Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 25 gennaio 2023 (Primo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome:____________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \exp\Big(\dfrac{2}{\log(4-x^2)}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. $\exp(u) := e^u$; lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Studiare, per $\beta > 0$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}}{n^\beta}.$$

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$, e sia

$$f_a(x) = \frac{1}{x^a\sqrt{x^2-9}}.$$

(3.a) Determinare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinito di $f_a(x)$ in 3 da destra.

(3.b) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $f_a(x)$ è un infinitesimo in $+\infty$; in tali casi determinare l'ordine di infinitesimo di $f_a(x)$ in $+\infty$.

(3.c) Studiare la convergenza di $\int_3^{+\infty} f_a(x)\,\mathrm{d}x$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(3.d) Calcolare $\int_3^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 4. Calcolare per ogni $b \in \mathbb{R}$ il valore di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^{1/3}) - \tan(x^{1/3})}{(e^x-1)x^b}.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = 5$.

(5.b) Enunciare uno dei teoremi del confronto per i limiti.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 25 gennaio 2023 (Primo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome:____ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \exp\Big(\dfrac{2}{\log(3-x^2)}\Big)$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie e segno.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

N.B. $\exp(u) := e^u$; lo studio della convessità non è richiesto.

Esercizio 2. Studiare, per $\beta > 0$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{n+3} - \sqrt[4]{n}}{n^\beta}.$$

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$, e sia

$$f_a(x) = \frac{1}{x^a\sqrt{x^2-1}}.$$

(3.a) Determinare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, l'ordine di infinito di $f_a(x)$ in 1 da destra.

(3.b) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $f_a(x)$ è un infinitesimo in $+\infty$; in tali casi determinare l'ordine di infinitesimo di $f_a(x)$ in $+\infty$.

(3.c) Studiare la convergenza di $\int_1^{+\infty} f_a(x)\,\mathrm{d}x$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(3.d) Calcolare $\int_1^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 4. Calcolare per ogni $b \in \mathbb{R}$ il valore di

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^{1/3}) - \tan(x^{1/3})}{x^b \sin x}.$$

Esercizio 5. (5.a) Usando la definizione di limite si fornisca il significato della scrittura $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 7$.

(5.b) Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Analisi Matematica 1 - Ing. Chimica e Materiali
CANALE A

Primo Appello del 25/01/2023

Risoluzione Fila A

Esercizio 1 Studio di

$$f(x) = e^{\frac{2}{\lg(4-x^2)}} = \exp\left(\frac{2}{\lg(4-x^2)}\right)$$

1a) D_f : $\begin{cases} \lg(4-x^2) \neq 0 \\ 4-x^2 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4-x^2 \neq 1 \\ x^2 < 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 \neq 3 \\ x^2 < 4 \end{cases}$

$$\Rightarrow D_f = (-2,2) \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

PARITÀ : D_f è simmetrico rispetto a 0; inoltre

$$f(-x) = \exp\left(\frac{2}{\lg(4-(-x)^2)}\right) = \exp\left(\frac{2}{\lg(4-x^2)}\right) = f(x)$$

$\forall x \in D_f$

$\Rightarrow f$ è PARI.

Segno: $f(x) > 0$: la funzione più esterna è un'esponenziale la cui immagine è $(0,+\infty)$.

1b) Per Portai di f si ha, se esistono, che

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = (1)$$

$$\lim_{x\to(-\sqrt{3})^-} f(x) = \lim_{x\to(\sqrt{3})^+} f(x) = (2)$$

$$\lim_{x\to(-\sqrt{3})^+} f(x) = \lim_{x\to(\sqrt{3})^-} f(x) = (3)$$

dato che i punti di acc. di D_f sono -2 (da destra) $-\sqrt{3}$ (bilatero), $\sqrt{3}$ (bilatero), 2 (da sinistra).

Calcolo (1):

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \exp\left(\frac{2}{\underbrace{\lg(\underbrace{4-x^2}_{\downarrow\, 0^+})}_{\to -\infty}}\right)$$

$$= \lim_{u\to-\infty} \exp\left(\underbrace{\frac{2}{u}}_{\to 0^-}\right) = 1^-$$

$$\lim_{x\to(\sqrt{3})^+} f(x) = \lim_{x\to(\sqrt{3})^+} \exp\left(\frac{2}{\underbrace{\lg(\underbrace{4-x^2}_{\downarrow\, 1^-})}_{\to 0^-}}\right)$$

$$= \lim_{u\to 0^-} \exp\left(\underbrace{\frac{2}{u}}_{\to -\infty}\right) = 0^+$$

$$\lim_{x\to(\sqrt{3})^-} f(x) = \lim_{x\to(\sqrt{3})^-} \exp\left(\frac{2}{\underbrace{\lg(\underbrace{4-x^2}_{\downarrow\, 1^+})}_{\to 0^+}}\right)$$

$$= \lim_{n \to 0^+} \exp\left(\underbrace{\frac{2}{u}}_{\to +\infty}\right) = +\infty$$

L'ultimo limite implica che f NON ha MASSIMO GLOBALE.

Inoltre la retta $x = \sqrt{3}$ è asintoto verticale sinistro mentre $x = -\sqrt{3}$ è asintoto verticale destro

Non esistono né asintoti orizzontali né asintoti obliqui.

1c) f è composizione di f. continue in $D_f \Rightarrow$
f è continua dove definita.

f è composizione di f. derivabili in $D_f \Rightarrow$
f è derivabile dove definita.

Sia $x \in D_f$: calcoliamo $f'(x)$: si ha che

$$f'(x) = \exp\left(\frac{2}{\lg(4-x^2)}\right) \cdot \left[2\left(\lg(4-x^2)\right)^{-1}\right]'$$

$$= \exp\left(\frac{2}{\lg(4-x^2)}\right) \cdot 2 (-1)\left(\lg(4-x^2)\right)^{-2} \frac{1}{4-x^2}(-2x)$$

$$= \frac{4x}{\underbrace{(4-x^2)}_{>0\ \forall x \in D_f}\underbrace{\left(\lg(4-x^2)\right)^2}_{>0\ \forall x \in D_f}} \underbrace{\exp\left(\frac{2}{\lg(4-x^2)}\right)}_{>0\ \forall x \in D_f}$$

Quindi

$$f'(x)>0 \iff \begin{cases} 4x>0 \\ x\in D_f \end{cases} \iff x\in(0,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2)$$

e $f'(0)=0$. Pertanto 0 è l'unico punto critico di f. Inoltre

f è strettamente crescente $\forall x\in(0,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2)$

f è " decrescente $\forall x\in(-2,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},0)$

Di conseguenza: 0 è punto di MINIMO locale e $f(0)=\exp\left(\frac{2}{\lg 4}\right)=\exp\left(\frac{1}{\lg 2}\right)$ è MINIMO locale.

Siccome $f(0)=\exp\left(\frac{1}{\lg 2}\right)>0=\lim_{x\to(\sqrt{3})^+}f(x)$

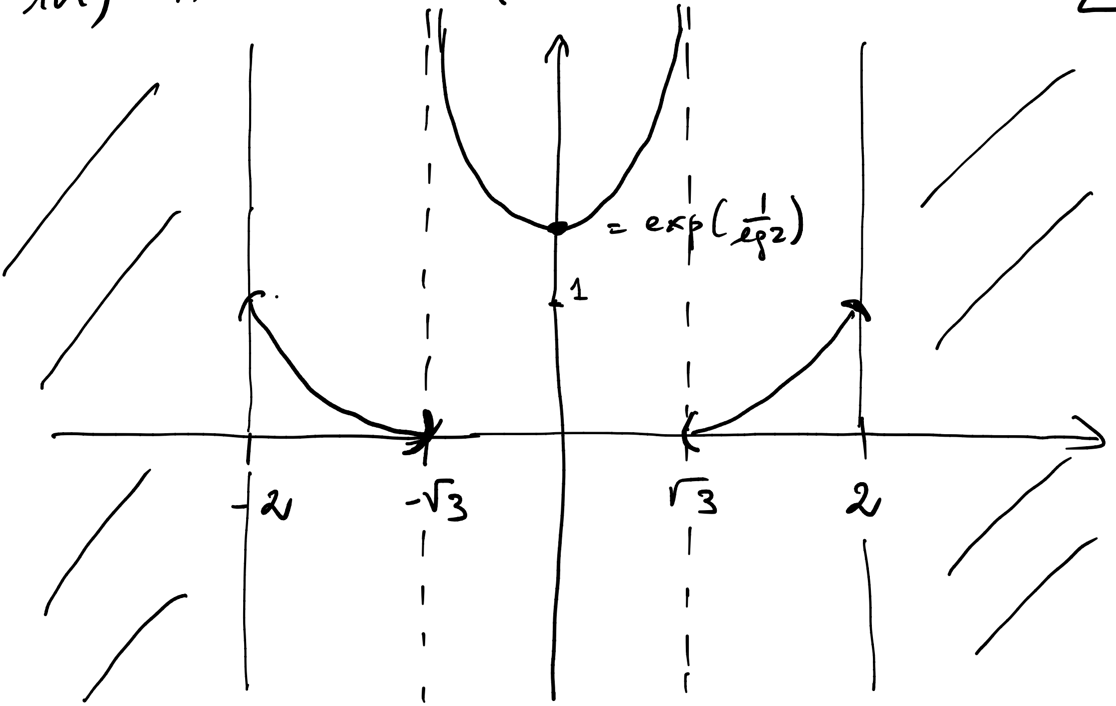
abbiamo che 0 non è di MINIMO GLOBALE.

In particolare, f NON ha minimo globale: infatti $\inf(\mathrm{Im}(f))=0$ (teo. limiti funzione monotone) ma

$$\nexists\, \bar{x}\in D_f \,/\, f(\bar{x})=0$$

a causa del segno di f ($f(x)>0$ $\forall x\in D_f$; punto 1a).

1d) Andamento (non in scala)



Esercizio 2) Studiare la convergenza di:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}}{n^\beta} \qquad (\beta > 0).$$

Osservo che $\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} - \sqrt[3]{n}$

$$= \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} - 1\right) \underset{\uparrow}{=} \sqrt[3]{n}\left(\cancel{1} + \frac{1}{3}\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \cancel{-1}\right)$$

Maclaurin $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0^+}{=} 1+\alpha x + o(x)$

$$= \frac{2}{3\, n^{2/3}} + o\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right) \text{ per } n \to +\infty.$$

Quindi

$$(*) \quad \frac{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}}{n^{\beta}} = \frac{2}{3\, n^{\beta + 2/3}} + o\left(\frac{1}{n^{\beta+2/3}}\right)$$

$n \to +\infty$

Pertanto

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}}{n^{\beta}} = 0 \quad \forall \beta > 0$$

(cond. necessaria di conv. è vera)

Siccome $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}}{n^{\beta}} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

e $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ di ordine $\beta + \frac{2}{3}$

[segue da (*)], il criterio dell'ordine di infinitesimo per le serie ci permette di concludere che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}}{n^{\beta}} \text{ converge} \iff \beta + \frac{2}{3} > 1$$

$$\iff \beta > 1/3 .$$

Esercizio 3) $a \in \mathbb{R}$ e $f_a(x) = \dfrac{1}{x^a \sqrt{x^2-9}}$ 7

3a) ordine di infinito per $x \to 3^+$

$\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{f_a(x)}{\frac{1}{(x-3)^\alpha}} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)^\alpha}{x^a\sqrt{x^2-9}}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x^a} \frac{(x-3)^\alpha}{\sqrt{(x-3)(x+3)}}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x^a} \frac{1}{\sqrt{x+3}} (x-3)^{\alpha - 1/2}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1/2 \\ \dfrac{1}{3^a\sqrt{6}} \ (\neq 0) & \text{se } \alpha = 1/2 \\ +\infty & 0 < \alpha < 1/2 \end{cases}$$

Quindi $f_a(x) \xrightarrow[x\to 3^+]{} +\infty$ di ordine $\frac{1}{2}$

3b) Per quali $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = 0$?

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^a\sqrt{x^2(1-9/x^2)}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^a |x| \sqrt{1-9/x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{a+1}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-9/x^2}}}_{\to 1 \text{ per } x\to+\infty}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } a<-1 \\ 1 & \text{se } a=-1 \\ 0 & \text{se } a>-1 \end{cases}$$

Quindi $\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = 0 \iff a>-1$.

Da quanto sopra: $(a>-1)$ $\quad \alpha>0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_a(x)}{1/x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^{a+1}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-9/x^2}}}_{\to 1,\ x\to+\infty}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>a+1 \\ 1 & \text{se } \alpha=a+1\ (>0) \\ 0 & \text{se } 0<\alpha<a+1 \end{cases}$$

Pertanto $f_a(x)$ è infinitesimo per $x\to+\infty$ se e solo se $a+1>0$; in tal caso, il suo ordine è $a+1$.

3c) Si noti che $f_a(x)>0$ $\forall x\in(3,+\infty)$

che $\lim_{x\to 3^+} f_a(x) = +\infty$ di ordine $\frac{1}{2}$;

che $\lim_{x\to+\infty} f_a(x)=0$ di ordine $a+1$.

Pertanto: il criterio dell'ordine di infinito implica che

$$\int_3^4 f_a(x)\,dx \quad \text{converge } \forall a \in \mathbb{R},$$

mentre il criterio dell'ordine di infinitesimo implica che

$$\int_4^{+\infty} f_a(x)\,dx \quad \text{converge se e solo se } a+1>1; \text{ cioè } a>0.$$

Combinando tali risultati si ha che

$$\int_3^{+\infty} f_a(x)\,dx \quad \text{converge se e solo se } a>0.$$

3d) Calcolare $\int_3^{+\infty} f_1(x)\,dx$

$f_1(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-9}}$; usiamo la sost. consigliata

$t = \sqrt{x^2-9} - x$; $t>3$ da cui segue che

$x = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{t^2+9}{t} =: g(t)$. Per il teorema di

$g(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{9}{2}\frac{1}{t}$

sostituzione, si ha che

$g'(t) = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2}t^{-2} = \dfrac{-t^2+9}{2t^2}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{-2t}{t^2+9}\cdot\frac{2t}{t^2-9}\;\frac{9-t^2}{2t^2}\,dt$$

in cui abbiamo usato anche

$$\sqrt{x^2-9} = t+x = t-\frac{t}{2}-\frac{9}{2}\frac{1}{t} = \frac{t}{2}-\frac{9}{2t} = \frac{t^2-9}{2t}.$$

Allora

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = -2\int \frac{9-t^2}{(t^2+9)(9-t^2)}\,dt \Big|_{t=g^{-1}(x)}$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+9} = 2\int \frac{dt}{9\left(\left(t/3\right)^2+1\right)} \qquad u = t/3, \quad t = 3u$$

$$= \frac{2}{9}\,3\int \frac{du}{u^2+1}$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{arctg}(u)+c = \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(t/3\right)+c$$

$$= \underbrace{\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)\right)}_{=F(x)}+c\,; \quad c\in\mathbb{R}, \quad x\in(3,+\infty)$$

Per definizione

$$\int_3^{+\infty} f_1(x)\,dx = \int_3^5 f_1(x)\,dx + \int_5^{+\infty} f_1(x)\,dx$$

$$= \lim_{z\to 3^+}\int_z^5 f_1(x)\,dx + \lim_{w\to+\infty}\int_5^w f_1(x)\,dx$$

$$= \lim_{z\to 3^+}\Big(F(5)-F(z)\Big) + \lim_{w\to+\infty}\Big(F(w)-F(5)\Big)$$

$$= -\lim_{z\to 3^+} F(z) + \lim_{w\to+\infty} F(w)$$

$$= -\lim_{z\to 3^+} \frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\Big(\underbrace{\frac{1}{3}\big(\overbrace{\sqrt{z^2-9}}^{\to 0^+}\overbrace{-z}^{\to -3}\big)}_{\to -1}\Big) +$$

$$+\lim_{w\to+\infty} \frac{2}{3}\,\mathrm{atg}\Big(\frac{1}{3}\underbrace{\big(\sqrt{w^2-9}-w\big)}_{=\frac{\cancel{w^2}-9-\cancel{w^2}}{\sqrt{w^2-9}+w}}\Big)$$

$$= -\frac{2}{3}\left(-\frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+\lim_{w\to+\infty} \frac{2}{3}\,\mathrm{atg}\Big(\overbrace{\frac{-9}{\underbrace{\sqrt{w^2-9}+w}_{\to+\infty}}}^{\to 0}\Big)$$

$$= \frac{\pi}{6} + \underbrace{\mathrm{arctg}(0)}_{=0} = \frac{\pi}{6}$$

Esercizio 4 | Calcolare $(b\in\mathbb{R})$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x^{1/3})-\tan(x^{1/3})}{x^b(e^x-1)}$$

Sia $N(x) := \sin(x^{1/3}) - \tan(x^{1/3})$

Abbiamo (continuità di lg e di arctg) che

$$\lim_{x\to 0^+} N(x) = N(0) = 0.$$

Usando la f. di Mac Laurin si ha

$$\sin(y) = y - y^3/6 + o(y^4), \quad y \to 0^+$$

$$\tan(y) = y + y^3/3 + o(y^4), \quad y \to 0^+$$

e quindi

$(x>0)$

$$N(x) = \cancel{x^{1/3}} - \frac{x}{6} + o(x^{4/3}) - \left(\cancel{x^{1/3}} + \frac{x}{3} + o(x^{4/3})\right)$$

$$= -x\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) + o(x^{4/3}) = -\frac{x}{2} + o(x) \text{ per } x \to 0^+$$

Quindi $N(x) \to 0$ di ordine 1 per $x \to 0^+$.

Dobbiamo studiare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N(x)}{x^b(e^x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x/2 + o(x)}{x^b(e^x-1)}.$$

<u>Se $b=0$</u> : si ha $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{-x/2 + o(x)}{e^x-1}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pr. sost} \\ \text{infinitesimi}}}{=} \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}\,\frac{x}{e^x-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{limite notevole}}}{=} -\frac{1}{2}$$

Se $b>0$: Si noti che $x^b(e^x-1) \underset{x\to 0^+}{\to} 0$ di ordine $1+b$

Pertanto, siccome, $N(x)\to 0$ di ordine $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N(x)}{x^b(e^x-1)} = -\infty$$

Se $b<0$: Va risolto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{-b}\,(x/2+o(x))}{e^x-1}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^{1-b}}{2}+o(x^{1-b})}{e^x-1} = 0$$

perché il numeratore è ora infinitesimo di ordine $1-b>1$ $(b<0 \Rightarrow -b>0)$

e il denominatore lo è di ordine 1 (limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$)

$\boxtimes$

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 21 febbraio 2023 (Secondo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = (3 - |x|)\exp(\frac{1}{x+3})$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

(1.e) **Nota bene:** lo studio della convessità non è richiesto; $\exp(u) := e^u$.

Esercizio 2. (2.a) Determinare tutte le primitive di $f(x) = \dfrac{\arctan x}{(x-2)^2}$.

(2.b) Studiare la convergenza di $\int_0^2 f(x)\,dx$ e di $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$. Nel caso in cui tali integrali impropri convergano, se ne calcoli il valore.

Esercizio 3. Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+2}.$$

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy:

$$y'(x) = \frac{(y(x)-3)^2}{x^2+9}; \quad y(0) = 4.$$

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema fondamentale del Calcolo Integrale.

(5.b) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Dimostrare che se $f\colon I \to \mathbb{R}$ è derivabile in I e $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I$ allora f è strettamente decrescente in I.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 21 febbraio 2023 (Secondo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome:________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = (2 - |x|)\exp(\frac{1}{x+2})$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

(1.e) **Nota bene:** lo studio della convessità non è richiesto; $\exp(u) := e^u$.

Esercizio 2. (2.a) Determinare tutte le primitive di $f(x) = \dfrac{\arctan x}{(x-4)^2}$.

(2.b) Studiare la convergenza di $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ e di $\int_5^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. Nel caso in cui tali integrali impropri convergano, se ne calcoli il valore.

Esercizio 3. Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^2-4}.$$

Esercizio 4. Risolvere il problema di Cauchy:

$$y'(x) = \frac{(y(x)-2)^2}{x^2+4}; \quad y(0) = 3.$$

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema del differenziale.

(5.b) Dimostrare il teorema di unicità del limite.

Tempo: 3 ore.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 21 febbraio 2023 (Secondo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = (4 - |x|)\exp(\frac{1}{x+4})$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

(1.e) **Nota bene:** lo studio della convessità non è richiesto; $\exp(u) := e^u$.

Esercizio 2. Determinare tutte le primitive di

$$f(x) = \frac{\arctan(x)}{(x-3)^2}.$$

Esercizio 3. Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+3}.$$

Esercizio 4. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = e^{-2x}$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il teorema della media integrale.

(5.b) Dimostrare la condizione necessaria del primo ordine per punti estremali interni.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 21 febbraio 2023 (Secondo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
8	10	9	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = (3 - |x|)\exp(\frac{1}{x+3})$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

(1.e) **Nota bene:** lo studio della convessità non è richiesto; $\exp(u) := e^u$.

Esercizio 2. Determinare tutte le primitive di

$$f(x) = \frac{\arctan(x)}{(x-4)^2}.$$

Esercizio 3. Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+3}.$$

Esercizio 4. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = e^{2x}$.

Esercizio 5. (5.a) Enunciare il criterio integrale per la convergenza delle serie numeriche.

(5.b) Dimostrare che se f è debolmente crescente e derivabile nel suo dominio I, I intervallo, allora $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica 1, canale A
II appello, 21/02/2023

Primo Esercizio Studiare $f(x) = (3-|x|)\exp\left(\frac{1}{x+3}\right)$

Per il dominio di f è sufficiente imporre $x+3 \neq 0 \Rightarrow$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Siccome D_f non simmetrico rispetto 0, si ha che f non è né pari né dispari.

Segno di f: siccome $\exp(u) > 0 \ \forall u \in \mathbb{R}$, si ha che

$$f(x) > 0 \iff \begin{cases} 3-|x| > 0 \\ x \in D_f \end{cases} \iff \begin{cases} |x| < 3 \\ x \in D_f \end{cases} \iff x \in (-3,3)$$

Inoltre $f(x) = 0 \iff x = 3$; $f(x) < 0 \iff x \in (-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$

Limiti: I pti di accumulazione sono: $-\infty, (-3)^-, (-3)^+, +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{\substack{x\to-\infty \\ (x<0)}} (3+x)\overbrace{\exp\Big(\underbrace{\tfrac{1}{x+3}}_{\to 0^-}\Big)}^{\to 1} = -\infty$$

[$\Rightarrow$ f non ha MINIMO GLOBALE]

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x>0)}} (3-x)\overbrace{\exp\Big(\underbrace{\tfrac{1}{x+3}}_{\to 0^+}\Big)}^{\to 1} = -\infty$$

[$\Rightarrow$ f non ha asintoti orizzontali a $+\infty$ e a $-\infty$]

$$\lim_{x\to(-3)^-} f(x) = \lim_{x\to(-3)^-} \underbrace{(3-|x|)}_{\to 0}\overbrace{\exp\Big(\underbrace{\tfrac{1}{x+3}}_{\to 0^-}\Big)}^{\to -\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to(-3)^+} f(x) = \lim_{x\to(-3)^+} \underbrace{(3-|x|)}_{\to 0}\exp\Big(\overbrace{\underbrace{\tfrac{1}{x+3}}_{\to 0^+}}^{\to +\infty}\Big)$$

(= ???)

$$= \lim_{x\to(-3)^+} (3+x)\exp\left(\frac{1}{x+3}\right)$$

$u = \frac{1}{x+3} \xrightarrow[\text{per } x\to(-3)^+]{} +\infty$

$$= \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$$

(gerarchia degli infiniti fatta a lezione).

$\Rightarrow$ f non ha MASSIMO GLOBALE; La retta $x=-3$ è ASINTOTO verticale destro.

Asintoti OBLIQUI

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{3-x}{x}}_{\to -1} e^{\overbrace{\frac{1}{x+3}}^{\to 0}} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)+x) = \lim_{x\to+\infty} (3-x)e^{\frac{1}{x+3}} + x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (-x)\left(e^{\frac{1}{x+3}}-1\right) + \underbrace{3e^{\frac{1}{x+3}}}_{\to 3}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{-x}{x+3}}_{\to -1} \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{x+3}}-1}{\frac{1}{x+3}}}_{\to 1 \text{ (limite notevole)}} + 3e^{\frac{1}{x+3}}$$

$$= -1+3 = 2$$

limite notevole

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{e^u-1}{u} = 1$$

Quindi $y = -x+2$ è ASINTOTO OBLIQUO a $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{3+x}{x}}_{\to 1} \underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{x+3}}^{\to 0}}}_{\to 1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} (3+x)e^{\frac{1}{x+3}} - x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{1}{x+3}}-1\right) + 3e^{1/x+3}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{x}{x+3}}_{\downarrow 1} \underbrace{\frac{e^{\overbrace{\frac{1}{x+3}}^{\to 0}}-1}{\frac{1}{x+3}}}_{\to 1} + 3e^{\overbrace{\frac{1}{x+3}}^{\to 0}}$$

$\boxed{3}$

$$\underset{\uparrow}{=} 1 + 3 = 4$$

limiti notevole $\frac{e^u-1}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$

$\Rightarrow y = x+4$ è asintoto obliquo a $-\infty$

<u>Continuità e derivabilità</u>: f è continua perché comp. di funzioni continue. f è derivabile tranne in 0 in cui $|x|$ non è derivabile in 0. $D_f^{der} = D_f \setminus \{0\} = \mathbb{R}\setminus\{-3,0\}$

<u>Sia $x>0$:</u> $f(x) = (3-x)\,e^{\frac{1}{x+3}}$

$$f'(x) = -e^{\frac{1}{x+3}} + (3-x)\,e^{\frac{1}{x+3}}\left(-\frac{1}{(x+3)^2}\right)$$

$$= -e^{\frac{1}{x+3}}\left(1+\frac{3-x}{(x+3)^2}\right) = -e^{\frac{1}{x+3}}\left(\frac{x^2+9+6x+3-x}{(x+3)^2}\right)$$

$$= -\frac{e^{\frac{1}{x+3}}}{(x+3)^2}\underbrace{\left(x^2+5x+12\right)}_{>0\ \forall x\in\mathbb{R}} < 0 \quad \forall x\in(0,+\infty)$$

$\Rightarrow f$ è strett. decrescente in $(0,+\infty)$

<u>Sia $x<0,\ x\neq -3$</u>: $f(x) = (3+x)\,e^{\frac{1}{x+3}}$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x+3}} + (3+x)\,e^{\frac{1}{x+3}}\left(-\frac{1}{(x+3)^2}\right) = e^{\frac{1}{x+3}}\left(1-\frac{3+x}{(x+3)^2}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{x+3}}\left(1-\frac{1}{x+3}\right) = e^{\frac{1}{x+3}}\,\frac{x+2}{x+3} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{x+3} > 0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2>0 \\ x+3>0 \\ x<0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+2<0 \\ x+3<0 \\ x<0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x > -2 \\ x > -3 \\ x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < -2 \\ x < -3 \\ x < 0 \end{cases} \iff x \in (-2,0) \cup (-\infty,-3)$$

$\boxed{4}$

Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty,-3) \cup (-2,0)$

f è " decrescente in $(-3,-2)$

il punto -2 è CRITICO, ed è punto di MINIMO LOCALE

$$f(-2) = (3-2)\, e^{\frac{1}{3-2}} = 1/e\,.$$

Inoltre 0 è punto di MASSIMO LOCALE; $f(0) = 3e^{1/3}$

Osservo che

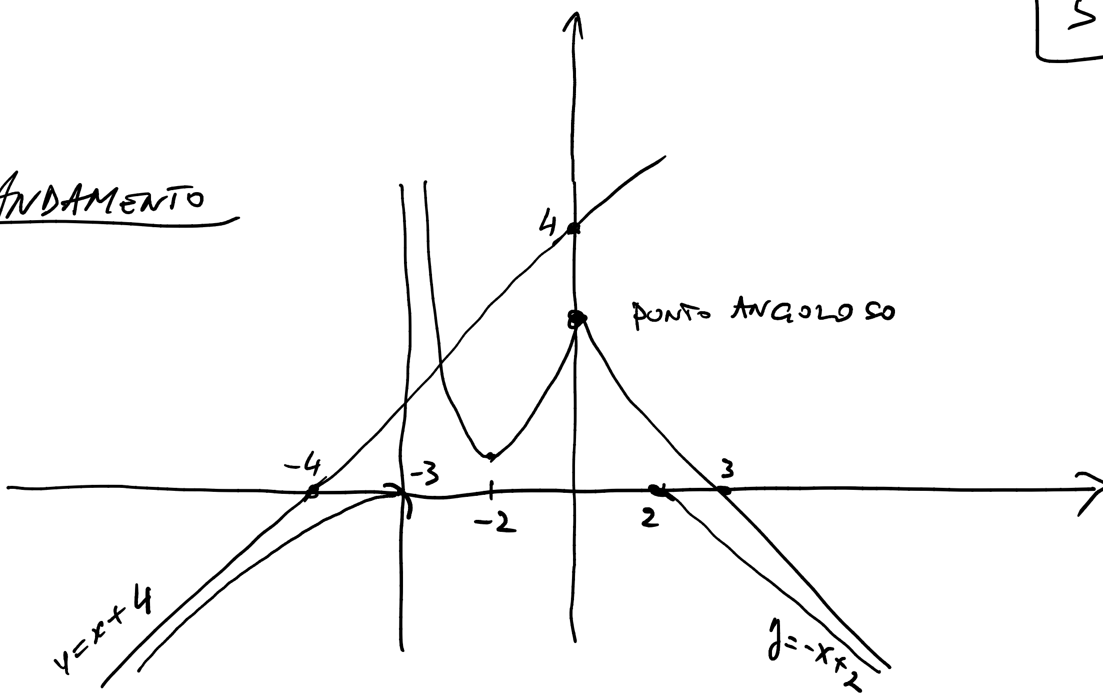
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{e^{\frac{1}{x+3}}}{\underbrace{(x+3)^2}_{\downarrow 9}} \underbrace{(x^2+5x+12)}_{\downarrow 12} = -\frac{4}{3} e^{1/3}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{x+2}{x+3}}_{\downarrow 2/3} e^{\frac{1}{x+3}} = \frac{2}{3} e^{1/3}$$

Pertanto il punto 0 è ANGOLOSO

L'andamento è nella prossima pagina

ANDAMENTO



$\boxed{\text{Esercizio 2}}$ 2a) Calcolare tutte le primitive di

$$f(x)=\frac{\arctan(x)}{(x-2)^2}$$

Integrando per parti si ha che

$$\int\frac{\arctan(x)}{(x-2)^2}\,dx=-\frac{\arctan(x)}{x-2}+\underbrace{\int\frac{dx}{(x-2)(x^2+1)}}_{=I}$$

$f'(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$; $f(x)=-\frac{1}{x-2}$

$g(x)=\arctan x$; $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

Per calcolare I usiamo il metodo dei fratti semplici:

determiniamo $A, B, C, \in\mathbb{R}$ tali che

$$\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{1}{(x-2)(x^2+1)}, \quad \text{ossia}$$

$$A(x^2+1)+(Bx+c)(x-2)=1$$

$$\iff \quad Ax^2+A+Bx^2+Cx-2Bx-2C=1$$

da cui segue
$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-2B=0 \\ A-2C=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-B \\ C=2B \\ -B-4B=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=1/5 \\ C=-2/5 \\ B=-1/5 \end{cases}$$
; Pertanto
$$\frac{1/5}{x-2}+\frac{-1/5\,x-2/5}{x^2+1}=\frac{1}{(x+2)(x^2+1)}$$

Quindi

$$I=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{5}\int\frac{x+2}{x^2+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{5}\lg|x-2|-\frac{1}{5}\int\frac{x}{x^2+1}\,dx-\frac{2}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{5}\lg|x-2|-\frac{1}{10}\lg(x^2+1)-\frac{2}{5}\operatorname{arctg}(x)+c$$

$x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ cost. def. a tratti

2b) Studiare la convergenza di
$$\int_0^2 f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_3^{+\infty} f(x)\,dx,$$
Nel caso convergano, se ne calcoli il valore.

Ricordando $f(x) = \dfrac{\arctan x}{(x-2)^2}$

si ha che

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e f continua in D_f.

La convergenza dell'integrale di f in $[0,2)$ dipende pertanto dal suo ordine di infinito (si noti che $f(x) > 0$ per $x > 0$).

Siccome $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{|f(x)|}{\frac{1}{(2-x)^\alpha}} = \lim_{x \to 2^-} \frac{|\arctan x|}{(2-x)^{2-\alpha}}$ $(\alpha > 0)$

$$= \begin{cases} 0 & x > 2 \\ \operatorname{arctg}(2) & \alpha = 2 \\ +\infty & 0 < \alpha < 2 \end{cases}$$

(e chiaramente $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$) f ha ordine di infinito uguale a 2 per $x \to 2^-$.

Il criterio dell'ordine di infinito ci permette di concludere che $\int_0^2 f(x)\,dx$ DIVERGE.

Osservo ora che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{1/x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{(x-2)^2} \operatorname{arctg} x = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < 2 \\ \frac{\pi}{2} & \alpha = 2 \\ +\infty & \alpha > 2 \end{cases}$$

Pertanto f ha ordine di INFINITESIMO PARI a 2 per $x \to +\infty$. Il criterio dell'ordine di infinitesimo ci permette di concludere che

$$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{CONVERGE.}$$

$\boxed{8}$

Per calcolare $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$, sia $F(u)$ una primitiva di $f(u)$. Allora

$$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_3^u f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty} \left(F(u)-F(3)\right).$$

Ricordando (punto a)) che

$$F(u) = -\frac{\arctan(u)}{u-2} + \frac{1}{5}\log|u-2| - \frac{1}{10}\log(u^2+1) - 2/5 \operatorname{arctg}(u)$$

si ha che

$$\lim_{u\to+\infty} F(u) = 0 - \frac{2}{5}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{10}\lim_{u\to+\infty} \lg\underbrace{\left(\frac{(u-2)^2}{u^2+1}\right)}_{\to 1}$$

$$= -\frac{\pi}{5} + \frac{1}{10}\lim_{t\to 1} \lg t$$

$$= -\pi/5$$

e quindi

$$\int_3^{+\infty} f(x)\,dx = -\frac{\pi}{5} + \frac{7}{5}\arctan(3) + \frac{1}{10}\lg(10).$$

Esercizio 3

Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+2}$$

Sia $a_n = \frac{n+2}{n^2+2} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre

$$a_{n+1} = \frac{n+3}{(n+1)^2+2} \leq \frac{n+2}{n^2+2} = a_n \quad \text{perché}$$

$$\frac{n+3}{n^2+2n+3} \leq \frac{n+2}{n^2+2} \iff (n+3)(n^2+2) \leq (n+2)(n^2+2n+3)$$

$$\iff \cancel{n^3}+3n^2+2n+\cancel{6} \leq \cancel{n^3}+2n^2+2n^2+4n+3n+\cancel{6}$$

$$\iff n(3n+2) \leq n(4n+7)$$

$$\iff 3n+2 \leq 4n+7 \iff 0 \leq n+5$$

Pertanto $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ossia a_n è deb. decrescente

Inoltre $$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n^2+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1+2/n)}{n^2(1+2/n^2)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \frac{\overbrace{1+2/n}^{\to 1}}{\underbrace{1+2/n^2}_{\to 1}} = 0$$

Possiamo pertanto applicare il Criterio di von Leibniz; quindi

$$\sum (-1)^n \frac{n+2}{n^2+2} \quad \underline{\text{CONVERGE}}$$

<u>Esercizio 4</u>

Risolvere
$$y'(x) = \frac{(y(x)-3)^2}{x^2+9} \; ; \; y(0) = 4$$

Notiamo che $y(x) = 3 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ è sol. dell'equazione differenziale, ma non del problema di Cauchy (perché $y(0) = 4 \neq 3$).

Sia $y(x) \neq 3 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$. L'eq. differenziale equivale a
$$\frac{y'(x)}{(y(x)-3)^2} = \frac{1}{x^2+9}$$
da cui si ha
$$\int \frac{y'(x)}{(y(x)-3)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+9}$$

Siccome $\left[-(y(x)-3)^{-1}\right]'$ è l'integranda del lato sinistro, otteniamo che
$$-\frac{1}{y(x)-3} = \int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{9\left[\left(x/3\right)^2+1\right]}$$
$$\underset{\substack{u = x/3 \\ 3u = x}}{=} \frac{1}{9} \int \frac{3\;u}{u^2+1}\,du = \left.\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}(u)\right|_{u = x/3} + c$$

$g(u) = 3u, \; g'(u) = 3 \; ;$ $\qquad c \in \mathbb{R}$

ossia

$$\frac{1}{y(x)-3} = -\frac{1}{3}\,\mathrm{atg}\left(\frac{x}{3}\right)+c \quad , c\in\mathbb{R}$$

$$y(x)-3 = \frac{3}{-\mathrm{atg}(x/3)+3c} \quad , c\in\mathbb{R}$$

$$(*) \quad y(x) = 3 + \frac{3}{3c-\mathrm{atg}(x/3)} \quad ; c\in\mathbb{R}.$$

risolve l'eq. differenziale.

Il pb. di Cauchy richiede $y(0)=4$;
sostituendo in $(*)$ si ha:

$$4 = y(0) = 3 + \frac{3}{3c-0} = 3+\frac{1}{c}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{1}{c} \quad \Leftrightarrow \quad c=1.$$

In conclusione l'unica sol. del pb. di Cauchy è

$$y(x) = 3 + \frac{3}{3-\mathrm{atg}(x/3)}$$

$\square$

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 04 Luglio 2023 (Terzo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = |(x-1)\log(x-1)|$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, la periodicità ed il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x} - 1 - \arctan(2x)}{(\sinh x)^2 + x^{7/2}\log x}.$$

Esercizio 3. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia data $f_a(t) = t^a \arctan t$.

(3.a) Per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\int_0^1 f_a(t)\ \mathrm{d}t$ converge?

(3.b) Calcolare $\int_1^2 f_{-2}(t)\ \mathrm{d}t$.

(3.c) Scrivere la formula di Taylor con resto di Peano di ordine 2, centrata in $x_0 = 2$, di $F(x) = \int_2^x f_{-1}(t)\ \mathrm{d}t$.

Esercizio 4. Studiare, per ogni $b \in \mathbb{R}$, la convergenza di
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin b)^n}{\sqrt{n+2}+1}.$$

Esercizio 5. (5.a) Fornire l'enunciato della condizione di estremalità locale con le derivate successive.

(5.b) Dimostrare il teorema delle tre funzioni.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 04 Luglio 2023 (Terzo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome:____ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = |(x+2)\log(x+2)|$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, la periodicità ed il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x} - 1 - \sin(2x)}{(\sin x)^2 + x^{9/2}\log x}.$$

Esercizio 3. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ sia data $f_a(t) = \frac{\log(1+t)}{t^a}$.

(3.a) Per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\int_0^1 f_a(t)\,dt$ converge?

(3.b) Calcolare $\int_1^2 f_2(t)\,dt$.

(3.c) Scrivere la formula di Taylor con resto di Peano di ordine 2, centrata in $x_0 = 2$, di $F(x) = \int_2^x f_1(t)\,dt$.

Esercizio 4. Studiare, per ogni $b \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log(1+b))^n}{\sqrt{n+1}+1}.$$

Esercizio 5. (5.a) Fornire l'enunciato della condizione sufficiente del primo ordine di estremalità locale.

(5.b) Dimostrare il Teorema di Lagrange.

Tempo: 3 ore.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno
Lauree: **Chimica e Materiali** 04 Luglio 2023 (Terzo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = |(x-3)\log(x-3)|$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, la periodicità ed il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(2x) - 1 - 2(\sin x)^2}{(\sin x)^2 + x^{9/2}\log x}.$$

Esercizio 3. Per ogni $b \in \mathbb{R}$ sia data $f_a(t) = \frac{\log(1+t)}{t^{2b}}$.

(3.a) Per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\int_0^1 f_b(t)\ \mathrm{d}t$ converge?

(3.b) Calcolare $\int_1^2 f_1(t)\ \mathrm{d}t$.

(3.c) Scrivere la formula di Taylor con resto di Peano di ordine 2, centrata in $x_0 = 2$, di $F(x) = \int_2^x f_{1/2}(t)\ \mathrm{d}t$.

Esercizio 4. Studiare, per ogni $b \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\cos b)^n}{\sqrt{n+1}+2}.$$

Esercizio 5. (5.a) Fornire l'enunciato della condizione necessaria di convergenza di una serie numerica.

(5.b) Dimostrare il Teorema dell'unicità del limite.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 04 Luglio 2023 (Terzo appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome:________________________ Matricola:____________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
9	10	8	6	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = |(x+3)\log(x+3)|$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, la periodicità ed il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x) - 1 + 2(\sinh x)^2}{(e^x - 1)^2 + x^{7/2}\log x}.$$

Esercizio 3. Per ogni $b \in \mathbb{R}$ sia data $f_a(t) = \frac{\arctan t}{t^{2b}}$.

(3.a) Per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\int_0^1 f_b(t)\ \mathrm{d}t$ converge?

(3.b) Calcolare $\int_1^2 f_1(t)\ \mathrm{d}t$.

(3.c) Scrivere la formula di Taylor con resto di Peano di ordine 2, centrata in $x_0 = 2$, di $F(x) = \int_2^x f_{1/2}(t)\ \mathrm{d}t$.

Esercizio 4. Studiare, per ogni $b \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\tan b)^n}{\sqrt{n+2+3}}.$$

Esercizio 5. (5.a) Fornire l'enunciato del teorema della media integrale.

(5.b) Dimostrare la disuguaglianza di Bernoulli.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Esame di Analisi 1, III Appello 2022/23

Ing. Chimica e Materiali — File A

Esercizio 1 Sia $f(x) = |(x-1)\lg(x-1)|$.

1a) Dominio: È sufficiente imporre $x-1>0$. $D_f = (1,+\infty)$.

Inoltre $f(x) \geq 0 \ \forall x \in D_f$, $f(x) = 0 \iff \begin{cases} x \in D_f \\ x-1=0 \end{cases}$ o $x-1=1$

$\iff x=2$. Allora 0 è MINIMO GLOBALE e 2 è punto di minimo globale.

f non è né pari né dispari (D_f non simmetrico rispetto a 0)

1b) I punti di accumulazione per D_f sono: 1 (da destra) e $+\infty$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1^+ \\ (x>1)}} (x-1)\,|\lg(x-1)| = \lim_{\substack{x\to 1^+ \\ (1<x<2)}} \left[-(x-1)\lg(x-1)\right]$$

$$\underset{t=x-1}{=} \left[-\lim_{t\to 0^+} t\lg t\right] = 0$$ (limite dim. in classe) $\Rightarrow f$ NON ha asintoti verticali

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x>10)}} \underbrace{(x-1)}_{\to+\infty}\,\underbrace{\lg(x-1)}_{\to+\infty} = +\infty$$ limite del prodotto

Pertanto f non ammette MASSIMO GLOBALE

Asintoto a $+\infty$?: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x>10)}} \frac{(x-1)\lg(x-1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{\to 1}\,\underbrace{\lg(x-1)}_{\to+\infty} = +\infty$$

Pertanto f NON ha asintoto obliquo a $+\infty$.

1c) f è composizione, prodotto, di f. continue in D_f. Quindi f è CONTINUA in D_f. $\boxed{2}$

Per $x \in D_f - \{2\}$, f è comp e prodotto di f. derivabili in $D_f - \{2\}$. Quindi f è DERIVABILE in $D_f - \{2\}$.

Sia $x_0 = 2$: considero

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-1)|\lg(x-1)|-0}{x-2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2^+ \\ (x-1>1)}} (x-1)\frac{\lg(x-1)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (x-1)\underbrace{\frac{\lg(1+(x-2))}{x-2}}_{\substack{1 \\ \text{limite NOTEVOLE}}}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} (x-1) = 1$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-1)|\lg(x-1)|-0}{x-2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 2^- \\ (x-1<1)}} \frac{-(x-1)\lg(x-1)}{x-2} \underset{\uparrow}{=} -1$$

stessi calcoli fatti prima

Pertanto $\underline{f \text{ NON è derivabile in } 2}$; da quanto sopra 2 è punto ANGOLOSO per f.

<u>Sia $x \in (1,2)$</u>: $f(x) = -(x-1)\lg(x-1)$ e quindi

$$f'(x) = -\lg(x-1) - 1 \quad (x \in (1,2)).$$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in (1,2) \end{cases} \iff \begin{cases} \lg(x-1) = -1 \\ x\in(1,2) \end{cases} \iff \begin{cases} x-1 = e^{-1} \\ x \in (1,2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 1 + e^{-1}.$$

Inoltre $f'(x) > 0 \ (x \in (1,2)) \iff \begin{cases} \lg(x-1) < -1 \\ x \in (1,2) \end{cases}$

$$\iff x \in (1, 1+e^{-1})$$

Pertanto f è strettamente crescente in $(1, 1+e^{-1})$

f è " decrescente in $(1+e^{-1}, 2)$

$\boxed{1+e^{-1} \text{ è pto di MASSIMO LOCALE}; \ f(1+1/e) = \frac{1}{e}}$

Sia $x > 2$: $f(x) = (x-1)\lg(x-1)$ e quindi

$$f'(x) = \lg(x-1) + 1 \qquad (x > 2)$$

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \\ x > 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lg(x-1) = -1 \\ x > 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + 1/e \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) \neq 0 \quad \forall x > 2.$$

Inoltre $\begin{cases} f'(x) = 1 + \underbrace{\lg(x-1)}_{>0} > 1 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow f$ è strettamente crescente per $x > 2$.

1d) Convessità: usando 1c) si ha che f è derivabile per $x \in D_f \setminus \{2\}$ essendo prodotto di f. derivabili in tale insieme. Siccome

$$f'(x) = \begin{cases} -\lg(x-1) - 1 & \text{se } x \in (1,2) \\ \lg(x-1) + 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

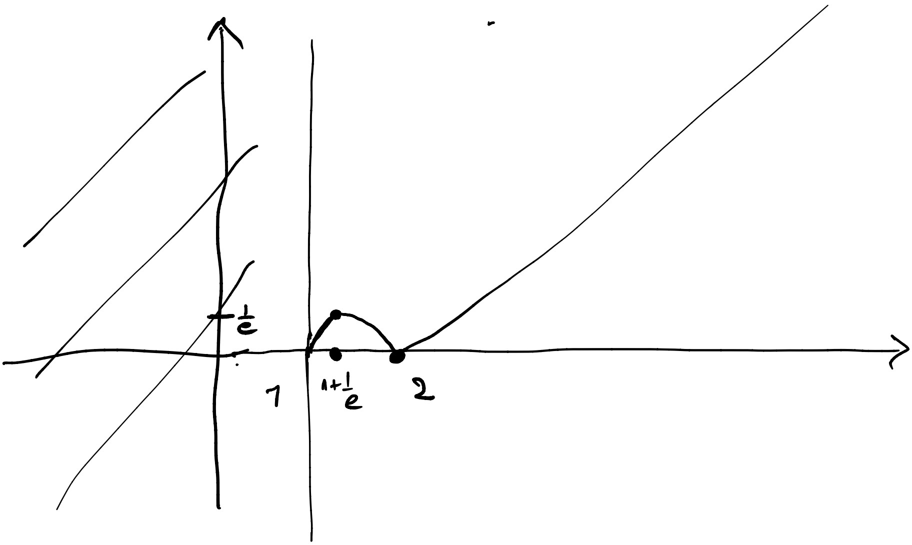
si ha che

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x-1} & \text{se } x \in (1,2) \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Chiaramente $f''(x) < 0 \ \forall x \in (1,2)$ e $f''(x) > 0 \ \forall x > 2$. Pertanto

f è CONCAVA in $(1,2)$ e f è CONVESSA in $(2,+\infty)$.

Un andamento di f è:



② Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-1-\arctan(2x)}{(\sinh x)^2 + x^{7/2}\lg x}$

Conviene esaminare il denominatore: siccome

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sinh x)^2}{x^2} = 1 \quad \text{si ha che } \sinh x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

di ordine 2. D'altra parte $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{7/2}\lg x}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0^+} x^{3/2}\lg x = 0 \text{ e quindi}$$

$$x^{7/2}\lg x = o(x^2) \text{ per } x\to 0^+$$

Usando $\sinh x = x + x^3/6 + o(x^3)$ per $x\to 0^+$

si ha che: $(\sinh x)^2 = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2$

$$= x^2\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2$$

$$= x^2\left(1 + \frac{x^4}{36} + o(x^4) + \frac{x^2}{3} + o(x^2) + o(x^4)\right)$$

$$= x^2\left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right) = x^2 + x^4/3 + o(x^4)$$
per $x \to 0^+$. 5

Pertanto il denominatore è

$$(\sinh x)^2 + x^{7/2}\lg x = x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0^+$$

Per il numeratore:

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3) \quad \text{per } u \to 0$$

$$\arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3) \quad \text{per } u \to 0$$

Da ciò segue che

$$e^{2x} - 1 - \arctan(2x) =$$

$$\cancel{2x} + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{6}(2x)^3 + o(x^3) +$$

$$-\cancel{2x} + \frac{1}{3}(2x)^3 + o(x^3)$$

$$= 2x^2 + 4x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0^+$$

In conclusione:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x} - 1 - \arctan(2x)}{(\sinh x)^2 + x^{7/2}\lg x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2}{x^2} = 2 .$$

Principio sost.
INFINITESIMI
di ordine superiore.

Esercizio 3 $f_a(t) = t^a (\arctan t)$, $a \in \mathbb{R}$

(3a) Osserviamo che $\boxed{\text{per } a > 0}$ si ha $\boxed{6}$

$f_a(t) = t^a \arctan t$ che è continua in $[0,1]$. L'integrale è di Riemann.

Per $a = 0$ $f_0(t) = \arctan(t)$ che è continua in $[0,1]$. L'integrale è di Riemann.

Per $a < 0$ $f_a(t)$ è definita e continua in $(0,1]$.

Inoltre $f_a(t) > 0$ $\forall t \in (0,1]$, $a < 0$.

Osservo che $\lim_{t \to 0^+} t^a \operatorname{atg}(t) = \lim_{t \to 0^+} \underbrace{\frac{\operatorname{atg}(t)}{t}}_{\to 1} t^{1+a}$

limiti notevoli

$$= \lim_{t \to 0^+} t^{1+a} = \begin{cases} 0 & 0 > a > -1 \\ 1 & a = -1 \\ +\infty & a < -1 \end{cases}$$

Pertanto per $a \in [-1, 0)$, l'integrale è di Riemann (f_a prolungabile per continuità in 0).

Inoltre per $a < -1$, il calcolo precedente rivela che $f_a(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} +\infty$ di ordine $\alpha = -(1+a)$

Se $0 < -(1+a) < 1$, il criterio asintotico permette $[-2 < a < -1]$ di concludere che $\int_0^1 f_a(t)\,dt$ converge (perché $f_a(t) \sim \frac{1}{t^{-a-1}}$, $-2 < a < -1$).

Se $-a-1 \geq 1$, il criterio asintotico permette di $(a \leq -2)$

concludere che $\int_0^1 f_a(t)dt$ diverge. 7

In conclusione $\int_0^1 f_a(t)\,dt$ converge $\iff a > -2$

(3b) Calcolare $\int_1^2 f_2(t)\,dt$.

$f_2(t) = \dfrac{\arctan t}{t^2} \in C^0[1,2] \Rightarrow$ (per il TFCI)

$$\int_1^2 f_2(t)\,dt = F(2) - F(1)$$

dove $F(t)$ è una primitiva di f_2 in $\underset{I}{[1,2]}$.

Calcolo $F(t)$: integrando per parti si ha:

$$\int \frac{\arctan(t)}{t^2}\,dt = \int \left(-\frac{1}{t}\right)' \operatorname{artg} t\,dt$$

$f' = \frac{1}{t^2}$ $g = \operatorname{artg}(t)$

$$= \left(-\frac{1}{t}\right)\operatorname{artg}(t) + \int \frac{dt}{t(t^2+1)} \quad ; \; t \in I$$

Cerco $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che $At^2 + A + Bt^2 + Ct$

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{A(t^2+1)+(Bt+C)t}{t(t^2+1)}, \; t \in I$$

Quindi

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} B = -1 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases}, \quad t \in I$$

Quindi

$$\int \frac{dt}{t(t^2+1)} = \int \frac{dt}{t} - \int \frac{t}{t^2+1}\,dt$$

$$= \lg|t| - \frac{1}{2}\lg(t^2+1) + c \; ; \; t \in I, \; c \in \mathbb{R}.$$

Pertanto
$$\int \frac{\operatorname{atg}(t)}{t^2}\,dt = -\frac{\operatorname{atg} t}{t} + \lg t - \frac{1}{2}\lg(t^2+1) + c$$
$c \in \mathbb{R};\ t \in I.$

Sia $F(t) = \lg t - \frac{1}{2}\lg(t^2+1) - \frac{\operatorname{atg} t}{t};\ t \in I.$

Quindi
$$\int_1^2 \frac{\operatorname{atg}(t)}{t^2}\,dt = F(2) - F(1)$$
$$= \lg 2 - \frac{1}{2}\lg 5 - \frac{1}{2}\operatorname{atg} 2 + \frac{1}{2}\lg 2 + \operatorname{atg} 1$$
$$= \frac{3}{2}\lg 2 - \frac{1}{2}\lg 5 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{atg} 2$$

(3C) Studiare ($b \in \mathbb{R}$) la convergenza di
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin b)^n}{\sqrt{n+2}+1}$$

Poniamo $a_n(b) = \dfrac{(\sin b)^n}{\sqrt{n+2}+1}$.

Sia $b = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$. Allora $a_n(k\pi) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\sum a_n(b)$ CONVERGE

Sia $b \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, Utilizzo il criterio del rapporto
$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(b)}{a_n(b)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(\sin b)^{n+1}}{(\sin b)^n}\,\frac{\sqrt{n+2}+1}{\sqrt{n+3}+1}\right|$$
$$= |\sin b| \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+2}+1}{\sqrt{n+3}+1} = |\sin b|$$
$$\left[= \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+2/n}+1/\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+3/n}+1/\sqrt{n}\right)}\right]$$

Pertanto se $\begin{cases} b \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \\ |\sin b| < 1 \end{cases}$ si ha, per il criterio

della radice che $\sum a_n(b)$ converge assolutamente.

Sia $b / \sin b = 1$ $(b = \pi/2 + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z})$; allora

la serie diviene $\sum \frac{1}{\sqrt{n+2}+1}$ in cui $\frac{1}{\sqrt{n+2}+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

di ordine $\frac{1}{2}$. Per il criterio asintotico in tal

caso la serie diverge.

Sia $b / \sin b = -1$ $(b = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z})$: allora

la serie diventa $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}+1}$. Siccome

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+1} \geq 0; \quad \lim_{n\to+\infty} c_n = 0 \text{ e}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+3}+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}+1} = c_n,$$ per il

criterio di von Leibniz, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}+1}$ converge.

In conclusione

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sin b)^n}{\sqrt{n+2}+1} \text{ converge } \forall b \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Università di Padova - Scuola di Ingegneria - Esame di Analisi Matematica Uno

Lauree: **Chimica e Materiali** 12 settembre 2023 (Quarto appello, a.a. 2022-2023)

Cognome e nome:______________________________ Matricola:______________

PER LA COMMISSIONE D'ESAME

1E	2E	3E	4E	5E	Totale
10	6	9	8	s/n	33

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log|x^2 + 3x - 4|$.

(1.a) Determinare il dominio di $f(x)$, eventuali simmetrie, la periodicità ed il segno di f.

(1.b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di $f(x)$.

(1.c) Studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) locale e globale di $f(x)$.

(1.d) Determinare la convessità di $f(x)$. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$ in tutto il suo dominio.

Esercizio 2. Studiare, per $a \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{an}}{n+2}.$$

Esercizio 3. Calcolare $\int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 4}\, \mathrm{d}x$.

Esercizio 4. (4.a) Dimostrare il principio di sostituzione degli infiniti di ordine inferiore.

(4.b) Enunciare il Teorema della media integrale.

Tempo: 3 ore.
Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. Vietati libri, appunti, telefoni, calcolatrici, altri device di calcolo. Vietato consultarsi con altri esaminandi. Tenere sul banco solo un documento d'identità e le penne (blu o nere). Motivare tutte le risposte.

Analisi Matematica 1, Ing. Chimica e Materiali $\boxed{1}$

IV Appello

Risoluzione fila B

1) Sia $f(x) = \lg |x^2+3x-4|$

1a) f è definita per $|x^2+3x-4| > 0 \iff \underbrace{x^2+3x-4}_{=(x+4)(x-1)} \neq 0$

Pertanto $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$

f non ha simmetrie pari o dispari perché D_f non è simmetrico rispetto a 0.

Segno di f: $f(x) > 0 \iff |x^2+3x-4| > 1$

$$\iff (\underbrace{x^2+3x-4 > 1}_{\mathrm{I}}) \text{ oppure } (\underbrace{x^2+3x-4 < -1}_{\mathrm{II}})$$

Risolvo I: $x^2+3x-5 > 0 \iff x < \frac{-3-\sqrt{29}}{2}$ oppure $x > \frac{-3+\sqrt{29}}{2}$

Risolvo II: $x^2+3x-3 < 0 \iff \frac{-3-\sqrt{21}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$

Quindi $f(x) > 0$ per ogni $x \in \left(-\infty, \frac{-3-\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3-\sqrt{21}}{2}, \frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{29}}{2}, +\infty\right)$

Inoltre $f(x) = 0 \iff |x^2+3x-4| = 1$

$$\iff x^2+3x-4 = 1 \text{ oppure } x^2+3x-4 = -1$$
$$\iff x \in \left\{\frac{-3-\sqrt{29}}{2}, \frac{-3-\sqrt{21}}{2}, \frac{-3+\sqrt{21}}{2}, \frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right\}$$

Infine $f(x) < 0 \iff x \in \left(\frac{-3-\sqrt{29}}{2}, -4\right) \cup \left(-4, \frac{3-\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right)$.

1b) I punti di acc. di D_f sono: $-\infty, -4, 1, +\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \lg\left|\underbrace{x^2+3x-4}_{\downarrow +\infty}\right| = +\infty \quad (\Rightarrow f \text{ NON ha MASSIMO GLOBALE})$$

$$\lim_{x\to+\infty} \lg\left|\underbrace{x^2+3x-4}_{\downarrow +\infty}\right| = +\infty \quad (\Longrightarrow f \text{ non ha asintoti orizzontali})$$

$$\lim_{x\to(-4)^-} \lg\left|\underbrace{(x-1)}_{\downarrow -5}\underbrace{(x+4)}_{\downarrow 0^-}\right| = \lim_{u\to 0^+} \lg u = -\infty \quad (\Rightarrow f \text{ non ha MINIMO GLOBALE})$$

$$\lim_{x\to(-4)^+} \lg\left|\underbrace{(x-1)}_{\downarrow -5}\underbrace{(x+4)}_{\downarrow 0^+}\right| = \lim_{u\to 0^+} \lg u = -\infty \quad \left(\Rightarrow \text{La retta } x=-4 \text{ è ASINTOTO verticale}\right)$$

$$\lim_{x\to 1^-} \lg\left|\underbrace{(x-1)}_{\downarrow 0^-}\underbrace{(x+4)}_{\downarrow 5}\right| = \lim_{u\to 0^+} \lg u = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \lg\left|\underbrace{(x-1)}_{\downarrow 0^+}\underbrace{(x+4)}_{\downarrow 5}\right| = \lim_{u\to 0^+} \lg u = -\infty$$

$\Rightarrow$ La retta $x=1$ è ASINTOTO verticale.

Infine siccome $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\lg|x^2+3x-4|}{x} = 0$

e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\lg|x^2+3x-4|}{x} = 0$ (gerarchia degli infiniti)

abbiamo che f non ha asintoti obliqui.

1c) f è continua in D_f perché composizione di f continue.
f è derivabile in D_f " " " " derivabili.
infatti $\lg|u|$ è derivabile $\forall u\neq 0$ e x^2+3x-4 è derivabile $\forall x\in\mathbb{R}$.

Pertanto

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x-4} \qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,1\}$$

Chiaramente $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-3/2$; inoltre

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} 2x+3>0 \\ x^2+3x-4>0 \end{cases}}_{A} \cup \underbrace{\begin{cases} 2x+3<0 \\ x^2+3x-4<0 \end{cases}}_{B}$$

Risolvo A:

$$A: \begin{cases} x>-3/2 \\ x\in(-\infty,-4)\cup(1,+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x>1$$

Risolvo B: $B: \begin{cases} x < -3/2 \\ x \in (-4, 1) \end{cases} \quad \{ \ x \in \left(-4, \frac{-3}{2}\right)$

Quindi $f'(x) > 0 \iff x \in \left(-4, -\frac{3}{2}\right) \cup (1, +\infty)$
$f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -4) \cup (-3/2, 1)$

Pertanto f è strettamente crescente in $\left(-4, -\frac{3}{2}\right) \cup (1, +\infty)$
f è " decrescente in $(-\infty, -4) \cup \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

Il punto $-3/2$ è punto di MASSIMO LOCALE e
$f(-3/2) = \lg|(-5/2)\, 5/2\,| = \lg 25/4 = 2\lg(5/2)$ è MASSIMO LOCALE

1D) Convessità: siccome $f'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x-4}$ è rapporto di f. deriva=bili in D_f, si ha che f'' esiste in D_f. Inoltre

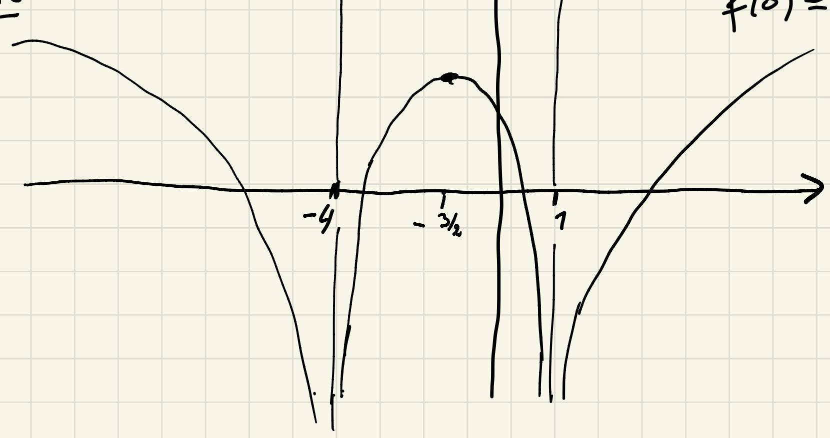
$$f''(x) = \frac{2(x-1)(x+4) - (2x+3)^2}{(x-1)^2(x+4)^2} = \frac{-2x^2-6x-17}{\underbrace{(x-1)^2(x+4)^2}_{>0 \ \forall x \in D_f}}$$

Quindi $f''(x) > 0 \iff -2x^2-6x-17 > 0 \iff 2x^2+6x+17 < 0$
che non ha soluzioni reali essendo $\Delta = 36 - 8 \cdot 17 < 0$

Allora
$f''(x) < 0 \ \forall x \in D_f$ e quindi f è CONCAVA in D_f

Andamento

$f(0) = 2\lg 2$



Esercizio 2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{an}}{n+2}$ $(a\in\mathbb{R})$.

Sia $b_n(a) = 3^{an}/n+2 \geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Uso il criterio del rapporto: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{b_{n+1}(a)}{b_n(a)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{a(n+1)}}{n+3}\,\frac{n+2}{3^{an}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+3}\, 3^a = 3^a.$$

Pertanto il criterio del rapporto implica che per $a / 3^a < 1$ (ossia $a<0$) la serie CONVERGE e che per a tale che $3^a>1$ (ossia $a>0$) la serie DIVERGE.
Per $a=0$ il criterio del rapporto non permette di concludere.
Osserviamo che
$$b_n(0) = \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{di ordine } 1.$$
Per il criterio asintotico, si ha che $\sum \frac{1}{n+2}$ DIVERGE

In conclusione: $\displaystyle\sum \frac{3^{an}}{n+2}$ converge $\Leftrightarrow$ $a<0$.

Esercizio 3 Calcolare $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x}-4e^x+4}\,dx$

Siccome $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}-4e^x+4}$ è continua $\forall x\in[1,2]$, f è Riemann integrabile e vale il T.F.C.I. Calcolo

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-4e^x+4}\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ t=e^x,\ x\in\mathbb{R},\ t>0}}{=} \int \frac{t}{t^2-4t+4}\,\frac{dt}{t}$$

$g(t)=\lg t = x$; strett. crescente $\qquad (t-2)^2 = t^2+4-4t$

$$= \int \frac{dt}{(t-2)^2} = -\frac{1}{t-2} + c \Big|_{t=e^x} \quad \forall t>0,\ t\neq 2$$

$$= -\frac{1}{e^x-2}+c, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{\lg 2\}, \quad c \text{ cost. a tratti}$$ 5

Posiamo $F(x) = \frac{-1}{e^x-2}$. Allora per le T.F.C.I si ha

$(\lg 2<1)$ $$\int_1^2 \frac{e^x}{e^{2x}-4e^x+4}\,dx = F(2)-F(1)$$

$$= \frac{-1}{e^2-2}+\frac{1}{e-2} = \frac{e^2-e}{(e^2-2)(e-2)}$$