Nota: A meno che non sia specificato diversamente, si intende che i teoremi, lemmi, proposizioni sotto menzionati siano stati dimostrati a lezione. Si ricorda che ognuna di tali dimostrazioni può essere chiesta all'esame.

ARGOMENTI

SETTIMANA 1.

Lezione 1 (01/10/2015). Generalità sul corso. Prime proprietà dei numeri naturali. L'insieme $\mathbb{N}$. Principio di induzione. Esempi di uso del principio di induzione. Disuguaglianza di Bernoulli. Esempi ed Esercizi.

SETTIMANA 2.

Lezione 2 (05/10/2015; (Vagnoni)). Risoluzioni di disequazioni per via grafica. Dal grafico di una funzione a quello del suo valore assoluto. Risoluzione di disequazioni con valore assoluto per via grafica e per via analitica. $|x| \le |\tan x|$ in $(-\pi/2, \pi/2)$, $|\sin x| \le |x|$. Dominio, periodicità e grafico della funzione $y = \arccos(\cos x)$. Disequazioni logaritmiche ed esponenziali con cenni alle disequazioni trigonometriche.

Lezione 3 (06/10/2015). Binomio di Newton. L'insieme $\mathbb{Z}$. L'insieme $\mathbb{Q}$. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Lezione 4 (07/10/2015). L'insieme $\mathbb{R}$. Assioma di separazione. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ [No dim]. Proprietà di Archimede. Proprietà della parte intera. La funzione parte intera: cenni euristici. Densità dei razionali nei reali. Esempi ed esercizi.

Lezione 5 (08/10/2015). Tra due numeri reali distinti esiste sempre almeno un razionale ed un irrazionale. Maggiorante e minorante di un insieme di numeri. Insiemi superiormente (inferiormente) limitati. Massimo e minimo di un insieme di numeri reali. Esempi ed Esercizi. Estremo superiore e inferiore. Se A sup. (inf) limitato allora M_A ha minimo (m_A ha massimo).

SETTIMANA 3.

Lezione 6 (12/10/2015; (Vagnoni)). Caratterizzazione di $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\inf A \in \mathbb{R}$. Esempi ed esercizi su massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore di insiemi reali.

Lezione 7 (13/10/2015). Applicazioni. Dominio, codominio, immagine e grafico di una applicazione. Suriettività e iniettività. Composizione di applicazioni. Applicazione inversa. Esempi ed Esercizi.

Lezione 8 (14/10/2015). Grafico dell'applicazione inversa. Definizione di Intervallo. Monotonia debole e stretta delle applicazioni. Monotonia stretta della funzione inversa. Elementi di topologia della retta reale: Intorni circolari di punti reali, intorni, intorni di $+\infty$ e di $-\infty$. Esempi ed Esercizi.

Lezione 9 (15/10/2015). Punti di accumulazione. Definizione di limite ($x_0, \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$). Esempi di come si specializza la definizione di limite nei vari casi. Esempi. Osservazioni sul ruolo del punto di accumulazione rispetto al valore limite. Teorema dell'unicità del limite, della permanenza del segno (dimostrati, commenti, esempi). Esempi ed Esercizi.

SETTIMANA 4.

Lezione 10 (19/10/2015; (Vagnoni)). Esempi di limiti verificati o confutati con la definizione. Osservazioni su limiti e valore assoluto. Calcoli di limiti: x, x^n. $\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$, dove $p(x)$ è un polinomio a coefficienti reali.

Lezione 11 (20/10/2015). Teorema del confronto (dimostrato, commenti, esempi). Teorema delle tre funzioni; esempio del suo utilizzo. Limite della somma, del prodotto (dimostrato), del rapporto (limiti finiti). Esempi. $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$.

Lezione 12 (21/10/2015). Teorema dell'unicità del limite, della permanenza del segno (limiti infiniti). Teorema del confronto (limiti infiniti) [cenni dimostrativi]. Limite della somma, del prodotto, del rapporto (limiti infiniti) con cenni alle dimostrazioni. $\lim_{x\to+\infty} x + \sin x = +\infty$; Descrizione ed esempi dei casi indeterminati del tipo $(-\infty) + (+\infty)$, $0 \cdot \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞.

Lezione 13 (22/10/2015). Limiti di funzioni monotone. Limite destro e sinistro. Esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se esistono $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell^+$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell^-$ e $\ell = \ell^+ = \ell^-$. Non esistenza del $\lim_{x\to 0} 1/x$. Se $a > 1$, $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, Se $0 < a < 1$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

SETTIMANA 5.

Lezione 14 (26/10/2015). Se $a > 1$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = 0$. Se $0 < a < 1$, $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = 0$, $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$. Teorema sui limiti per sostituzione[no dim]. Esempio: $\lim_{t\to 0} 2^{1/t^2} = +\infty$. Teorema "ponte" [no dim]. Dimostrazione che $\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin x$. $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$. Dimostrazione di: $\lim_{n\to+\infty} a^n/n! = 0$, $a > 0$, $\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1$ $(a > 0)$.

Lezione 15 (27/10/2015). Formula della somma di x^k per $k = 0\dots,n$. $\lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = 1$. Definizione di: $\lim_{n\to+\infty}(1+1/n)^n = e$ ($e \in (2,3)$, numero di Nepero).

Lezione 16 (28/10/2015). Dimostrazione dei limiti notevoli: $\lim_{x\to\pm\infty}(1+1/x)^x = e$, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$, $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$. funzioni periodiche, pari, dispari. $|\sin x| \le |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$, $\lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0$, $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$.

Lezione 17 (29/10/2015, (Vagnoni)). Esercizi sui limiti.

SETTIMANA 6.

Lezione 18 (02/11/2015; (Vagnoni)). Esercizi sui limiti.

Lezione 19 (03/11/2015). $\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$, Un limite di una funzione definita per casi, limiti "parenti" del $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$. Definizione di continuità di una funzione in un punto ed in un intervallo. Esempi di funzioni continue nel loro dominio di definizione: polinomi, $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\log_a x$, $\tan x$. Classificazione dei punti di discontinuità. Continuità della somma, del prodotto, del rapporto. Continuità della composta.

Lezione 20 (04/11/2015). Continuità dell'inversa [no dim]. Continuità delle funzioni trigonometriche inverse. Un esempio di continuità per una funzione definita per casi. Esercizi sulla continuità di funzioni definite per casi. Definizione di derivata prima. Interpretazione geometrica della derivata, esempi di punti angolosi e cuspidali. Teorema: f derivabile in x_0 implica f continua in x_0. Non esistenza della derivata in 0 di $|x|$. Derivate delle funzioni fondamentali: (a^x).

Lezione 21 (05/11/2015). Derivate delle funzioni fondamentali: (c, $\sin x$, $\cos x$, $\log_a x$, $\log_a |x|$, x^n $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$). Derivata di somma, del rapporto e del prodotto. Derivata di $(cf)' = cf'$. Derivabilità dei polinomi. Esercizi su continuità e derivabilità di funzioni definite per casi.

SETTIMANA 7.

Lezione 22 (09/11/2015; (Vagnoni)). Esercizi su continuità e derivabilità di funzioni definite per casi.

Lezione 23 (10/11/2015). Teorema del Differenziale. Definizione di $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$. Derivabilità della composta. Derivabilità dell'inversa. Derivabilità di $x^{1/n}$, $\arccos x$.

Lezione 24 (11/11/2015). Derivata di $\tan x$. Derivabilità di $\arctan x$, $\arcsin x$, x^α. Derivata di x^α in $x_0 = 0$. Teorema di de l'Hôpital e Corollari [no dim]. Esempi di uso del Teorema di de l'Hôpital: $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\sin(1/x)}{2x+\sin x}$. $\lim_{x\to 0^+} x^\varepsilon \log x$, $\varepsilon > 0$.

Lezione 25 (12/11/2015). Esercizi sul calcolo di limiti con il teorema di de l'Hôpital: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$; $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$. Definizione di funzione infinitesima per $x \to x_0$. Infinitesimi dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore per $x \to x_0$. Ordine di un infinitesimo. Principio di sostituzione degli infinitesimi. Esempi. Esercizi sul principio di sostituzione di infinitesimi.

SETTIMANA 8.

Lezione 26 (16/11/2015; (Vagnoni)). Esecizi di uso del Teorema di de l'Hôpital nello studio di continuità e derivabilità di funzioni definite per casi. Esercizi sui limiti con il principio di sostituzione di infinitesimi.

Lezione 27 (17/11/2015). Definizione di funzione infinita. Infiniti dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore. Ordine di un un infinito. Principio di sostituzione degli infiniti. Esempi. Esercizi sul principio di sostituzione di infiniti. Derivate di ordine superiore al primo. Enunciato della Formula di Taylor con resto di Peano. Formula di Taylor di e^x centrata in $x_0 = 0$.

Lezione 28 (18/11/2015). Lezione non svolta a causa degli esami di stato di Ingegneria Civile ed Ambientale.

Lezione 28 (19/11/2015). Il polinomio di Taylor è la migliore approssimazione di una funzione regolare. Formula di Taylor di $\sin x$, $\cos x, \log(1+x), (1+x)^\alpha$ centrata in $x_0 = 0$. Esempi di calcolo di limiti con la formula di Taylor-Peano.

SETTIMANA 9.

Lezione 29 (23/11/2015; (Vagnoni)). Esercizi sui limiti con il principio di sostituzione di infiniti. Funzioni iperboliche: loro definizione, andamento, proprietà. Formula di Taylor di $\tan x, \arctan x, \cosh x, \sinh x, \tanh x$ centrata in $x_0 = 0$. Esercizi di calcolo di limiti con la formula di Taylor-Peano.

Lezione 30 (24/11/2015). Definizione di sottosuccessione. $a_n \to \lambda$ per $n \to \infty$ se e solo se per ogni sottosuccessione a_{n_k} si ha che $a_{n_k} \to \lambda$ per $k \to \infty$. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Definizione di punti di massimo e/o minimo locale (relativo) e globale (assoluto). Esistenza della successione minimizzante e massimizzante.

Lezione 31 (25/11/2015). Teorema di Weierstrass e teorema di Weierstrass generalizzato. Teorema degli zeri, Teorema dei valori intermedi. Esempi.

Lezione 32 (26/11/2015). Condizione necessaria per punti di massimo e minimo locale interno. Teorema di Rolle e Teorema di Lagrange. $f'(x) = 0$ se e solo se $f(x) = c$. $f(x)$ debolmente crescente (decrescente) se e solo se $f'(x) \geq 0$ (≤ 0). Condizioni sufficienti di stretta monotonia. Condizioni sufficienti del primo ordine di massimo e minimo.

SETTIMANA 10.

Lezione 33 (30/11/2015; (Vagnoni)). Esercizi sullo studio di funzioni.

Lezione 34 (01/12/2015). Condizioni necessarie e sufficienti di massimo e minimo con le derivate di ordine superiore al primo. Dimostrazione delle condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine per punti di massimo o minimo locale. Convessità e punti di flesso. Condizioni di convessità con la derivata prima [no dim] e la derivata seconda [no dim]. Commenti introduttivi al Calcolo Integrale.

Lezione 35 (02/12/2015). Definizione e proprietà delle primitive. Definizione di integrale indefinito. Esempi su integrali immediati. Metodo di integrazione per parti (dimostrato). Teorema di integrazione per sostituzione (prima forma). Esercizi su integrali per parti e su integrali per sostituzione.

Lezione 36 (03/12/2015). Teorema di integrazione per sostituzione (seconda forma). Integrazione delle funzioni razionali: caso delle radici reali semplici, delle radici reali multiple e delle radici complesse semplici. Integrazione di $[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{-1}$.

SETTIMANA 11.

Lezione 37 (09/12/2015). Integrazione delle funzioni razionali: caso delle radici complesse multiple. Integrazione di $[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Schema generale di integrazione delle funzioni razionali. Sostituzioni consigliate nei casi: $R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_1/q_1}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_2/q_2} \ldots)$, $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, per $a > 0$, $R(\sin x, \cos x)$. Esercizi sull'integrazione delle funzioni razionali e sulle sostituzioni consigliate.

Lezione 38 (10/12/2015). Euristica sull'integrale di Riemann. Somme inferiori e somme superiori di una funzione limitata in un intervallo; relazione tra somme superiori e inferiori al variare della suddivisione dell'intervallo.

Definizione di Integrale di Riemann. Significato geometrico dell'integrale di Riemann. Proprietà dell'integrale di Riemann. Esempi. Integrale di Riemann e relazione d'ordine. Additività dell'Integrale di Riemann. [no dim fino a qui] Disuguaglianza del valore assoluto [dim]. Teorema della media [dim]. Definizione di funzione integrale. Una funzione Riemann integrabile ha funzione integrale continua. (dimostrare in seguito). Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI) (dimostrare in seguito). Formula fondamentale del calcolo integrale [dim].

SETTIMANA 12.

Lezione 39 (14/12/2015 (Vagnoni)). Esercizi di riepilogo su limiti con Taylor e studi di funzione.

Lezione 40 (15/12/2015). Condizioni sufficienti di Riemann-integrabilità [no dim]. Dimostrazione di: f Riemann-integrabile ha funzione integrale continua. Dimostrazione del TFCI. Sostituzioni consigliate per $R(\log x)/x$, $R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)$. Esercizi su primitive e integrali definiti.

Lezione 41 (16/12/2015). Integrali impropri su insiemi limitati. Il caso di $\int_a^b |t-b|^{-\alpha} dt$, $\alpha > 0$. Criterio del confronto. Criterio dell'ordine di infinito per integrali impropri su insiemi limitati. Esempi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi limitati. Il caso di $\int_0^{1/2} t^{-1}(-\log t)^{-\beta} dt$, $\beta > 0$.

Lezione 42 (17/12/2015). Integrali impropri su insiemi illimitati. Criterio del confronto. Il caso di $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt$, $\alpha > 0$. Criterio dell'ordine di infinitesimo per integrali impropri su insiemi illimitati. Esempi. Considerazioni sulla convergenza dell'integrale e limite dell'integranda. Il caso di $\int_2^{+\infty} t^{-1}(\log t)^{-\beta} dt$, $\beta > 0$. Esempi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi illimitati. Un esercizio di riepilogo su calcolo di primitive e integrali impropri.

SETTIMANA 13.

Lezione 43 (11/01/2016). Serie Numeriche: carattere di definizione. Serie costante. Serie di Mengoli, serie geometrica. Condizione necessaria di convergenza. Serie armonica. Proprietà delle serie.

Lezione 44 (12/01/2016, (Vagnoni)). Esercizi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi illimitati e limitati. Esercizi di riepilogo su calcolo di primitive, integrali definiti. e impropri su insiemi illimitati e limitati. Esercizi di riepilogo su integrali.

Lezione 45 (13/01/2016). Serie a termini non negativi. Criterio integrale per serie con $a_k \geq 0$, $a_{k+1} \leq a_k$. Serie armonica generalizzata. Serie di termine generale $a_k = k^{-1}(\log k)^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Alcuni esempi. Criterio del confronto. Criterio dell'ordine di infinitesimo. Convergenza assoluta delle serie. Criterio della radice. Criterio del rapporto. Esempi.

Lezione 46 (14/01/2016). Serie a segni alterni. Criterio di Leibniz per serie a segni alterni [no dim]. Esercizi sulla convergenza delle serie. Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine lineari a coefficienti continui. Esempi ed Esercizi.

SETTIMANA 14.

Lezione 47 (18/01/2016; (Vagnoni)). Esercizi di riepilogo sulle serie (tutti i tipi).

Lezione 48 (19/01/2016). Equazioni differenziali a variabili separabili. Equazione di Bernoulli. Equazioni differenziali ordinarie lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: forma delle soluzioni. Caso omogeneo: polinomio caratteristico, forma delle soluzioni del caso omogeneo. Esempi ed Esercizi sulle equazioni differenziali ordinarie.

Lezione 49 (20/01/2016). Integrale generale del caso omogeneo e non omogeneo con metodo per somiglianza. Caso generale del metodo di somiglianza. Integrale generale del caso omogeneo e non omogeneo con metodo di sovrapposizione. Esempi ed Esercizi sulle equazioni differenziali ordinarie.

Lezione 50 (21/01/2016). ESERCIZI DI RIEPILOGO