

Nota: A meno che non sia specificato diversamente, si intende che i teoremi, lemmi, proposizioni sotto menzionati siano stati dimostrati a lezione. Si ricorda che ognuna di tali dimostrazioni può essere chiesta all'esame.

ARGOMENTI

SETTIMANA 1.

Lezione 1 (01/10/2014). Generalità sul corso. Prime proprietà dei numeri naturali. L'insieme \mathbb{N} . Principio di induzione. Esempi di uso del principio di induzione. Binomio di Newton (prima parte). Esempi ed Esercizi.

Lezione 2 (02/10/2014). Binomio di Newton (seconda parte). Disuguaglianza di Bernoulli. L'insieme \mathbb{Z} . L'insieme \mathbb{Q} . $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. L'insieme \mathbb{R} . Assioma di separazione. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ [No dim]. Proprietà di Archimede.

SETTIMANA 2.

Lezione 3 (06/10/2014; (Marchi)). Proprietà della parte intera. La funzione parte intera: cenni euristici. Densità dei razionali nei reali. Tra due numeri reali distinti esiste sempre almeno un razionale ed un irrazionale. Maggiore e minorante di un insieme di numeri. Insiemi superiormente (inferiormente) limitati. Massimo e minimo di un insieme di numeri reali. Esempi ed Esercizi.

Lezione 4 (07/10/2014). Estremo superiore e inferiore. Se A sup. (inf) limitato allora M_A ha minimo (m_A ha massimo). Caratterizzazione di $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\inf A \in \mathbb{R}$. Esempi ed esercizi su massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore di insiemi reali.

Lezione 5 (08/10/2014). Applicazioni. Dominio, codominio, immagine e grafico di una applicazione. Surriettività e iniettività. Esempi ed Esercizi.

Lezione 6 (09/10/2014). Composizione di applicazioni. Insieme controimmagine di una applicazione. Applicazione inversa. Grafico dell'applicazione inversa. Esempi ed Esercizi.

SETTIMANA 3.

Lezione 7 (13/10/2014; (Marchi)). Definizione di Intervallo. Monotonia debole e stretta delle applicazioni. Monotonia stretta della funzione inversa. Funzioni elementari: parte intera, elevazione al quadrato, valore assoluto.

Lezione 8 (14/10/2014). Elementi di topologia della retta reale: Intorni circolari di punti reali, intorni, intorni di $+\infty$ e di $-\infty$. Punti di accumulazione. Esempi ed Esercizi. Definizione di limite ($x_0, \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$). Esempi di come si specializza la definizione di limite nei vari casi. Esempi. Osservazioni sul ruolo del punto di accumulazione rispetto al valore limite. Esempi di limiti verificati o confutati con la definizione.

Lezione 9 (15/10/2014). Esempi di limiti verificati o confutati con la definizione. Teorema dell'unicità del limite, della permanenza del segno (dimostrati, commenti, esempi). Teorema del confronto (dimostrato, commenti, esempi).

Lezione 10 (16/10/2014). Osservazioni su limiti e valore assoluto. Enunciato del Teorema delle tre funzioni; esempio del suo utilizzo. Limite della somma, del prodotto (dimostrato), del rapporto (limiti finiti). Esempi. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$.

SETTIMANA 4.

Lezione 11 (20/10/2014; (Marchi)). Funzioni elementari; potenze intere e loro inverse, potenze razionali, Radice aritmetica. esponenziale; logaritmo, Esempi ed esercizi.

Lezione 12 (21/10/2014). Lezione non tenuta per indisposizione del docente.

Lezione 13 (22/10/2014). Lezione non tenuta per indisposizione del docente.

Lezione 12 (23/10/2014). Teorema dell'unicità del limite, della permanenza del segno (limiti infiniti). Teorema del confronto (limiti infiniti) [cenni dimostrativi]. Limite della somma, del prodotto, del rapporto (limiti infiniti) con cenni alle dimostrazioni. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sin x = -\infty$. Descrizione ed esempi dei casi indeterminati del tipo $(-\infty) + (+\infty)$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞ .

SETTIMANA 5.

Lezione 13 (27/10/2014; Marchi). Angolo in radianti, funzioni trigonometriche, funzioni periodiche, pari, dispari. Formule di: somma, bisezione e prostaferesi. Funzioni trigonometriche inverse. $|\sin x| \leq |x|$. Esercizi ed Esempi.

Lezione 14 (28/10/2014). Limiti di funzioni monotone. Limite destro e sinistro. Esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se e solo se esistono $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell^+$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell^-$ e $\ell = \ell^+ = \ell^-$. Non esistenza del $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$. Se $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = 0$. Se $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$. Limiti delle funzioni potenze e loro inverse. Limiti delle inverse delle funzioni trigonometriche.

Lezione 15 (29/10/2014). Teorema sui limiti per sostituzione [no dim]. Esempio: $\lim_{t \rightarrow 0} 2^{1/t^2} = +\infty$. Teorema "ponte" [no dim]. Dimostrazione che $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$. $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$. Dimostrazione di: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n/n! = 0$, $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{1/n} = 1$ ($a > 0$).

Lezione 16 (30/10/2014). Formula della somma di x^k per $k = 0 \dots, n$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = 1$. Definizione di: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n = e$ ($e \in (2, 3)$, numero di Nepero). Dimostrazione dei limiti notevoli: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$.

SETTIMANA 6.

Lezione 17 (03/11/2014; (Marchi)). $\lim_{x \rightarrow x_0} p(x) = p(x_0)$, dove $p(x)$ è un polinomio a coefficienti reali. Limite a $\pm\infty$ e a 0 di un rapporto di polinomi. $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$. Esercizi ed Esempi.

Lezione 18 (04/11/2014). $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2$, Un limite di una funzione definita per casi, limiti "parenti" del $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. Limiti di funzioni pari e dispari. Definizione di continuità di una funzione in un punto ed in un intervallo. Esempi di funzioni continue nel loro dominio di definizione: polinomi, $\sin x$, $\cos x$, a^x , $\log_a x$, $\tan x$. Classificazione dei punti di discontinuità.

Lezione 19 (05/11/2014). Continuità della somma, del prodotto, del rapporto. Continuità della composta. Continuità dell'inversa [no dim]. Continuità delle funzioni trigonometriche inverse. Esercizi sulla continuità di funzioni definite per casi. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$. Un esempio di continuità per una funzione definita per casi. Definizione di derivata prima. Interpretazione geometrica della derivata, esempi di punti angolosi e cuspidali. Teorema: f derivabile in x_0 implica f continua in x_0 . Non esistenza della derivata in 0 di $|x|$.

Lezione 20 (06/11/2014). Derivate delle funzioni fondamentali: $(a^x, c, \sin x, \cos x, \log_a x, \log_a |x|, x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$)). Derivata di somma, del rapporto e del prodotto. Derivata di $(cf)' = cf'$. Derivabilità dei polinomi.

SETTIMANA 7.

Lezione 21 (10/11/2014 (Marchi)). Esercizi su continuità e derivabilità di funzioni definite per casi. Derivabilità della composta. [enunciato] Derivabilità dell'inversa. [enunciato] Derivata di $\arcsin x$. Esempi

Lezione 22 (11/11/2014). Derivata di $\tan x$. Derivabilità di $x^{1/n}$, $\arccos x$, $\arctan x$. x^α . Derivata di x^α in $x_0 = 0$. Alcuni calcoli di derivata: $e^{\sin x}$, $\log \log x$, x^x , $\arcsin(\sin x)$, $\arcsin(\sqrt{x-4})$. Definizione di $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$. Definizione di funzione infinitesima per $x \rightarrow x_0$. Infinitesimi dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore per $x \rightarrow x_0$. Teorema del Differenziale I.

Lezione 23 (12/11/2014). Teorema del Differenziale II. Derivabilità della composta [dimostrazione]. Derivabilità dell'inversa. [dimostrazione]. Teorema di de l'Hôpital e Corollari [no dim]. Esempi di uso del Teorema di de

l'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \sin(1/x)}{2x + \sin x}$.

Lezione 24 (13/11/2014). Esempi di uso del Teorema di de l'Hôpital. Esercizi sul calcolo di limiti con il teorema di de l'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\varepsilon \log x$, $\varepsilon > 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$. Esercizi su continuità e derivabilità di funzioni definite per casi (ex. n.3.34 della collezione di Esercizi)[prima parte].

SETTIMANA 8.

Lezione 25 (17/11/2014; Marchi). Ordine di un infinitesimo. Principio di sostituzione degli infinitesimi. Esempi. Esercizi sul principio di sostituzione di infinitesimi. Definizione di funzione infinita. Infiniti dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore. Ordine di un infinito.

Lezione 26 (18/11/2014). Esercizi su continuità e derivabilità di funzioni definite per casi (ex. n.3.34 della collezione di Esercizi)[seconda parte]. Principio di sostituzione degli infiniti. Esempi. Esercizi sul principio di sostituzione di infiniti.

Lezione 27 (19/11/2014). Lezione non tenuta a causa degli esami di stato in Ingegneria Civile ed Ambientale.

Lezione 27 (20/11/2014). Definizione di sottosuccessione. $a_n \rightarrow \lambda$ per $n \rightarrow \infty$ se e solo se per ogni sottosuccessione a_{n_k} si ha che $a_{n_k} \rightarrow \lambda$ per $k \rightarrow \infty$. Teorema di Bolzano-Weierstrass.

SETTIMANA 9.

Lezione 28 (24/11/2014 (Marchi)). Derivate di ordine superiore al primo. Formula di Taylor con resto di Peano e con resto di Lagrange [enunciato]. Formula di Taylor di $\sin x$ centrata in $x_0 = 0$. Esempi di calcolo di limiti con la formula di Taylor-Peano. Il polinomio di Taylor è la migliore approssimazione di una funzione regolare. Formula di Taylor di e^x , $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ centrata in $x_0 = 0$.

Lezione 29 (25/11/2014 (Marchi)). Esercizi sulla Formula di Taylor; calcolo di limiti, approssimazioni. Funzioni iperboliche: loro definizione, andamento, proprietà, sviluppo di MacLaurin, funzioni iperboliche inverse.

Lezione 30 (26/11/2014 (Marchi)). Dimostrazione della formula di Taylor con resto di Peano. Esempio di approssimazione con la formula di Taylor-Lagrange.

Lezione 31 (27/11/2014 (Marchi)). Definizione di massimo e minimo relativo e assoluto. Teorema di Weierstrass (dimostrato) e teorema di Weierstrass generalizzato (enunciato). Esempi. Condizione necessaria per punti di massimo e minimo locale interno.

SETTIMANA 10.

Lezione 32 (01/12/2014). Teorema degli zeri, Teorema dei valori intermedi. Teorema di Rolle e Teorema di Lagrange. $f'(x) = 0$ se e solo se $f(x) = c$. Esempi

Lezione 33 (02/12/2014). $f(x)$ debolmente crescente (decrecente) se e solo se $f'(x) \geq 0$ (≤ 0). Condizioni sufficienti di stretta monotonia. Condizioni sufficienti del primo ordine di massimo e minimo. Condizioni necessarie e sufficienti di massimo e minimo con le derivate di ordine superiore al primo. Definizione di asintoto. Schema di studio di funzione. Esempio di uso dello schema di studio di funzioni [prima parte].

Lezione 34 (03/12/2014). Convessità e punti di flesso. Condizioni di convessità con la derivata prima [no dim] e la derivata seconda [dim]. Esempio di uso dello schema di studio di funzioni [seconda parte]. Definizione e proprietà delle primitive. Definizione di integrale indefinito. Esempi su integrali immediati.

Lezione 35 (04/12/2014). Metodo di integrazione per parti (dimostrato). Esempi su integrali per parti. Teorema di integrazione per sostituzione (prima e seconda forma; dimostrata solo la prima forma). Esempi su integrali per sostituzione.

SETTIMANA 11.

Lezione 36 (09/12/2014). Integrazione delle funzioni razionali: caso delle radici reali semplici, delle radici reali multiple. Integrazione di $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{-1}$. Esempi. Schema generale di integrazione delle funzioni razionali.

Lezione 37 (10/12/2014). Sostituzioni consigliate nei casi: $R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_1/q_1}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_2/q_2} \dots)$, $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, per $a > 0$ e per $a < 0$, $R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)$, $R(\sin x, \cos x)$, $R(e^x)$, $R(\log x)/x$. Esempi ed esercizi. Euristica sull'integrale di Riemann.

Lezione 38 (11/12/2014). Somme inferiori e somme superiori di una funzione limitata in un intervallo; relazione tra somme superiori e inferiori al variare della suddivisione dell'intervallo. Definizione di Integrale di Riemann. Significato geometrico dell'integrale di Riemann. Proprietà dell'integrale di Riemann. Esempi. Integrale di Riemann e relazione d'ordine. Additività dell'Integrale di Riemann. [no dim fino a qui] Disuguaglianza del valore assoluto [dim]. Teorema della media [dim]. Condizioni sufficienti di Riemann-integrabilità [no dim]. Definizione di funzione integrale. Una funzione Riemann integrabile ha funzione integrale continua. Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI) (dimostrare in seguito). Formula fondamentale del calcolo integrale [dim].

SETTIMANA 12.

Lezione 39 (15/12/2014 (Marchi)). Esercizi di riepilogo su calcolo di primitive, integrali definiti.

Lezione 40 (16/12/2014). f Riemann-integrabile ha funzione integrale continua. Dimostrazione del TFCI. Funzioni integrali composte: esercizi.

Lezione 41 (17/12/2014). Integrazione definita per parti [no dim]. Integrazione definita per sostituzione (prima forma) [no dim]. Integrazione definita per sostituzione (seconda forma)[no dim]. Esercizi sul calcolo di integrali definiti. Integrali impropri su insiemi limitati. Il caso di $\int_a^b |t - a|^{-\alpha} dt$, $\alpha > 0$. Criterio del confronto. Criterio dell'ordine di infinito per integrali impropri su insiemi limitati. Esercizi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi limitati.

Lezione 42 (18/12/2014). Il caso di $\int_0^{1/2} t^{-1} (-\log t)^{-\beta} dt$, $\beta > 0$. Integrali impropri su insiemi illimitati. Criterio del confronto. Il caso di $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt$, $\alpha > 0$. Criterio dell'ordine di infinitesimo per integrali impropri su insiemi illimitati. Esempi. Il caso di $\int_2^{+\infty} t^{-1} (\log t)^{-\beta} dt$, $\beta > 0$. Esercizi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi illimitati.

SETTIMANA 13.

Lezione 43 (07/01/2015). Serie Numeriche: carattere di definizione. Serie costante. Serie di Mengoli, serie geometrica. Condizione necessaria di convergenza. Serie armonica. Serie a termini non negativi. Criterio integrale per serie con $a_k \geq 0$, $a_{k+1} \leq a_k$. Serie armonica generalizzata. Serie di termine generale $a_k = k^{-1} (\log k)^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Alcuni esempi. Proprietà delle serie.

Lezione 44 (08/01/2015). Criterio del confronto. Criterio dell'ordine di infinitesimo. Convergenza assoluta delle serie. Criterio della radice. Criterio del rapporto. Esempi. Serie a segni alterni. Criterio di Leibniz per serie a segni alterni [no dim]. Esercizi sulla convergenza delle serie.

SETTIMANA 14.

Lezione 45 (12/01/2015). Esercizi di riepilogo sulle serie (tutti i tipi).

Lezione 46 (13/01/2015). Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine lineari a coefficienti continui. Equazioni differenziali a variabili separabili. Esempi ed Esercizi.

Lezione 47 (14/01/2015). Equazioni differenziali ordinarie lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: forma delle soluzioni. Caso omogeneo: polinomio caratteristico, forma delle soluzioni del caso omogeneo. Integrale generale del caso omogeneo e non omogeneo con metodo per somiglianza.

Lezione 48 (15/01/2015). Caso generale del metodo di somiglianza. Integrale generale del caso omogeneo e non omogeneo con metodo di sovrapposizione. Esempi ed Esercizi sulle equazioni differenziali ordinarie.