

**Nota:** A meno che non sia specificato diversamente, si intende che i teoremi, lemmi, proposizioni sotto menzionati siano stati dimostrati a lezione.

## ARGOMENTI

### SETTIMANA 1.

**Lezione 1 (01/10/2013).** Generalità sul corso. Prime proprietà dei numeri naturali. L'insieme  $\mathbb{N}$ . Principio di induzione. Esempi di uso del principio di induzione. L'insieme  $\mathbb{Z}$ . Binomio di Newton. Esempi ed Esercizi.

**Lezione 2 (02/10/2013).** Disuguaglianza di Bernoulli. L'insieme  $\mathbb{Q}$ .  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . L'insieme  $\mathbb{R}$ . Assioma di separazione.  $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  [No dim]. Proprietà di Archimede e della parte intera. La funzione parte intera: cenni euristici.

**Lezione 3 (03/10/2013).** Densità dei razionali nei reali. Tra due numeri reali distinti esiste sempre almeno un razionale ed un irrazionale. Maggiorante e minorante di un insieme di numeri. Insiemi superiormente (inferiormente) limitati. Massimo e minimo di un insieme di numeri reali; estremo superiore e inferiore. Se  $A$  sup. (inf) limitato allora  $M_A$  ha minimo ( $m_A$  ha massimo). Esempi ed esercizi su massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore.

### SETTIMANA 2.

**Lezione 4 (07/10/2013).** Caratterizzazione di  $\sup A \in \mathbb{R}$  e  $\inf A \in \mathbb{R}$ . Applicazioni. Dominio, codominio, immagine e grafico di una applicazione. Suriettività e iniettività. Esempi ed Esercizi.

**Lezione 5 (08/10/2013; (Vagnoni)).** Esercizi su inf, sup, max, min di insiemi reali.

**Lezione 6 (09/10/2013).** Composizione di applicazioni. Applicazione inversa. Grafico dell'applicazione inversa. Monotonia debole e stretta delle applicazioni. Esempi.

**Lezione 7 (10/10/2013).** Monotonia stretta della funzione inversa. Elementi di topologia della retta reale: Intorni circolari di punti reali, intorni, intorni di  $+\infty$  e di  $-\infty$ . Insiemi aperti della retta reale. Punti di accumulazione. Esempi ed Esercizi.

### SETTIMANA 3.

**Lezione 8 (14/10/2013).** Lezione non tenuta per indisposizione del docente.

**Lezione 8 (15/10/2013; (Vagnoni)).** Funzioni elementari; valore assoluto; potenze intere e loro inverse. Esempi ed esercizi.

**Lezione 9 (16/10/2013).** Definizione di limite ( $x_0, \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ). Esempi di come si specializza la definizione di limite nei vari casi. Esempi. Osservazioni sul ruolo del punto di accumulazione rispetto al valore limite. Esempi di limiti verificati o confutati con la definizione.

**Lezione 10 (17/10/2013).** Teorema dell'unicità del limite, della permanenza del segno, della limitatezza locale (dimostrati, commenti, esempi). Teorema del confronto (enunciato, commenti, esempi). Osservazioni su limiti e valore assoluto. Enunciato del Teorema delle tre funzioni; esempio del suo utilizzo.

### SETTIMANA 4.

**Lezione 11 (21/10/2013).** Dimostrazione del Teorema del confronto. Limite della somma, del prodotto (dimostrato), del rapporto (sia limiti finiti che infiniti). Esempi.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sin x = -\infty$ .

**Lezione 12 (22/10/2013; (Vagnoni)).** Funzioni elementari; potenze frazionarie, Radice aritmetica. esponenziale; logaritmo, seno, coseno, loro inverse. Esempi ed esercizi.

**Lezione 13 (23/10/2013).** Descrizione dei casi indeterminati del tipo  $0 \cdot \infty$ ,  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ . Limiti di funzioni monotone (dimostrato). Limite destro e sinistro. Esiste  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  se e solo se esistono  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell^+$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell^-$  e  $\ell = \ell^+ = \ell^-$ . Non esistenza del  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$ .

**Lezione 14 (24/10/2013).**  $\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0)$ , dove  $p(x)$  è un polinomio a coefficienti reali. Calcolo di limiti notevoli: Se  $a > 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = 0$ . Se  $0 < a < 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ . Limiti di funzioni pari e dispari.

SETTIMANA 5.

**Lezione 15 (28/10/2013).** Teorema sui limiti per sostituzione [no dim]. Esempio:  $\lim_{t \rightarrow 0} 2^{1/t^2} = +\infty$ . Teorema "ponte" [no dim]. Dimostrazione che  $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ .  $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$ . Dimostrazione di:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n/n! = 0$ ,  $a > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = 1$ . Definizione di:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n = e$  ( $e \in (2, 3)$ , numero di Nepero). Dimostrazione dei limiti notevoli:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = e$ .

**Lezione 16 (29/10/2013 (Vagnoni)).** Definizione di tangente e cotangente; loro proprietà e grafico. Funzione arcotangente. Dimostrazione dei limiti notevoli:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 1/x)^x = e$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{1/x} = e$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ . Risoluzione dei seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 - x$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x} - x$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x}}{x + 4x^3}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin(1/x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1/\sin(1/x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x - \sin^2(1/x))$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(1/x^2)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/2x)^{3x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2 - \cos x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \frac{\sin(2x)}{1 + \sin x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\log x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log(1 + 2/x) - x$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x + 5)/(x + 3))^{x+2}$ .

**Lezione 17 (30/10/2013).** Dimostrazione dei limiti notevoli:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^x - 1}{x} = \log_a a$ . Definizione di continuità di una funzione in un punto ed in un intervallo. Esempi di funzioni continue nel loro dominio di definizione: polinomi,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $a^x$ ,  $\log_a x$ ,  $\tan x$ . Continuità della somma, del prodotto, del rapporto. Continuità della composta. Teorema della permanenza del segno per funzioni continue.

**Lezione 18 (31/10/2013).** Continuità e dell'inversa [no dim]. Continuità delle funzioni trigonometriche inverse. Esercizi sulla continuità di funzioni definite per casi.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$ . Definizione di derivata prima. Teorema:  $f$  derivabile implica  $f$  continua in  $x_0$ . Non esistenza della derivata in 0 di  $|x|$ . Esempi di punti angolosi. Derivate delle funzioni fondamentali:  $a^x$ .

SETTIMANA 6.

**Lezione 19 (04/11/2013).** Derivate delle funzioni fondamentali:  $(x, c, \sin x, \cos x, \log_a x, \log_a |x|, x^n)$ . Derivata di somma, del rapporto, (solo enunciato) e del prodotto (dimostrato) Derivata di  $(cf)' = cf'$ . Derivabilità dei polinomi. Esempi ed esercizi. Definizione di  $f(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow x_0$ . Teorema del Differenziale I e II.

**Lezione 20 (05/11/2013 (Vagnoni)).** Esercizi su continuità e derivabilità di funzioni definite per casi.

**Lezione 21 (06/11/2013).** Derivata di  $\tan x$ . Derivabilità della composta. Derivabilità dell'inversa. [no dim] Derivabilità delle funzioni trigonometriche inverse. Derivabilità di  $x^{1/n}$ ,  $x^\alpha$ . Derivata di  $x^\alpha$  in  $x_0 = 0$ . Alcuni calcoli di derivata:  $e^{\sin x}$ ,  $\log \log x$ ,  $\arcsin(\sqrt{x-4})$ .

**Lezione 22 (07/11/2013).** Teorema di de l'Hôpital e Corollari [no dim]. Esempi di uso del Teorema di de l'Hôpital. Esercizi sul calcolo di limiti con il teorema di de l'Hôpital:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\epsilon \log x$ ,  $\epsilon > 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ .

SETTIMANA 7.

**Lezione 23 (11/11/2013).** Definizione di funzione infinitesima. Infinitesimi dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore. Ordine di un infinitesimo. Principio di sostituzione degli infinitesimi.

Esempi. Definizione di funzione infinita. Infiniti dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore. Ordine di un un infinito. Principio di sostituzione degli infiniti. Esempi.

**Lezione 24 (12/11/2013 (Vagnoni)).** Esercizi sul principio di sostituzione di infiniti e di infinitesimi. Esercizi sul teorema di de l'Hôpital.

**Lezione 25 (13/11/2013).** Definizione di sottosuccessione. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Definizione di massimo e minimo relativo e assoluto. Teorema di Weierstrass e teorema di Weierstrass generalizzato (enunciato). Esempi.

**Lezione 26 (14/11/2013).** Condizione necessaria per punti di massimo e minimo locale interno. Teorema degli zeri, Teorema dei valori intermedi.  $f(x)$  debolmente crescente (decescente) se e solo se  $f'(x) \geq 0$  ( $\leq 0$ ). Esempi.

SETTIMANA 8.

**Lezione 27 (18/11/2013).** Dimostrazione del Teorema di Rolle e del Teorema di Lagrange.  $f'(x) = 0$  se e solo se  $f(x) = c$ , Condizioni sufficienti di stretta monotonia. Condizioni sufficienti di massimo e minimo. Esempi. Derivate di ordine superiore al primo. Condizioni necessarie e sufficienti di massimo e minimo con le derivate di ordine superiore al primo [enunciato; dim in seguito].

**Lezione 28 (19/11/2013 (Vagnoni)).** Schema di studio di funzione. Esempio di uso dello schema per funzioni razionali:  $\frac{x^3}{x^2+4x+4}$ ,  $\frac{\exp(1-1/x)}{x}$ .

**Lezione 29 (20/11/2013).** Convessità e punti di flesso. Condizioni di convessità con la derivata prima [no dim] e la derivata seconda [dim]. Definizione di asintoto. Formula di Taylor con resto di Peano e con resto di Lagrange. [no dim] Formula di Taylor di  $\sin x$  centrata in  $x_0 = 0$ . Esempi di calcolo di limiti con la formula di Taylor-Peano. Esempio di approssimazione con la formula di Taylor-Lagrange.

**Lezione 30 (21/11/2013).** Lezione non tenuta a causa degli esami di stato in Ingegneria Civile ed Ambientale.

SETTIMANA 9.

**Lezione 30 (25/11/2013).** Il polinomio di Taylor è la migliore approssimazione di una funzione regolare. Formula di Taylor di  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\log(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$  centrata in  $x_0 = 0$ . Esercizi sulla Formula di Taylor.

**Lezione 31 (26/11/2013 (Vagnoni)).** Esercizi sulla Formula di Taylor; calcolo di limiti, approssimazioni.

**Lezione 32 (27/11/2013).** Definizione e proprietà delle primitive. Definizione di integrale indefinito. Metodo di integrazione per parti (dimostrato). Esempi su integrali immediati e per parti. Teorema di integrazione per sostituzione (prima e seconda forma; dimostrati entrambi). Esempi.

**Lezione 33 (28/11/2013).** Integrazione delle funzioni razionali: caso delle radici reali semplici, delle radici reali multiple. Integrazione di  $[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{-1}$ . Esempi.

SETTIMANA 10.

**Lezione 34 (02/12/2013).** Schema generale di integrazione delle funzioni razionali. Sostituzioni consigliate nei casi:  $R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_1/q_1}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_2/q_2} \dots)$ ,  $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ , per  $a > 0$  e per  $a < 0$ ,  $R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)$ , Esempi ed esercizi. **L'ultimo quarto d'ora è stato utilizzato per effettuare la valutazione della didattica.**

**Lezione 35 (03/12/2013 (Vagnoni)).** Esercizi sul calcolo di primitive e integrali.

**Lezione 36 (04/12/2013).** Sostituzioni consigliate nei casi:  $R(\sin x, \cos x)$ ,  $R(e^x)$ ,  $R(\log x)/x$ . Fun-

zioni iperboliche: loro definizione, andamento, proprietà, sviluppo di MacLaurin, funzioni iperboliche inverse. Esempi ed esercizi.

**Lezione 37 (05/12/2013).** Somme inferiori e somme superiori di una funzione limitata in un intervallo; relazione tra somme superiori e inferiori al variare della suddivisione dell'intervallo. Definizione di Integrale di Riemann. Significato geometrico dell'integrale di Riemann. Proprietà dell'integrale di Riemann. Esempi. Integrale di Riemann e relazione d'ordine. Additività dell'Integrale di Riemann. Disuguaglianza del valore assoluto. [no dim fino a qui] Teorema della media [dim]. Condizioni sufficienti di Riemann-integrabilità [no dim]. Definizione di funzione integrale. Una funzione Riemann integrabile ha funzione integrale continua (dimostrato).

SETTIMANA 11.

**Lezione 38 (09/12/2013).** Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI). Formula fondamentale del calcolo integrale Integrazione definita per parti [no dim]. Esercizi su integrali definiti [no dim]. Integrazione definita per sostituzione (prima forma) [no dim]. Integrazione definita per sostituzione (seconda forma)[no dim]. Integrali impropri su insiemi limitati. Il caso di  $\int_a^b |t - a|^{-\alpha} dt$ ,  $\alpha > 0$ . La convergenza di  $|f|$  implica quella di  $f$  ma non il viceversa.

**Lezione 39 (10/12/2013 (Vagnoni)).** Esercizi sul calcolo di integrali definiti.

**Lezione 40 (11/12/2013).** Criterio del confronto e criterio asintotico. Criterio dell'ordine di infinito per integrali impropri su insiemi limitati. Il caso di  $\int_0^{1/2} t^{-1}(-\log t)^{-\beta} dt$ ,  $\beta > 0$ . limitati. Integrali impropri su insiemi illimitati. Criterio del confronto. Il caso di  $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt$ ,  $\alpha > 0$ . Criterio asintotico per integrali su  $[a, +\infty)$ . Criterio dell'ordine di infinitesimo per integrali impropri su insiemi illimitati. Esempi. Relazioni tra convergenza dell'integrale di  $|f|$  e di  $f$ . Considerazioni sulla convergenza dell'integrale e limite dell'integranda. Il caso di  $\int_2^{+\infty} t^{-1}(\log t)^{-\beta} dt$ ,  $\beta > 0$ .

**Lezione 41 (12/12/2013).** Serie Numeriche: carattere di definizione. Serie costante. Serie di Mengoli, serie geometrica. Condizione necessaria di convergenza. Serie armonica. Serie a termini non negativi. Criterio del confronto.

SETTIMANA 12.

**Lezione 42 (16/12/2013).** Criterio integrale per serie con  $a_k \geq 0$ ,  $a_{k+1} \leq a_k$ . Serie armonica generalizzata. Serie di termine generale  $a_k = k^{-1}(\log k)^{-\gamma}$ ,  $\gamma > 0$ . Alcuni esempi. Proprietà delle serie. Criterio dell'ordine di infinitesimo. Convergenza assoluta delle serie. Criterio della radice. Criterio del rapporto. Serie esponenziale. Esempi.

**Lezione 43 (17/12/2013 (Vagnoni)).** Esercizi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi illimitati e limitati. Esercizi di riepilogo su calcolo di primitive, integrali definiti e impropri su insiemi illimitati e limitati.

**Lezione 44 (18/12/2013).** Serie a segni alterni. Criterio di Leibniz per serie a segni alterni. Esercizi sulla convergenza delle serie.

**Lezione 45 (19/12/2013).** Esercizi di riepilogo sulle serie (tutti i tipi).

SETTIMANA 13.

**Lezione 46 (07/01/2014).** Equazioni differenziali ordinarie. Equazioni differenziali del primo ordine lineari a coefficienti continui. Esempi ed Esercizi.

**Lezione 47 (08/01/2014).** Equazioni differenziali a variabili separabili. Equazione di Bernoulli. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: forma delle soluzioni. Caso omogeneo: polinomio caratteristico, forma delle soluzioni del caso omogeneo. Esempi ed Esercizi.

**Lezione 48 (09/01/2014).** Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: integrale generale del caso omogeneo e non omogeneo con metodo per somiglianza. Esempi ed Esercizi.

SETTIMANA 14.

**Lezione 49 (13/01/2014).** Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: integrale generale del caso omogeneo e non omogeneo con metodo per variazione delle costanti e metodo di sovrapposizione. Esercizi sulle equazioni differenziali.

**Lezione 50 (14/01/2014(Vagnoni)).** Esercizi sulle equazioni differenziali.