

Date d'esame: 24/01/2017, aule P300-Lu3-Lu4; ore 9.00-12.00; 24/02/2017, aule P300-Lu3-Lu4; ore 9.00-12.00; 28/06/2017, aule P300; ore 9.00-12.00; 20/09/2017, aule P300; ore 9.00-12.00. **Nota:** A meno che non sia specificato diversamente, si intende che i teoremi, lemmi, proposizioni sotto menzionati siano stati dimostrati a lezione. Si ricorda che ognuna di tali dimostrazioni può essere chiesta all'esame.

ARGOMENTI

SETTIMANA 1.

Lezione 1 (26/09/2016). Generalità sul corso. Prime proprietà dei numeri naturali. L'insieme \mathbb{N} . L'insieme \mathbb{Z} . Principio di induzione. Esempi di uso del principio di induzione: $\sum_{k=0}^n k = \frac{k(k+1)}{2}$; $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$.

Lezione 2 (27/09/2016). L'insieme \mathbb{Q} . $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Disuguaglianza di Bernoulli. Definizione di Fattoriale. Definizione di binomiale. Binomio di Newton [prima parte]. Esempi ed Esercizi.

Lezione 3 (28/09/2016). Binomio di Newton [seconda parte]. L'insieme \mathbb{R} . Assioma di separazione. Proprietà di Archimede. Proprietà della parte intera. La funzione parte intera: cenni euristici. Esempi ed esercizi.

Lezione 4 (29/09/2016). $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ [No dim]. Densità dei razionali nei reali. Tra due numeri reali distinti esiste sempre almeno un razionale ed un irrazionale. Maggiorante e minorante di un insieme di numeri. Insiemi superiormente (inferiormente) limitati. Definizione di intervallo. Intervalli di \mathbb{R} . Massimo e minimo di un insieme di numeri reali. Estremo superiore e inferiore. Se A sup. (inf) limitato allora M_A ha minimo (m_A ha massimo).

SETTIMANA 2.

Math4U (Dal Bianco); Incontro n. 1 (03/10/2016). Ripasso su disequazioni trigonometriche, esponenziali, logaritmiche.

Lezione 5 (03/10/2016). Caratterizzazione di $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\inf A \in \mathbb{R}$. Applicazioni. Dominio, codominio, immagine e grafico di una applicazione. Suriattività e iniettività. Insieme controimmagine di una applicazione. Esempi ed Esercizi.

Lezione 6 (04/10/2016). Grafico di una applicazione. Composizione di applicazioni. Applicazione identica. Applicazione inversa. Grafico dell'applicazione inversa. Monotonia debole e stretta delle applicazioni. Esempi ed Esercizi.

Lezione 7 (05/10/2016; (Benvegnù)). Esercizi su massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore di insiemi reali.

Lezione 8 (06/10/2016). Monotonia stretta della funzione inversa. Elementi di topologia della retta reale: Intorni circolari di punti reali, intorni, intorni di $+\infty$ e di $-\infty$. Punti di accumulazione. Definizione di limite ($x_0, \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$). Esempi di come si specializza la definizione di limite nei vari casi. Esempi. Osservazioni sul ruolo del punto di accumulazione rispetto al valore limite. Esempi ed Esercizi.

SETTIMANA 3.

Math4U (Dal Bianco); Incontro n. 2 (10/10/2016). Esercizi sui punti di accumulazione e limiti con la definizione.

Lezione 9 (10/10/2016; (Benvegnù)). Ripasso delle proprietà delle funzioni elementari: dominio, immagine, monotonia, invertibilità per $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$, $|x|$, \sqrt{x} , x^{2n} , x^{2n+1} , x^{-n} , $x^{a/b}$ ($a/b \in \mathbb{Q}$, a, b coprimi), $\log x$, e^x , funzioni trigonometriche, funzioni iperboliche.

Lezione 10 (11/10/2016). Esercizi sui punti di accumulazione. Definizione di successione. L'unico punto di accumulazione di \mathbb{N} è $+\infty$. Esempi di limiti verificati o confutati con la definizione.

Lezione 11 (12/10/2016). Teorema dell'unicità del limite, della permanenza del segno, della limitatezza locale (dimostrati, commenti, esempi). Osservazioni su limiti e valore assoluto. La funzione di Dirichlet non ammette limite in 0.

Lezione 12 (13/10/2016). Teorema del confronto I e II. Teorema delle tre funzioni. Commenti ed esempi del loro utilizzo. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sin x = -\infty$.

SETTIMANA 4.

Math4U (Dal Bianco); Incontro n. 3 (17/10/2016). Limite a $+\infty$, $-\infty$ e a 0 di un rapporto di polinomi. Esercizi ed Esempi.

Lezione 13 (17/10/2016, (Benvegnù)). Esercizi sui limiti usando teoremi del confronto, delle tre funzioni, somma, prodotto e rapporto.

Lezione 14 (18/10/2016). Limite della somma, del prodotto (no dimostrato), del rapporto (no dimostrato). Descrizione ed esempi dei casi indeterminati del tipo $(-\infty) + (+\infty)$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞ . Limiti dall'alto e dal basso. Limite destro e sinistro. Esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se e solo se esistono $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell^+$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell^-$ e $\ell = \ell^+ = \ell^-$ (no dimostrato). Non esistenza del $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$.

Lezione 15 (19/10/2016). Limiti di funzioni monotone. Se $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, Se $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$. Se $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = 0$. Se $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$. Limiti delle funzioni potenze e loro inverse. Limiti delle inverse delle funzioni trigonometriche. Euristica sul Teorema sui limiti per sostituzione.

Lezione 16 (20/10/2016). Teorema sui limiti per sostituzione [no dim]. Esempio: $\lim_{t \rightarrow 0} 2^{1/t^2} = +\infty$. Definizione di funzione pari e di funzione dispari. Teorema "ponte": $f(x)$ ammette limite ℓ per $x \rightarrow x_0$ se e solo se $f(a_n) \rightarrow \ell$ per $n \rightarrow +\infty$, per ogni a_n successione, $a_n \rightarrow x_0$ [no dim]. Dimostrazione che $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$. Teorema di convergenza di $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n = e$ ($e \in (2, 3)$, numero di Nepero).

SETTIMANA 5.

Math4U (Dal Bianco); Incontro n. 4 (24/10/2016). Limiti delle funzioni pari e dispari con il teorema di sostituzione.

Lezione 17 (24/10/2016; (Benvegnù)). Calcolo di limiti tramite limiti notevoli su funzioni definite a tratti chiedendo di verificare uguaglianza tra limite destro e sinistro e valore della funzione nel punto.

Lezione 18 (25/10/2016). Dimostrazione di: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n/n! = 0$, $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{1/n} = 1$ ($a > 0$). $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = 1$. Dimostrazione dei limiti notevoli: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$.

Lezione 19 (26/10/2016). Dimostrazione dei limiti notevoli: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$. $|\sin x| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2$.

Lezione 20 (27/10/2016). $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$, Definizione di continuità di una funzione in un punto ed in un intervallo. Esempi di funzioni continue nel loro dominio di definizione: polinomi, $\sin x$, $\cos x$, a^x , $\log_a x$, $\tan x$. Classificazione dei punti di discontinuità. Continuità della somma, del prodotto, del rapporto. Continuità della composta. Continuità dell'inversa [no dim].

Salto lezioni del 31/10 e 02-03/11 per giorni di chiusura dell'Ateneo e decisione del CCS sulle prove intermedie.

SETTIMANA 6.

Math4U (Dal Bianco); Incontro n. 5 (07/11/2016). Continuità delle funzioni trigonometriche inverse.

Lezione 21 (07/11/2016; (Benvegnù)). Esercizi su continuità di funzioni definite per casi.

Lezione 22 (08/11/2016). Definizione di derivata prima. Interpretazione geometrica della derivata, esempi di punti angolosi e cuspidali. Teorema: f derivabile in x_0 implica f continua in x_0 . Non esistenza della derivata in 0 di $|x|$ e di $x \sin(1/x)$. Derivate delle funzioni fondamentali: a^x , c , $\sin x$, $\cos x$, $\log_a x$, $\log_a |x|$, x^n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).

Lezione 23 (09/11/2016). Derivata di x^n ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Derivata di somma, del rapporto e del prodotto. Derivata di $(cf)' = cf'$. Derivabilità dei polinomi. Teorema del Differenziale. Derivabilità della composta.

Lezione 24 (10/11/2016). Derivabilità dell'inversa [no dim]. Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital e Corollari [no dim]. Esempi di uso del Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \sin(1/x)}{2x + \sin x}$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\varepsilon \log x$, $\varepsilon > 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

SETTIMANA 7.

Math4U (Dal Bianco); Incontro n. 6 (14/11/2016). Alcuni calcoli di derivata: $e^{\sin x}$, $\log \log x$, x^x , $\arcsin(\sin x)$, $\arcsin(\sqrt{x-4})$. Limiti con il Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital.

Lezione 25 (14/11/2016; (Benvegnù)). Derivabilità di $x^{1/n}$, $\arccos x$, $\tan x$, $\arctan x$, $\arcsin x$, x^α . Derivata di x^α in $x_0 = 0$. Esercizi di uso del Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital nello studio di continuità e derivabilità di funzioni definite per casi.

Lezione 26 (15/11/2016). Definizione di funzione infinitesima per $x \rightarrow x_0$. Definizione di $f(x) = o(g(x))$ per $x \rightarrow x_0$. Infinitesimi dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore per $x \rightarrow x_0$. Ordine di un infinitesimo. Principio di sostituzione degli infinitesimi. Esempi. Esercizi sul principio di sostituzione di infinitesimi.

Lezione 27 (16/11/2016). Definizione di funzione infinita. Infiniti dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore. Ordine di un infinito. Principio di sostituzione degli infiniti. Esempi. Esercizi sul principio di sostituzione di infiniti. Derivate di ordine superiore al primo.

Lezione 28 (17/11/2016). Enunciato della Formula di Taylor con resto di Peano. Formula di Taylor di e^x centrata in $x_0 = 0$. Il polinomio di Taylor è la migliore approssimazione di una funzione regolare. Formula di Taylor di $\sinh x$, $\cosh x$, $\sin x$, centrata in $x_0 = 0$. Esempi di calcolo di limiti con la formula di Taylor-Peano.

SETTIMANA 8.

Math4U (Dal Bianco); Incontro n. 7 (21/11/2016). Limiti con principio di sostituzione di infinitesimi e di infiniti.

Lezione 29 (21/11/2016; (Benvegnù)). Formule di Maclaurin per $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^a$, $\arctan x$. Osservazioni sull'algebra degli o-piccoli. Esercizi di calcolo di limiti con la formula di Taylor-Peano.

Lezione 30 (22/11/2016). Osservazioni sull'algebra degli o-piccoli. Esistenza della successione minimizzante e massimizzante. Definizione di sottosuccessione. $a_n \rightarrow \lambda$ per $n \rightarrow \infty$ se e solo se per ogni sottosuccessione a_{n_k} si ha che $a_{n_k} \rightarrow \lambda$ per $k \rightarrow \infty$. $a_n \rightarrow \lambda$ per $n \rightarrow \infty$ se e solo se $a_{2k} \rightarrow \lambda$ per $k \rightarrow \infty$ e $a_{2k+1} \rightarrow \lambda$ per $k \rightarrow \infty$. Teorema di Bolzano e di Bolzano-Weierstrass [no dim]. Definizione di punti di estremali e estremi locali (relativi) e globali (assoluti). Teorema di Weierstrass e teorema di Weierstrass generalizzato.

Lezione 31 (23/11/2016). Teorema di Weierstrass generalizzato. Teorema degli zeri, e sue generalizzazioni. Esempi di utilizzo del teorema degli zeri per determinare le soluzioni di $f(x) = 0$. Teorema dei valori intermedi [no dim]. Condizione necessaria per punti di massimo e minimo locale interno.

Lezione 32 (24/11/2016). Teorema di Rolle e Teorema di Lagrange. $f'(x) = 0$ in I se e solo se $f(x) = c$ in I . $f(x)$ debolmente crescente (decrecente) se e solo se $f'(x) \geq 0$ (≤ 0). Condizioni sufficienti di stretta monotonia. Condizioni sufficienti del primo ordine di massimo e minimo. Condizioni necessarie e sufficienti di massimo e minimo con le derivate di ordine superiore al primo. Dimostrazione delle condizioni necessarie e sufficienti del secondo ordine per punti di massimo o minimo locale. Criterio delle derivate successive.

SETTIMANA 9.

Math4U (Dal Bianco); Incontro n. 8 (28/11/2016). Incontro ANNULLATO a causa del Decreto Rettorale di sospensione delle lezioni per consentire agli studenti di presenziare alle iniziative per il “miglioramento della didattica”. Verrà recuperato a gennaio 2017.

Lezione 33 (28/11/2016; (Benvegnù)). Convessità e punti di flesso. Condizioni di convessità con la derivata prima [no dim] e la derivata seconda [no dim]. Esercizi sullo studio di funzioni.

Lezione 34 (29/11/2016). Definizione e proprietà delle primitive. Definizione di integrale indefinito. Esempi su integrali immediati. Metodo di integrazione per parti. Teorema di integrazione per sostituzione (prima forma). Esercizi su integrali per parti e su integrali per sostituzione.

Lezione 35 (30/11/2016). Teorema di integrazione per sostituzione (seconda forma). Integrazione delle funzioni razionali: caso delle radici reali semplici, delle radici reali multiple e delle radici complesse semplici. Integrazione di $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{-1}$. Schema generale di integrazione delle funzioni razionali.

Lezione 36 (01/12/2016). Integrazione delle funzioni razionali: caso delle radici complesse multiple. Integrazione di $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Sostituzioni consigliate nei casi: $R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_1/q_1}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_2/q_2} \dots)$, $R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)$, $R(\sin x, \cos x)$, $R(e^x)$, $R(\log x)/x$. Esercizi sull'integrazione delle funzioni razionali e sulle sostituzioni consigliate.

SETTIMANA 10.

Math4U (Dal Bianco); Incontro n. 8 (05/12/2016). Esercizi su studio di funzioni.

Lezione 37 (05/12/2016; Benvegnù). Esercizi di riepilogo su calcolo di primitive.

Lezione 38 (06/12/2016). Euristiche sull'integrale di Riemann. Somme inferiori e somme superiori di una funzione limitata in un intervallo; relazione tra somme superiori e inferiori al variare della suddivisione dell'intervallo. Definizione di Integrale di Riemann. Significato geometrico dell'integrale di Riemann. Proprietà dell'integrale di Riemann. Esempi. Integrale di Riemann e relazione d'ordine. Additività dell'Integrale di Riemann. [no dim fino a qui] Disuguaglianza del valore assoluto. Teorema della media Condizioni sufficienti di Riemann-integrabilità [no dim].

Lezione 39 (07/12/2016). Definizione di funzione integrale. Una funzione Riemann integrabile ha funzione integrale continua. Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI) e suoi corollari. Formula fondamentale del calcolo integrale. Funzioni integrali composte.

SETTIMANA 11.

Math4U (Dal Bianco); Incontro n. 9 (12/12/2016). Esercizi di riepilogo sul calcolo delle primitive e di integrali di Riemann.

Lezione 40 (12/12/2016 (Benvegnù)). Esercizi di riepilogo sul calcolo delle primitive e di integrali di Riemann.

Lezione 41 (13/12/2016). Integrali impropri su insiemi limitati. Il caso di $\int_a^b |t - b|^{-\alpha} dt$, $\alpha > 0$. Criterio del confronto. Criterio dell'ordine di infinito per integrali impropri su insiemi limitati. Esempi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi limitati. Il caso di $\int_0^{1/2} t^{-1} (-\log t)^{-\beta} dt$, $\beta > 0$.

Lezione 42 (14/12/2016). Integrali impropri su insiemi illimitati. Criterio del confronto. Il caso di $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt$, $\alpha > 0$. Criterio dell'ordine di infinitesimo per integrali impropri su insiemi illimitati. Esempi. Considerazioni sulla convergenza dell'integrale e limite dell'integranda. Il caso di $\int_2^{+\infty} t^{-1} (\log t)^{-\beta} dt$, $\beta > 0$. Esempi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi illimitati. Un esercizio di riepilogo su calcolo di primitive e integrali impropri.

Lezione 43 (15/12/2016). Serie Numeriche: carattere di definizione. Serie costante. Serie di Mengoli, serie geometrica. Condizione necessaria di convergenza. Serie armonica. Proprietà delle serie.

SETTIMANA 12.

Math4U (Dal Bianco); Incontro n. 10 (19/12/2016). Esercizi su integrali impropri.

Lezione 44 (19/12/2016, (Benvegnù)). Esercizi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi illimitati e limitati. Esercizi di riepilogo su calcolo di primitive, integrali definiti. e impropri su insiemi illimitati e limitati. Esercizi di riepilogo su integrali.

Lezione 45 (20/12/2016). Serie a termini non negativi. Criterio integrale per serie con $a_k \geq 0$, $a_{k+1} \leq a_k$ [no dim]. Serie armonica generalizzata. Serie di termine generale $a_k = k^{-1}(\log k)^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Alcuni esempi. Criterio del confronto [no dim]. Criterio dell'ordine di infinitesimo [no dim]. Convergenza assoluta delle serie. Criterio della radice [no dim]. Criterio del rapporto [no dim]. Serie esponenziale. Serie a segni alterni. Criterio di Leibniz per serie a segni alterni [no dim]. Esempi sulla convergenza delle serie.

Lezione 46 (21/12/2016). Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine lineari a coefficienti continui. Equazione di Bernoulli. Esempi ed Esercizi.

Lezione 47 (22/12/2016). Equazioni differenziali a variabili separabili. Equazioni differenziali ordinarie lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: forma delle soluzioni. Caso omogeneo: polinomio caratteristico, forma delle soluzioni del caso omogeneo. Integrale generale del caso omogeneo e non omogeneo con metodo per somiglianza. Caso generale del metodo di somiglianza. Esempi ed Esercizi sulle equazioni differenziali ordinarie.

SETTIMANA 13.

Math4U (Dal Bianco); Incontro n. 11 (09/01/2017). Esercizi di base sulle serie numeriche.

Lezione 48 (09/01/2017, (Benvegnù)). Esercizi sulle serie numeriche (con e senza parametri).

Lezione Suppletiva 1 (10/01/2017). Integrale generale del caso omogeneo e non omogeneo con metodo di sovrapposizione. Esercizi di Riepilogo.

Lezione Suppletiva 2 (11/01/2017). Esercizi di Riepilogo.

Lezione Suppletiva 3 (12/01/2017). Esercizi di Riepilogo.

A FEBBRAIO

Math4U (Dal Bianco); Incontro n. 12 (in un intorno del 06/02/2017; data e ora precisa saranno comunicate via Moodle). Incontro previsto tra il primo ed il secondo appello.