Date d'esame: 23/01/2019 aule P300-Lu3-Lu4 ore 14.30-17.30; 20/02/2019 aule P300-Lu3-Lu4 ore 9.00-12.00; 26/06/2019 aule Lu3-Lu4 ore 9.00-12.00; 18/09/2019 aule Lu3-Lu4 ore 14.30-17.30. **Nota**: A meno che non sia specificato diversamente, si intende che i teoremi, lemmi, proposizioni sotto menzionati siano stati dimostrati a lezione. Si ricorda che ognuna di tali dimostrazioni può essere chiesta all'esame.

Argomenti

Settimana 1.

Lezione 1 (08/10/2018). Generalità sul corso. Prime proprietà dei numeri naturali. L'insieme $\mathbb{N}$. Principio di induzione. Esempi di uso del principio di induzione: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{k(k+1)}{2}$; $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ per ogni $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lezione 2 (10/10/2018). L'insieme $\mathbb{Z}$ e le sue proprietà. L'insieme $\mathbb{Q}$ e le sue proprietà. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Definizione di fattoriale. Definizione di binomiale. Proprietà del binomiale. Esempi ed Esercizi.

Lezione 3 ((Battaglia) 11/10/2018). Ripasso delle proprietà delle funzioni elementari: dominio, immagine, monotònia, invertibilità per $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$, $|x|$, $\sqrt{x}$, x^{2n}, x^{2n+1}, $\log x$, e^x, funzioni trigonometriche, x^{-n}, $x^{a/b}$ ($a/b \in \mathbb{Q}$, a, b coprimi).

Lezione 4 (12/10/2018). L'insieme $\mathbb{R}$. Assioma di separazione. Proprietà di Archimede. Proprietà della parte intera [no dim]. La funzione parte intera: cenni euristici. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ [no dim]. Densità dei razionali nei reali. Tra due numeri reali distinti esiste sempre almeno un razionale ed un irrazionale.[no dim]. Maggiorante e minorante di un insieme di numeri. Insiemi superiormente (inferiormente) limitati. Definizione di intervallo. Intervalli di $\mathbb{R}$. Massimo e minimo di un insieme di numeri reali. Estremo superiore e inferiore. Se A sup. (inf) limitato allora M_A ha minimo (m_A ha massimo).[dim. nella lezione del 17/10].

Settimana 2.

Math4U; Incontro n. 1 (15/10/2018). Ripasso su disequazioni trigonometriche, esponenziali, logaritmiche.

Lezione 5 (15/10/2018; (Battaglia)). Caratterizzazione di $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\inf A \in \mathbb{R}$ [dim. nella lezione del 17/10]. Esercizi su massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore di insiemi reali.

Lezione 6 (17/10/2018). Se A sup. (inf.) limitato allora M_A ha minimo (m_A ha massimo) [dimostrazione]. Caratterizzazione di $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\inf A \in \mathbb{R}$ [dimostrazione]. Disuguaglianza di Bernoulli. Binomio di Newton. Applicazioni. Esempi.

Lezione 7 (18/10/2018). Dominio, codominio, immagine e grafico di una applicazione. Suriettività e iniettività. Insieme controimmagine di una applicazione. Grafico di una applicazione; grafico di $f + c$. Somma di applicazioni. Esempi ed Esercizi.

Lezione 8 (19/10/2018). Grafico di $f(x+c)$. Prodotto e rapporto di applicazioni. Elementi di topologia della retta reale: Intorni circolari di punti reali, intorni, intorni di $+\infty$ e di $-\infty$. Punti di accumulazione. Definizione di limite ($x_0, \ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$). Esempi di come si specializza la definizione di limite nei vari casi. Esempi ed Esercizi.

Settimana 3.

Math4U; Incontro n. 2 (22/10/2018). Esercizi sui punti di accumulazione.

Lezione 9 ((Battaglia) 22/10/2018). L'intersezione di un numero finito di intorni circolari contiene un intorno circolare. Esercizi sui punti di accumulazione e limiti con la definizione: $\lim_{x\to 2}(2x-1)/(x+2)$, $\lim_{x\to 3} 1/(3-x)^2$.

Lezione 10 (24/10/2018). Composizione di applicazioni. Applicazione identica. Applicazione inversa. Proprietà di dominio e immagine dell'applicazione inversa. Grafico dell'applicazione inversa. Vari esempi.

Lezione 11 (25/10/2018). Monotònia debole e stretta delle applicazioni. Monotònia stretta della funzione inversa. Intersezione di un numero infinito di intorni circolari, esempio. Teorema dell'unicità del limite, della permanenza del segno. Teorema del confronto I.

Lezione 12 (26/10/2018). Teorema del confronto II. Teorema delle tre funzioni. Commenti ed esempi del loro utilizzo. $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$. $\lim_{x\to+\infty} x + \sin x = +\infty$. Osservazioni su limiti e valore assoluto. La funzione di Dirichlet non ammette limite in 0.

SETTIMANA 4.

Math4U; Incontro n. 3 (29/10/2018). Incontro non tenuto a causa delle cancellazione delle lezioni dovuta all'emergenza maltempo.

Lezione 13 (29/10/2018, (Battaglia)). Lezione non tenuta a causa delle cancellazione delle lezioni dovuta all'emergenza maltempo.

Lezione 13 (31/10/2018). Limite della somma (dimostrato solo il caso reale), del prodotto (non dimostrato), del rapporto (non dimostrato). Descrizione ed esempi dei casi indeterminati del tipo $(-\infty)+(+\infty)$, $0\cdot\infty$, $0\cdot\infty$, $0/0$, ∞/∞. Limiti dall'alto e dal basso. Limite destro e sinistro. Esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se esistono $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell^+$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell^-$ e $\ell = \ell^+ = \ell^-$ (no dimostrato). Non esistenza del $\lim_{x\to 0} 1/x$.

SETTIMANA 5.

Math4U; Incontro n. 3 (05/11/2018). Esercizi sui limiti.

Lezione 14 (05/11/2018; (Battaglia)). Esercizi sui limiti.

Lezione 15 (07/11/2018). Limiti di funzioni monotòne. Se $a > 1$, $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, Se $0 < a < 1$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$. Se $a > 1$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = 0$. Se $0 < a < 1$, $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = 0$, $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$. Euristica sul Teorema sui limiti per sostituzione.

Lezione 16 (08/11/2018). Teorema sui limiti per sostituzione. Esempi: $\lim_{t\to 0} 2^{1/t^2} = +\infty$. Definizione di successione. L'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$ è $+\infty$. Esempio di calcolo di limite di una successione con la definizione. Teorema "ponte": $f(x)$ ammette limite ℓ per $x \to x_0$ se e solo se $f(a_n) \to \ell$ per $n \to +\infty$, per ogni a_n successione, $a_n \to x_0$ [no dim]. Dimostrazione che $\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin x$. Introduzione al numero di Nepero e.

Lezione 17 (09/11/2018). Teorema di convergenza di $\lim_{n\to+\infty}(1+1/n)^n = e$ ($e \in (2,3)$, numero di Nepero). Enunciati dei limiti e discussione sulla loro rilevanza (saranno dimostrati in seguito): $\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1$ $(a > 0)$. $\lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = 1$. $\lim_{n\to+\infty} a^n/n! = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, $\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$, $\lim_{x\to\pm\infty}(1+1/x)^x = e$, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$. $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$, $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$. Dimostrazione di $\lim_{n\to+\infty} 1/n! = 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a$.

SETTIMANA 6.

Math4U; Incontro n. 4 (12/11/2018). Limiti che coinvolgono i limiti notevoli.

Lezione 18 (12/11/2018; (Battaglia)). Lezione non tenuta per indisposizione del docente.

Lezione 18 (14/11/2018). Dimostrazione dei limiti notevoli: $\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1$ $(a > 0)$. $\lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = 1$. $\lim_{n\to+\infty} a^n/n! = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, $\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$.

Lezione 19 (15/11/2018). Insiemi simmetrici rispetto allo 0: definizione. Funzioni pari e dispari: definizione e alcuni loro limiti. Dimostrazione dei limiti notevoli: $\lim_{x\to\pm\infty}(1+1/x)^x = e$, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$, $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a$. Dimostrazione che $0 < x < \sin x < \tan x$ per ogni $x \in (0.\pi/2)$.

Lezione 20 (16/11/2018). Dimostrazione di: $|\sin x| \le |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$, $\lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0$, $\lim_{x\to x_0} \cot x = \cot x_0$, $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$. Definizione di continuità di una funzione in un punto ed in un insieme. Esempi di funzioni continue nel loro dominio di definizione: polinomi, $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\log_a x$, $\tan x$, $\cot x$. Esercizio sulla continuità di funzioni definite per casi.

SETTIMANA 7.

Math4U; Incontro n. 5 (19/11/2018). Esercizi sulla continuità.

Lezione 21 (19/11/2018; (Battaglia)). Esercizi sulla continuità in un punto di funzioni definite a tratti con parametri, usando limiti notevoli e il teorema di limiti per sostituzione.

Lezione 22 (21/11/2018). Continuità destra e sinistra. Classificazione dei punti di discontinuità. Prolungamento continuo di una funzione. Continuità della somma, del prodotto, del rapporto. Continuità della composta [no dim]. Continuità dell'inversa [no dim]. Definizione di derivata prima.

Lezione 23 (22/11/2018). Interpretazione geometrica della derivata, esempi di punti angolosi e cuspidali. Teorema: f derivabile in x_0 implica f continua in x_0. Non esistenza della derivata in 0 di $|x|$ e $\sqrt{|x|}$. Derivate delle funzioni fondamentali: a^x, c, $\sin x$, $\cos x$, $\log_a x$, $\log_a |x|$, x^n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).

Lezione 24 (23/11/2018). Derivata di somma, del rapporto e del prodotto.[no dim]. Derivata di $(cf)' = cf'$. Derivata di x^n ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Derivabilità dei polinomi. Teorema del Differenziale. Derivabilità della composta. Derivabilità dell'inversa [no dim]. Derivabilità di $\arctan x$, $\arcsin x$, x^α, $\arccos x$.

SETTIMANA 8.

Math4U; Incontro n. 6 (26/11/2018). Continuità e derivabilità di funzioni definite per casi.

Lezione 25 (26/11/2018; (Battaglia)). Funzioni iperboliche: loro definizione, andamento, proprietà. Continuità e derivabilità di funzioni definite per casi.

Lezione 26 (28/11/2018). Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital e Corollari [no dim]. Esempi di uso del Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital: $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\sin x}{x^3}$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \sin(1/x)}{2x+\sin x}$. $\lim_{x\to 0^+} x^\varepsilon \log x$, $\varepsilon > 0$. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x}$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^3}$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$; $\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin x}{x}$; $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0^-$ per ogni $\alpha > 0$; $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$. Definizione di funzione infinitesima per $x \to x_0$. Infinitesimi dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore per $x \to x_0$.

Lezione 27 (29/11/2018). Definizione di $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$. Definizione di $f(x) \sim g(x))$ per $x \to x_0$. Infinitesimo fondamentale. Ordine di un infinitesimo. Infinitesimi privi di ordine. Teoremi su somma e prodotto di due infinitesimi. Vari esempi.

Lezione 28 (30/11/2018). Principio di sostituzione degli infinitesimi. Esempi sul principio di sostituzione degli infinitesimi. Definizione di funzione infinita. Infiniti dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore. Ordine di un un infinito. Principio di sostituzione degli infiniti. Esempi. Infinito fondamentale. Ordine di un infinito. Infiniti privi di ordine. Gerarchia degli infiniti.

SETTIMANA 9.

Math4U; Incontro n. 7 (03/12/2018). Limiti con la formula di Taylor.

Lezione 29 (03/12/2018; (Battaglia)). Algebra degli o-piccoli, con esempi. Limiti con i principi di sostituzione degli infinitesimi e degli infiniti. Esercizi di calcolo di limiti con la formula di Taylor-Peano (spiegata nella lezione seguente).

Lezione 30 (05/12/2018; (Battaglia)). Derivate di ordine superiore al primo. Enunciato della Formula di Taylor con resto di Peano. Il polinomio di Taylor è la migliore approssimazione di una funzione regolare. Formula di Taylor di e^x centrata in $x_0 = 0$; di e^{x^2} e di e^{2x+3} centrata in $x_0 = 0$. Formule di Maclaurin per $\sinh x$, $\cosh x$, $\sin x$, $\cos x$. Esercizi di calcolo di limiti con la formula di Taylor-Peano. Formula di Maclaurin di $\log(\cos x)$ di ordine 4.

Lezione 31 (06/12/2018). Formula di Maclaurin di $\log|1+x|, (1+x)^a$, $\tan x, \tanh x$. Un limite svolto con l'uso della formula di Maclaurin. Definizione di punti di estremali e estremi locali (relativi) e globali (assoluti).

Lezione 32 (07/12/2018). Esistenza della successione minimizzante e massimizzante. Definizione di sottosuccessione. $a_n \to \lambda$ per $n \to \infty$ se e solo se per ogni sottosuccessione a_{n_k} si ha che $a_{n_k} \to \lambda$ per $k \to \infty$. [no dim]. $a_n \to \lambda$ per $n \to \infty$ se e solo se $a_{2k} \to \lambda$ per $k \to \infty$ e $a_{2k+1} \to \lambda$ per $k \to \infty$. [no dim]. Teorema di Bolzano-Weierstrass [no dim]. Teorema di Weierstrass e teorema di Weierstrass generalizzato.

Settimana 10.

Math4U; Incontro n. 8 (10/12/2018). Limiti con la formula di Taylor.

Lezione 33 (10/12/2018; Battaglia). Limiti con la formula di Taylor.

Lezione 34 (12/12/2018). Teorema degli zeri, e sue generalizzazioni. Teorema dei valori intermedi [no dim]. Condizione necessaria per punti di massimo e minimo locale interno. Teorema di Rolle e Teorema di Lagrange. $f'(x) = 0$ in I se e solo se $f(x) = c$ in I. $f(x)$ debolmente crescente (decrescente) se e solo se $f'(x) \geq 0$ (≤ 0).

Lezione 35 (13/12/2018). Condizioni sufficienti di stretta monotònia. Condizioni sufficienti del primo ordine di massimo e minimo. Condizioni necessarie e sufficienti di massimo e minimo con le derivate di ordine superiore al primo. Criterio delle derivate successive. Definizione e proprietà delle primitive. Definizione di integrale indefinito. Integrali immediati. Esempi su integrali immediati.

Lezione 36 (14/12/2018; (Battaglia)). Funzioni convesse. Criteri di convessità con derivata la prima e seconda [no dim]. Punti di flesso. Asintoti. Descrizione della strategia da seguire per effettuare lo studio di funzione. Esercizi sullo studio di funzione.

Settimana 11.

Math4U; Incontro n. 9 (17/12/2018). Esercizi di riepilogo sul calcolo delle primitive.

Lezione 37 (17/12/2018 (Battaglia)). Linearità e omogeneità delle primitive. Metodo di integrazione per parti. Teorema di integrazione per sostituzione (prima, seconda e terza forma). Esempi su integrali per parti e su integrali per sostituzione.

Lezione 38 (19/12/2018 (Battaglia)). Integrazione delle funzioni razionali: caso delle radici reali semplici, delle radici reali multiple e delle radici complesse semplici. Integrazione di $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{-1}$. Integrazione delle funzioni razionali: caso delle radici complesse multiple. Integrazione di $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Schema generale di integrazione delle funzioni razionali. Sostituzioni consigliate nei casi: $R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_1/q_1}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_2/q_2} \dots)$, $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, per $a > 0$ e per $a < 0$, $R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)$, $R(\sin x, \cos x)$, $R(e^x)$, $R(\log x)/x$, $R(\tan x)$, $R(a^{\lambda x})$, $R(\sin^\alpha x, \cos^\beta x)$, dove R è una funzione razionale, $x^m(a+bx^n)^p$. Esempi sull'integrazione delle funzioni razionali e sulle sostituzioni consigliate.

Lezione 39 (20/12/2018). Alcuni esercizi di integrazione per sostituzione e con il metodo dei fratti semplici. Euristica sull'integrale di Riemann.

Settimana 12.

Math4U; Incontro n. 10 (07/01/2019). Esercizi sul calcolo delle primitive.

Lezione 40 (07/01/2019). Somme inferiori e somme superiori di una funzione limitata in un intervallo; relazione tra somme superiori e inferiori al variare della suddivisione dell'intervallo. Definizione di Integrale di Riemann. Significato geometrico dell'integrale di Riemann. Proprietà dell'integrale di Riemann. Esempi. Integrale di Riemann e relazione d'ordine. Additività dell'Integrale di Riemann. [no dim fino a qui] Disuguaglianza del valore assoluto. Teorema della media. Condizioni sufficienti di Riemann-integrabilità [no dim].

Lezione 41 (09/01/2019). Definizione di funzione integrale. Una funzione Riemann integrabile ha funzione integrale continua. Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI) e suoi corollari. Formula fondamentale del calcolo integrale. Funzioni integrali composte.

Lezione 42 (10/01/2019). Integrazione definita per parti [no dim]. Integrazione definita per sostituzione (prima e seconda forma) [no dim]. Integrali impropri su insiemi limitati. Il caso di $\int_a^b |t-b|^{-\alpha} dt$, $\alpha > 0$. Criterio del confronto e criterio del confronto asintotico. Esempi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi limitati. Il caso di $\int_0^{1/2} t^{-1}(-\log t)^{-\beta} dt$, $\beta > 0$.

Lezione 43 (11/01/2019). Integrali impropri su insiemi illimitati. Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico per integrali su $[a, +\infty)$. Esempi. Considerazioni sulla convergenza dell'integrale e limite dell'integranda. Esempi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi illimitati. Il caso di $\int_2^{+\infty} t^{-1}(\log t)^{-\beta} dt$, $\beta > 0$. $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt = 0$.

Settimana 13.

Math4U; Incontro n. 11 (14/01/2019). Esercizi sugli integrali di Riemann ed impropri.

Lezione 44 (14/01/2019). Serie Numeriche: carattere di definizione. Serie di Mengoli, serie alternante, serie geometrica. Condizione necessaria di convergenza. Serie armonica. Proprietà delle serie. Serie a termini non negativi.

Lezione 45 (16/01/2019). Criterio del confronto [no dim]. Criterio dell'ordine di infinitesimo [no dim]. Criterio integrale per serie con $a_k \geq 0$, $a_{k+1} \leq a_k$ [no dim]. Serie armonica generalizzata. Serie di termine generale $a_k = k^{-1}(\log k)^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Alcuni esempi. Convergenza assoluta delle serie. Criterio della radice [no dim]. Criterio del rapporto [no dim]. Serie esponenziale. Serie a segni alterni. Criterio di Leibniz per serie a segni alterni [no dim]. Esempi sulla convergenza delle serie.

Lezione 46 (17/01/2019). Esercizi sulle serie. Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine lineari a coefficienti continui.

Lezione 47 (17/01/2019). Equazioni a variabili separabili. Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine lineari a coefficienti costanti: Integrale generale del caso omogeneo. Esempi ed Esercizi.

Lezione 48 (18/01/2019). Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine lineari a coefficienti costanti: Integrale generale del caso non omogeneo con metodo di somiglianza e di sovrapposizione. Esercizi sulle equazioni differenziali.

A FEBBRAIO

Math4U; Incontro n. 12 (05/02/2019, ore 10.00, Aula P300). Incontro previsto tra il primo ed il secondo appello.