sia data $f(x) = \frac{2e^x+1}{e^{2x}+2e^x+2}$.

(3.a) Calcolare tutte le primitive di $f(x)$.

(3.b) Studiare la convergenza di $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ e, nel caso in cui converga, calcolarlo.

Esercizio 4. Studiare, per ogni $b \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin b)^n}{n+\sqrt{n}+1}.$$

Esercizio 5. (5.a) Fornire l'enunciato della condizione necessaria di estremalità locale.

(5.b) Dimostrare il Teorema di Rolle.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 26 giugno 2019 (Terzo appello, a.a. 2018-2019)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log\Big(\dfrac{\cos x}{|\sin x|}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, la periodicità ed il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio. **N.B.** lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Per ogni $a > 0$, calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1 + x^{1/2}) - \sinh(x^{1/2})}{\sinh(x^a) - \cos(x^{1/2})\log(1 + \arctan x)}.$$

Esercizio 3. Sia data $f(x) = \frac{e^x+1}{e^{2x}-2e^x+2}$.

(3.a) Calcolare tutte le primitive di $f(x)$.

(3.b) Studiare la convergenza di $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ e, nel caso in cui converga, calcolarlo.

Esercizio 4. Studiare, per ogni $b \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin b)^n}{n + n^{1/3} + 2}.$$

Esercizio 5. (5.a) Fornire l'enunciato della condizione necessaria di convergenza di una serie numerica.

(5.b) Dimostrare il Teorema di Lagrange.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 26 giugno 2019 (Terzo appello, a.a. 2018-2019)

Cognome e nome:______________________ Matricola:__________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log\left(\frac{|\cos x|}{\sin x}\right)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, la periodicità ed il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio. **N.B.** lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Per ogni $a > 0$, calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-x^{1/5}) + \sin(x^{1/5})}{\sin(x^a) - \cos(x^{1/3})\log(1+\sinh x)}.$$

Esercizio 3. Sia data $f(x) = \frac{2e^x-1}{e^{2x}+2e^x+2}$.

(3.a) Calcolare tutte le primitive di $f(x)$.

(3.b) Studiare la convergenza di $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ e, nel caso in cui converga, calcolarlo.

Esercizio 4. Studiare, per ogni $b \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\cos b)^n}{n + n^{1/4} + 1}.$$

Esercizio 5. (5.a) Fornire la classificazione dei punti di discontinuità di una funzione di una variabile reale.

(5.b) Dimostrare il teorema della media integrale.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Terzo Appello Analisi 1

26/06/2018

File B

1) Studiare la funzione $f(x) = \lg\left(\frac{|\sin x|}{\cos x}\right)$

Il dominio è determinato dalle condizioni:

$$\begin{cases} \frac{|\sin x|}{\cos x} > 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} |\sin x| > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$$ le cui soluzioni

sono $D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, 2k\pi\right) \cup \left(2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right]$

PARITÀ $f(-x) = \lg\left(\frac{|\sin(-x)|}{\cos(-x)}\right) \underset{\substack{\cos x \text{ pari} \\ \sin x \text{ dispari}}}{=} \lg\left(\frac{|\sin x|}{\cos x}\right) = f(x)$

Quindi f è PARI

PERIODICITÀ $f(x+2\pi k) = \lg\left(\frac{|\sin(x+2k\pi)|}{\cos(x+2k\pi)}\right)$

$(x+2k\pi \in D_f;\ k\in\mathbb{Z})$ $= \lg\left(\frac{|\sin x|}{\cos x}\right) = f(x)$

Quindi f è PERIODICA di periodo 2π

SEGNO DI f: grazie alla periodicità e alla parità di f è sufficiente studiarlo in $(0, \pi/2) =: A$

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ x \in A \end{cases} \quad \begin{cases} x \in A \\ \frac{|\sin x|}{\cos x} > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in A\ (\Rightarrow \cos x > 0) \\ |\sin x| > \cos x \end{cases}$$; dunque

$$\begin{cases} x \in (0, \pi/2) \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases}$$ ossia $x \in (\pi/4, \pi/2)$.

Pertanto $f(x)>0 \quad \forall x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\left(-\pi/2+2k\pi, -\pi/4+2k\pi\right) \cup \left(\pi/4+2k\pi, \pi/2+2k\pi\right) \right]$

$f(x)=0 \iff x \in \left\{-\pi/4+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}$

$f(x)<0 \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi, 2k\pi\right) \cup \left(2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \right]$

2) Limiti : i limiti significativi sono

$$\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \lg\left(\frac{|\sin x|}{\cos x}\right) = \lim_{x\to(-\pi/2)^+} \lg(\underbrace{-\operatorname{tg} x}_{\downarrow -\infty}) = +\infty$$

($\Rightarrow$ f non ha MASSIMI GLOBALI)

Per la parità di f si ha che

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} f(x) = \lim_{x\to(-\pi/2)^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \lg\left(\frac{|\sin x|}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0^-} \lg(-\underbrace{\operatorname{tg} x}_{\downarrow 0^-}) = -\infty$$

($\Rightarrow$ f non ha minimi globali)

Per la parità di f si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$

La retta $x=0$ è ASINTOTO VERTICALE (destro e sinistro)

La retta $x=-\pi/2$ è ASINTOTO VERTICALE DESTRO

La retta $x=\pi/2$ è ASINTOTO VERTICALE SINISTRO

Grazie alla periodicità non vi sono né asintoti orizzontali né obliqui.

<u>Continuità di f</u>: f è continua dove definita perché composizione di f. continue

<u>Derivabilità di f</u>: osserviamo che $\cos x > 0$ $\forall x \in D_f$ e quindi $f(x) = \lg(|\mathrm{tg}\, x|)$ $\forall x \in D_f$

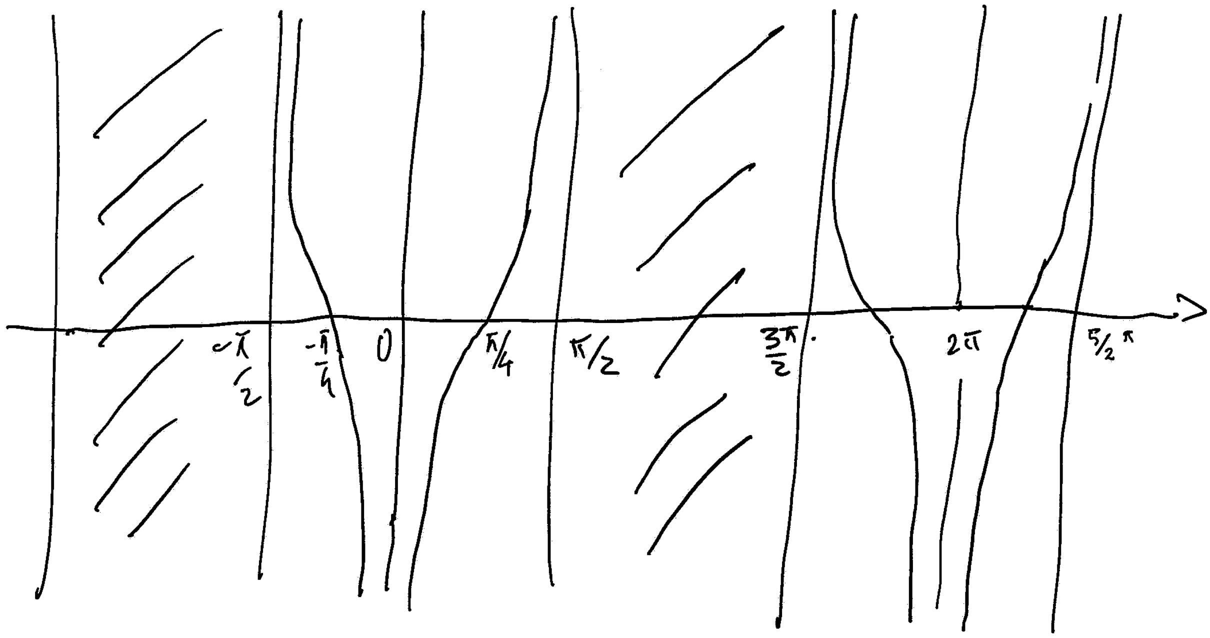
Pertanto f è derivabile in D_f essendo composizione di funzioni derivabili in D_f ($\lg |t|$ derivabile per $t \neq 0$)

<u>$x \in D_f$</u>: $f'(x) = \dfrac{1+\mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg}\, x} > 0 \iff \begin{cases} \mathrm{tg}\, x > 0 \\ x \in D_f \end{cases}$

Pertanto f è strett. crescente in $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

e f è strett. decrescente in $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi\right)$.

Un andamento di f è (ristretto a $(-\pi/2, 5/2\,\pi) \cap D_f$)



Esercizio 3) $\boxed{\text{Calcolare le primitive di } \dfrac{2e^x+1}{e^{2x}+2e^x+2}}$

Mediante la sost. $t=e^x$ si ottiene che $\left(\begin{array}{l} x\in\mathbb{R}, \\ t>0 \end{array}\right)$

$$\int \frac{2e^x+1}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx = \left.\int \frac{2t+1}{t^2+2t+2}\,\frac{1}{t}\,dt\right]_{t=e^x\ (t>0)}$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t+1)^2+1} + \int \frac{dt}{t((t+1)^2+1)} = (*)$$

Col metodo di risoluzione per funzioni razionali si pone

$$\frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{(t+1)^2+1} = \frac{1}{t((t+1)^2+1)}$$ da cui segue

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+C=0 \\ 2A=1 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} B=-1/2 \\ C=-1 \\ A=1/2 \end{cases}.$$

Allora

$$(*) = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \int \frac{t/2+1}{(t+1)^2+1}$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} + \frac{1}{2}\lg|t| - \frac{1}{2}\int \frac{t}{(t+1)^2+1}\,dt$$

$$= \operatorname{atg}(t+1) + \frac{1}{2}\lg|t| - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \frac{2t+2-2}{(t+1)^2+1}$$

$$= \operatorname{atg}(t+1) + \frac{1}{2}\lg|t| - \frac{1}{4}\int \frac{2t+2}{(t+1)^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+1)^2+1}$$

$$= \frac{3}{2}\operatorname{atg}(t+1) + \frac{1}{2}\lg|t| - \frac{1}{4}\lg\left((t+1)^2+1\right) + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\underset{t=e^x}{=} \frac{3}{2}\operatorname{atg}(e^x+1) + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\lg\left((e^x+1)^2+1\right) + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

Calcolo di $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. Per definizione va studiato ($F(x) = \frac{3}{2}\operatorname{atg}(e^x+1) + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\lg((e^x+1)^2+1)$)

$$\lim_{n\to+\infty} (F(n) - F(0))$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{3}{2}\operatorname{atg}(e^n+1) + \lg\left(\frac{e^{n/2}}{(e^{2n}+2e^n+2)^{1/4}}\right) + \right.$$

$$\left. -\left(\frac{3}{2}\operatorname{atg}(2) - \frac{1}{4}\lg(5)\right)\right]$$

Notiamo che

$$\frac{e^{n/2}}{(e^{2n}+2e^n+2)^{1/4}} = \frac{e^{n/2}}{e^{n/2}\left(1+2e^{-n}+2e^{-2n}\right)^{1/4}}$$

$$= \frac{1}{(1+2e^{-n}+2e^{-2n})^{1/4}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} (F(n) - F(0)) = \frac{3}{2}\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{3}{2}\operatorname{atg}(2) + \frac{1}{4}\lg(5)$$

<u>Esercizio 2</u> Si noti che il numeratore che il denominatore (dato che $a>0$) sono entrambe funzioni infinitesime per $x\to 0^+$

<u>Numeratore</u> usando la f. di McLaurin si ha che

$$\lg(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) \quad \text{per } y\to 0^+$$

$$\operatorname{atg}(y) = y - y^3/3 + o(y^3) \quad \text{per } y\to 0^+$$

Da ciò segue che

$$\lg(1+x^{1/4}) - \operatorname{atg}(x^{1/4}) = \cancel{x^{1/4}} - \frac{x^{1/2}}{2} + o(x^{1/2}) - \cancel{x^{1/4}} + \frac{1}{3}x^{3/4} + o(x^{3/4})$$

$$= -\tfrac{1}{2}x^{1/2} + o(x^{1/2}) \quad \text{per } x\to 0^+$$

<u>Denominatore</u>: nuovamente per le f. di MacLaurin si ha

$$\sinh(y) = y + y^3/6 + o(y^3) \quad \text{per } y\to 0$$

$$\cos(y) = 1 - y^2/2 + o(y^3) \quad \text{per } y\to 0$$

$$\lg(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + o(y^2) \quad \text{per } y\to 0$$

$$\sin x = x - x^3/6 + o(x^3) \quad \text{per } x\to 0.$$

Quindi $\lg(1+\sin x) = \lg(1+x-x^3/6+o(x^3))$

$$= x - x^3/6 + o(x^3) - \frac{1}{2}\left(x - x^3/6 + o(x^3)\right)^2 + o(x^2)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{2}x^2\left(1 - x^2/6 + o(x^2)\right)^2 + o(x^2)$$

$$= x - x^3/6 + o(x^3) - \tfrac{1}{2}x^2\left(1 + 2\left(-x^2/6 + o(x^2)\right)\right) + o(x^2)$$

$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + o(u^2)$

$$= x - x^2/2 + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0^+$$

Quindi: (si ricordi che $a > 0$)

$\sinh(x^a) - \cos(\sqrt{x}) \cdot \lg(1 + \sin x)$

$$= x^a + \frac{x^{3a}}{6} + o(x^{3a}) - \left(1 - \frac{x}{2} + o(x^{3/2})\right) \cdot \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= x^a + \frac{x^{3a}}{6} + o(x^{3a}) - \Big[x - \frac{x^2}{2} + o(x^{5/2}) + - x^2/2 + x^3/4 + o(x^{7/2}) + o(x^2)\Big]$$

$$= x^a + \frac{x^{3a}}{6} + o(x^{3a}) - (x - x^2 + o(x^2))$$

$$= x^a - x + \frac{x^{3a}}{6} + x^2 + o(x^2) + o(x^{3a}) \qquad \text{per } x \to 0^+$$

Il denominatore è quindi (per $x \to 0^+$)

$$D = \begin{cases} x^a + o(x^a) & \text{se } 0 < a < 1 \\ x^2 + o(x^2) & \text{se } a = 1 \\ -x + o(x) & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

Pertanto: $\boxed{\text{Per } 0 < a < 1}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{N}{D} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-1/2\, x^{1/2} + o(x^{1/2})}{x^a + o(x^a)} = \begin{cases} -1/2 & a = 1/2 \\ 0 & 0 < a < \frac{1}{2} \\ -\infty & 1 > a > 1/2 \end{cases}$$

grazie al principio di sostituzione degli infinitesimi:

$\boxed{\text{Per } a = 1}$ $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{N}{D} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-1/2\, x^{1/2} + o(x^{1/2})}{x^2 + o(x^2)} = -\infty,$

nuovamente grazie al principio di sost. degli infinitesimi.

$\boxed{\text{per } a>1}$: $\lim_{x\to 0^+} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/2\, x^{1/2} + o(x^{1/2})}{-x + o(x)} = +\infty$,

ancora per il principio di sost. degli infinitesimi.

Riassumendo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N}{D} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0<a<1/2 \\ -1/2 & \text{se } a=1/2 \\ -\infty & \text{se } 1/2<a\le 1 \\ +\infty & \text{se } a>1 \end{cases}$$

Esercizio 4 | Osserviamo che, posto

$b_n = (\sin b)^n / (n+\sqrt{n}+1)$, $b\in\mathbb{R}$, si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = |\sin b| \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+\sqrt{n}+1}}$$

Poiché $\sqrt[n]{n+\sqrt{n}+1} = e^{\frac{1}{n}\lg(n+\sqrt{n}+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (con $\frac{1}{n}\lg(n+\sqrt{n}+1) \to 0$)

si ha che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = |\sin b|$.

Se $|\sin(b)|<1$ (ossia $b\in\mathbb{R}\setminus\{-\pi/2+2k\pi;\ \pi/2+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$) si ha che $\sum b_n$ è assolutamente convergente.

Se $\sin b = 1$ (cioè $b\in\{\pi/2+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$),

allora $\sum b_n = \sum \frac{1}{n+\sqrt{n}+1}$

che è divergente dato che

%

$$\frac{1}{n+\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{di ordine } 1.$$

Se $\sin b = -1$ (ossia $b \in \{-\pi/2 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$),
allora $\sum b_n = \sum (-1)^n/(n+\sqrt{n+1})$.
Siccome $n+\sqrt{n+1} \geq 0$ $\forall n \geq 0$, posto

$c_n := n+\sqrt{n+1}$, abbiamo che $\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty$;

$$c_{n+1} = (n+1) + \sqrt{n+1} + 1 > n + \sqrt{n+1} + 1$$
$$> n + \sqrt{n} + 1 = c_n. \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quindi si ottiene che $b_n = 1/c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ e $b_{n+1} < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Il criterio di von Leibniz permette quindi di concludere che $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n+1}}$ è convergente.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 18 settembre 2019 (Quarto appello, a.a. 2018-2019)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Per ogni $a > 0$, calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sin(1/x))^a - x^{-a}}{(\frac{1}{x} - \log(\frac{1+x}{x}))^{3/2}}.$$

Esercizio 2. Studiare, per $x \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\log x)^n}{n-1}.$$

Esercizio 3. Calcolare tutte le primitive di $f(x) = \frac{e^x}{2+e^{2x}-e^x}$. Calcolare poi $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2-t}$.

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy: $y''(t) + 2y'(t) - 8y(t) = 2e^{2t}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare il principio di sostituzione degli infiniti di ordine inferiore.

(5.b) Enunciare il Teorema della media integrale.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 18 settembre 2019 (Quarto appello, a.a. 2018-2019)

Cognome e nome:________________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Per ogni $a > 0$, calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sinh(1/x))^a - x^{-a}}{(\cosh(1/x)-1)^{3/2}}.$$

Esercizio 2. Studiare, per $x \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\arctan x)^n}{n-2}.$$

Esercizio 3. Calcolare tutte le primitive di $f(x) = \frac{1}{x(2+\log^2 x + \log x)}$. Calcolare poi $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2+t}$.

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy: $y''(t) + y'(t) - 12y(t) = 3e^{3t}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Esercizio 5. (5.a) Dimostrare il principio di sostituzione degli infinitesimi di ordine superiore.

(5.b) Enunciare il Teorema del differenziale.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica 1

IV Appello

18/09/2019

File B

E1 Per ogni $a>0$ calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sinh(1/x))^a - x^{-a}}{(\cosh(1/x)-1)^{3/2}}.$$

Osserviamo che posto $u=1/x$ il problema si riconduce, grazie al teorema di sostituzione, a
$$\lim_{u\to 0^+} \frac{(\sinh(u))^a - u^a}{(\cosh(u)-1)^{3/2}}.$$

Osserviamo che sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi per $u\to0^+$ (perché $a>0$).

Determiniamo l'ordine di infinitesimo del denominatore:

siccome $\cosh(u) = 1 + u^2/2 + o(u^3)$ per $u\to0^+$

si ha che (per $u\to0^+$):
$$D = (\cosh(u)-1)^{3/2} = \left(1+\frac{u^2}{2}+o(u^3)-1\right)^{3/2}$$
$$= \left(\frac{u^2}{2}+o(u^3)\right)^{3/2} = \frac{u^3}{2\sqrt2}(1+o(u))^{3/2} = \frac{u^3}{2\sqrt2}(1+o(1))$$
$$(1+v)^\alpha = 1+\alpha v+o(v) \xrightarrow[v\to0]{}$$

Studiamo il numeratore:

Siccome $\sinh(u) = u + u^3/6 + o(u^4)$ per $u\to0^+$, si ha che
$$(\sinh u)^a - u^a = (u + u^3/6 + o(u^4))^a - u^a$$

$$= u^a\left(1+u^2/6+o(u^3)\right)^a - u^a$$

$$\underset{\uparrow}{=} u^a\left(1+a\left(u^2/6+o(u^3)\right)+o(u^2)\right) - u^a$$

$(1+v)^a = 1+av+o(v),\ v\to 0$

$$= u^a + \frac{a}{6}u^{2+a} + o(u^{2+a}) - u^a$$

$$= \frac{a}{6}u^{2+a} + o(u^{2+a}) \quad \text{per } u\to 0^+.$$

Di conseguenza (siccome $a>0$) si ha

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{N}{D} = \lim_{u\to 0^+}\frac{a/6\, u^{2+a}+o(u^{2+a})}{u^3/2\sqrt{2}+o(u^3)} = $$

$$\underset{\uparrow}{=}\begin{cases} 0 & \text{se } a>1 \\ \sqrt{2}/3 & \text{se } a=1 \\ +\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

per il principio di sost. degli infinitesimi di ordine superiore.

$\boxed{E2}$

Studiare, per $x\in\mathbb{R}$, la conv. di

$$\sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\operatorname{atg} x)^n}{n-2}.$$

Sia $a_n(x) = \dfrac{(-1)^n(\operatorname{atg} x)^n}{n-2} = \dfrac{(-\operatorname{atg} x)^n}{n-2}.$

Osservo che $\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\operatorname{atg} x|\le 1 \\ +\infty & \text{se } \operatorname{atg} x<-1 \\ \nexists & \text{se } \operatorname{atg} x>1 \end{cases}$

Pertanto, grazie alla condizione necessaria di convergenza, $\sum a_n(x)$ può convergere solamente se $|\arctg(x)| \leq 1$, cioè $x \in [-tg(1), tg(1)] = I$

Per il criterio del rapporto abbiamo che: (n a $x \in I$)

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-\operatorname{atg} x)^{n+1}}{n-1} \frac{n-2}{(-\operatorname{atg} x)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} |\operatorname{atg} x| \frac{n-2}{n-1} = |\operatorname{atg} x| = \ell \in \mathbb{R}$$

Se $|\operatorname{atg} x| < 1$ allora $\sum_{n=3}^{+\infty} a_n(x)$ converge assolutamente per il criterio del rapporto.
(cioè $x \in (-tg(1), tg(1))$)

Se $x = -tg(1)$ allora $(\operatorname{atg}(-tg(1)) = -1)$

$$\sum_{n=3}^{+\infty} a_n(-tg(1)) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n-2} \quad \text{che diverge}$$

avendo $\frac{1}{n-2}$ lo stesso andamento asintotico di $\frac{1}{n}$

Se $x = tg(1)$, allora $\sum_{n=3}^{+\infty} a_n(tg(1)) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-2}$

e quest'ultima converge per il criterio di Leibniz:
$b_n = \frac{1}{n-2} \geq 0$, $b_n \to 0$ per $n \to +\infty$, $b_{n+1} \leq b_n$: infatti
$b_{n+1} = \frac{1}{n-1} \leq \frac{1}{n-2} = b_n$ per ogni $n \geq 3$.

E3) Primitive di $\dfrac{1}{x(\lg^2 x+\lg x+2)}$ e calcolo di $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+t+2}$.

$\boxed{\text{Primitive di } \frac{1}{x(\lg^2 x+\lg x+2)}\,!}$ Osserviamo che:

$$\int \frac{dx}{x(\lg^2 x+\lg x+2)} = \int R(\lg x)\cdot(\lg x)'\,dx$$

dove $R(t)=\dfrac{1}{t^2+t+2}$. Posto $t=\lg x$, $x>0$, $t\in\mathbb{R}$, per la prima forma del teorema di sostituzione si ha che:

$$\int \frac{dx}{x(\lg^2 x+\lg x+2)} = \left.\int\frac{dt}{t^2+t+2}\right|_{t=\lg x}$$

$$=\int\frac{dt}{(t+1/2)^2+7/4} = \frac{4}{7}\int\frac{dt}{\left(\frac{2}{\sqrt7}t+\frac{1}{\sqrt7}\right)^2+1}$$

$$= \frac{4}{7}\,\frac{\sqrt7}{2}\int\frac{du}{u^2+1} = \frac{2}{\sqrt7}\,\mathrm{atg}\left(\frac{2}{\sqrt7}t+\frac{1}{\sqrt7}\right)+c$$

$u=\frac{2}{\sqrt7}t+\frac{1}{\sqrt7}$; $\left(u-\frac{1}{\sqrt7}\right)\frac{\sqrt7}{2}=t$

$g(u)=\frac{\sqrt7}{2}u-\frac{1}{2}=t$

$$=\frac{2}{\sqrt7}\,\mathrm{atg}\left(\frac{2}{\sqrt x}\lg x+\frac{1}{\sqrt7}\right)+c,$$

$c\in\mathbb{R}$, $x>0$

$\boxed{\text{Calcolo di } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+t+2}}$

Tale integrale improprio è convergente perché
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^2+t+2} = 0 \text{ (di ordine 2)}.$$

Dal punto precedente
$$\int \frac{dt}{t^2+t+2} = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{7}}\,\text{atg}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}t+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)}_{=:F(t)}+c \qquad \underbrace{=:F(t)+c;}_{c\in\mathbb{R}}$$

Pertanto per la def. di int^{le} improprio e la F.F.C.I, si ha:
$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+t+2} = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u \frac{dt}{t^2+t+2} =$$
$$= \lim_{u\to+\infty}\left(F(u)-F(0)\right) = \lim_{u\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{7}}\,\text{atg}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}u+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)+\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\sqrt{7}}\,\text{atg}(1/\sqrt{7})\right] = \frac{2}{\sqrt{7}}\left(\frac{\pi}{2}-\text{atg}(1/\sqrt{7})\right)$$

E4 Risolvere il Problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y''(t)+y'(t)-12y(t)=3e^{2t} \\ y(0)=1 \\ y'(0)=2. \end{cases}$$

L'equazione diff.^{le} omogenea ha pol. caratteristico $p(\lambda)=\lambda^2+\lambda-12$, e quindi $p(\lambda)=0 \iff \lambda=3$ oppure $\lambda=-4$.

Tutte e sole le soluzioni dell'eq. diff.^{le} omogenea associata sono quindi

$$y(t)=c_1 e^{3t}+c_2 e^{-4t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Con il metodo di somiglianza determino una sol. particolare dell'eq. diff.^{le} non omogenea; ho

$$f(t)=3e^{3t}=e^{\alpha t}(p_1(t)\cos(\beta t)+p_2(t)\sin(\beta t))$$

Determino $\alpha, \beta, p_1(t), p_2(t)$:

si ha che: $\alpha=3, \beta=0, p_1(t)=3, p_2(t)=0$.

Siccome $\alpha \pm i\beta=3$ è soluzione di $p(\lambda)=0$, avremo (applicando il metodo di somiglianza) che una sol. particolare $\overline{y}(t)$ verifica essere:

$$\overline{y}(t)=te^{3t}(A\cos(0t)+B\sin(0t))$$

$$=Ate^{3t}, \text{ con } A\in\mathbb{R} \text{ da determinare.}$$

Poiché $\overline{y}'(t)=Ae^{3t}+3Ate^{3t}=Ae^{3t}(1+3t)$

$$\overline{y}''(t)=3Ae^{3t}(1+3t)+3Ae^{3t}=3Ae^{3t}(2+3t)$$

otteniamo che $\overline{y}(t)$ è soluzione se e solo se A è tale che:

$$3A(2+3t)\cancel{e^{3t}}+A(1+3t)\cancel{e^{3t}}-12At\cancel{e^{3t}}=3\cancel{e^{3t}}$$

$$6A+A+9A\cancel{t}+3At-12At=3$$

$$7A = 3 \quad \text{cioè} \quad A = 3/7.$$

Quindi $\overline{Y}(t) = \frac{3}{7} t e^{3t}$ è sol. particolare dell'eq. non omogenea.

Le sol. dell'eq. diff.le non omogenea sono quindi tutte e sole:

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-4t} + \frac{3}{7} t e^{3t}; \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo ora l'unica soluzione del pb. di Cauchy: $y'(t) = 3c_1 e^{3t} - 4c_2 e^{-4t} + \frac{3}{7} e^{3t} + \frac{9}{7} t e^{3t}$

Pertanto:

$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 + c_2 \\ 2 = y'(0) = 3c_1 - 4c_2 + 3/7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ 3(1-c_2) - 4c_2 + 3/7 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ -7c_2 = -10/7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 39/49 \\ c_2 = 10/49. \end{cases}$$

Quindi l'unica sol. del pb. di Cauchy è

$$y(t) = \frac{39}{49} e^{3t} + \frac{10}{49} e^{-4t} + \frac{3}{7} t e^{3t}.$$

$\boxtimes$