

Date d'esame: 23/01/2020 aule P300-Lu3-Lu4 ore 14.30-17.30; 20/02/2020 aule P300-Lu3-Lu4 ore 9.00-12.00; 26/06/2020 aule Lu3-Lu4 ore 9.00-12.00; 18/09/2020 aule Lu3-Lu4 ore 9.00-12.00. **Nota:** A meno che non sia specificato diversamente, si intende che i teoremi, lemmi, proposizioni sotto menzionati siano stati dimostrati a lezione. Si ricorda che ognuna di tali dimostrazioni può essere chiesta all'esame.

ARGOMENTI

SETTIMANA 1.

Lezione 1 (30/09/2019). Generalità sul corso. Prime proprietà dei numeri naturali. L'insieme \mathbb{N} . Somma, prodotto, ordinamento: loro proprietà. Principio di induzione. Esempi di uso del principio di induzione: $\sum_{k=0}^n k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Lezione 2 (01/10/2019). $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ per ogni $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. L'insieme \mathbb{Z} e le sue proprietà. L'insieme \mathbb{Q} e le sue proprietà. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Definizione di fattoriale. Definizione di binomiale. Proprietà del binomiale. Esempi ed Esercizi.

Lezione 3 (03/10/2019). Altre proprietà del binomiale. L'insieme \mathbb{R} . Assioma di separazione. Proprietà di Archimede. Proprietà della parte intera [no dim]. La funzione parte intera: cenni euristici. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ [no dim]. Densità dei razionali nei reali.

Lezione 4 (04/10/2019). Tra due numeri reali distinti esiste sempre almeno un razionale ed un irrazionale.[no dim]. Maggiorante e minorante di un insieme di numeri. Insiemi superiormente (inferiormente) limitati. Definizione di intervallo. Intervalli di \mathbb{R} . Massimo e minimo di un insieme di numeri reali. Estremo superiore e inferiore. Se A sup. (inf.) limitato allora M_A ha minimo (m_A ha massimo).[dim. nella prossima lezione]. Caratterizzazione di $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\inf A \in \mathbb{R}$ [dim. nella prossima lezione]. Esempi.

SETTIMANA 2.

Lezione 5 (07/10/2019; (Benvegnù)). Esercizi su massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore di insiemi reali; tra cui $\sup(A+B)$, $\inf(A+B)$, $\sup(-A)$, $\inf(-A)$, se $a \leq b$ per ogni $a \in A, b \in B$ allora $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Math4U; Incontro n. 1 (08/10/2019). Ripasso delle proprietà delle funzioni elementari. Ripasso su disequazioni trigonometriche, esponenziali, logaritmiche.

Lezione 6 (08/10/2019). Se A sup. (inf.) limitato allora M_A ha minimo (m_A ha massimo) [dimostrazione]. Caratterizzazione di $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\inf A \in \mathbb{R}$ [dimostrazione]. Esempi ed Esercizi. Disuguaglianza di Bernoulli. Binomio di Newton.

Lezione 7 (10/10/2019). Applicazioni. Esempi. Dominio, codominio, immagine e grafico di una applicazione. Suriattività e iniettività. Insieme controimmagine di una applicazione. Grafico di una applicazione; grafico di $f+c$. Somma di applicazioni. Esempi ed Esercizi.

Lezione 8 (11/10/2019). Grafico di $f(x+c)$. Prodotto e rapporto di applicazioni. Elementi di topologia della retta reale: Intorni circolari di punti reali, intorni, intorni di $+\infty$ e di $-\infty$. Punti di accumulazione. Definizione di limite ($x_0, \ell \in \mathbb{R}$). Esempi di come si specializza la definizione di limite nei vari casi. Esempi ed Esercizi.

SETTIMANA 3.

Lezione 9 (Benvegnù) 14/10/2019). Esercizi sui punti di accumulazione e sul calcolo di limiti con la definizione.

Math4U; Incontro n. 2 (15/10/2019). Esercizi sui punti di accumulazione e sul calcolo di limiti con la definizione.

Lezione 10 (15/10/2019). Composizione di applicazioni. Applicazione identica. Applicazione inversa. Proprietà di dominio e immagine dell'applicazione inversa. Grafico dell'applicazione inversa. Vari esempi. Monotonia debole e stretta delle applicazioni.

Lezione 11 (17/10/2019). Monotonia stretta della funzione inversa. Intersezione di un numero infinito di intorni circolari, esempio. Teorema dell'unicità del limite, della permanenza del segno. Teorema del confronto I.

Lezione 12 (18/10/2019). Teorema del confronto II. Teorema delle tre funzioni. Commenti ed esempi del loro utilizzo. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$. Osservazioni su limiti e valore assoluto. La funzione di Dirichlet non ammette limite in 0.

SETTIMANA 4.

Lezione 13 (21/10/2019, (Benvegnù)). Esercizi sui limiti.

Math4U; Incontro n. 3 (22/10/2019). Esercizi sui limiti.

Lezione 14 (22/10/2019). Limite della somma (dimostrato solo il caso reale), del prodotto (non dimostrato), del rapporto (non dimostrato). Descrizione ed esempi dei casi indeterminati del tipo $(-\infty) + (+\infty)$, $0 \cdot \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞ . Limiti dall'alto e dal basso. Limite destro e sinistro.

Lezione 15 (24/10/2019). Esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ se e solo se esistono $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell^+$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell^-$ e $\ell = \ell^+ = \ell^-$ (no dimostrato). Non esistenza del $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$. Limiti di funzioni monotone. Se $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, Se $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$. Se $a > 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = 0$. Se $0 < a < 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$. Euristica sul Teorema sui limiti per sostituzione.

Lezione 16 (25/10/2019). Teorema sui limiti per sostituzione. Esempi: $\lim_{t \rightarrow 0} 2^{1/t^2} = +\infty$. Definizione di successione. L'unico punto di accumulazione di \mathbb{N} è $+\infty$. Esempio di calcolo di limite di una successione con la definizione. Teorema "ponte": $f(x)$ ammette limite ℓ per $x \rightarrow x_0$ se e solo se $f(a_n) \rightarrow \ell$ per $n \rightarrow +\infty$, per ogni a_n successione, $a_n \rightarrow x_0$ [no dim].

SETTIMANA 5.

Lezione 17 (28/10/2019; (Benvegnù)). Dimostrazione che $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$. Esercizi sui limiti. Limiti per sostituzione.

Math4U; Incontro n. 4 (29/10/2019). Esercizi sui limiti. Limiti per sostituzione.

Lezione 18 (29/10/2019). Teorema di convergenza di $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n = e$ ($e \in (2, 3)$), numero di Nepero. Enunciati dei limiti e discussione sulla loro rilevanza (saranno dimostrati in seguito): $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = e$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 1/x)^x = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$. Dimostrazione di $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$.

Lezione 19 (31/10/2019). Dimostrazione dei limiti notevoli: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{1/n} = 1$ ($a > 0$). $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = 1$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n/n! = 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$,

SETTIMANA 6.

Lezione 20 (04/11/2019; (Benvegnù)). Limiti che coinvolgono i limiti notevoli.

Math4U; Incontro n. 5 (05/11/2019). Limiti che coinvolgono i limiti notevoli.

Lezione 21 (05/11/2019). Insiemi simmetrici rispetto allo 0: definizione. Funzioni pari e dispari: definizione e alcuni loro limiti. Dimostrazione dei limiti notevoli: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$. Dimostrazione che $0 < x < \sin x < \tan x$ per ogni $x \in (0, \pi/2)$.

Lezione 22 (07/11/2019). Dimostrazione di: $|\sin x| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \cot x = \cot x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2$. Definizione di continuità di una funzione in un punto ed in un insieme. Esempi di funzioni continue nel loro dominio di definizione: polinomi, $\sin x$, $\cos x$, a^x , $\log_a x$, $\tan x$, $\cot x$. Esercizio sulla continuità di funzioni definite per casi.

Lezione 23 (08/11/2019). Continuità destra e sinistra. Classificazione dei punti di discontinuità. Prolungamento continuo di una funzione. Continuità della somma, del prodotto, del rapporto. Continuità della composta [no dim]. Continuità dell'inversa [no dim]. Esercizio sulla continuità di funzioni definite per casi.

SETTIMANA 7.

Lezione 24 (11/11/2019; (Benvegnù)). Esercizi sulla continuità in un punto di funzioni definite a tratti con parametri, usando limiti notevoli e il teorema di limiti per sostituzione. Limiti di successioni.

Math4U; Incontro n. 6 (12/11/2019). Esercizi sulla continuità.

Lezione 25 (12/11/2019). Definizione di derivata prima. Interpretazione geometrica della derivata, esempi di punti angolosi e cuspidali. Teorema: f derivabile in x_0 implica f continua in x_0 . Non esistenza della derivata in 0 di $|x|$ e $\sqrt{|x|}$. Derivate delle funzioni fondamentali: a^x , e , $\sin x$, $\cos x$, x^n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), x^u ($x > 0, u \in \mathbb{R}$).

Lezione 26 (14/11/2019). Derivata di $\log_a x$, $\log_a |x|$. Derivata di somma, del rapporto e del prodotto.[no dim]. Derivata di $(cf)' = cf'$. Derivata di x^n ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Derivabilità dei polinomi. Teorema del Differenziale e suo "viceversa". Derivabilità della composta. Esempi.

Lezione 27 (15/11/2019). Lezione non tenuta per indisposizione del docente.

SETTIMANA 8.

Lezione 27 (18/11/2019; (Benvegnù)). Derivabilità di funzioni definite per casi. Derivate di x^x , $x^{1/x}$, $\arctan(x) + \arctan(1/x)$, \sin per $x \rightarrow x_0$.

Math4U; Incontro n. 7 (19/11/2019). Derivabilità di funzioni definite per casi.

Lezione 28 (19/11/2019). Derivata dell'inversa [no dim]. Derivata di $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$. Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital e Corollari [prima parte, no dim]. Esempi di uso del teorema di Bernoulli-de l'Hôpital. Corollario del teorema di Bernoulli-de l'Hôpital.

Lezione 29 (21/11/2019). Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital e Corollari [seconda parte, no dim]. Esempi di uso del Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\epsilon \log x$, $\epsilon > 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = 0^-$ per ogni $\alpha > 0$. Infinitesimi dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore per $x \rightarrow x_0$. Infinitesimo fondamentale. Ordine di un infinitesimo. Infinitesimi privi di ordine. Teoremi su somma e prodotto di due infinitesimi. Vari esempi.

Lezione 30 (22/11/2019). Principio di sostituzione degli infinitesimi. Esempi sul principio di sostituzione degli infinitesimi. Definizione di funzione infinita. Infiniti dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore. Ordine di un infinito. Principio di sostituzione degli infiniti. Esempi. Infinito fondamentale. Ordine di un infinito. Infiniti privi di ordine. Gerarchia degli infiniti.

SETTIMANA 9.

Lezione 31 (25/11/2019; (Benvegnù)). $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$; Algebra degli o-piccoli, con esempi. Limiti con i principi di sostituzione degli infinitesimi e degli infiniti.

Math4U; Incontro n. 8 (26/11/2019). Incontro non tenuto su espresso desiderio degli studenti. Verrà recuperato alla fine del corso.

Lezione 32 (26/11/2019). Derivate di ordine superiore al primo. Enunciato della Formula di Taylor con resto di Peano. Il polinomio di Taylor è la migliore approssimazione di una funzione regolare. Formula di Taylor di e^x centrata in $x_0 = 0$; di e^{x^2} ; $\log |1 + x|$. Due limiti svolti con l'uso della formula di Maclaurin.

Lezione 33 (28/11/2019). Formula di Maclaurin di $(1+x)^\alpha$. Un limite svolto con l'uso della formula di Maclaurin. Definizione di punti di estremali e estremi locali (relativi) e globali (assoluti). Teorema di Weierstrass e teorema di Weierstrass generalizzato [no dim].

Lezione 34 (29/11/2019). Teorema degli zeri, e sue generalizzazioni. Teorema dei valori intermedi [no dim]. Condizione necessaria per punti di massimo e minimo locale interno. Teorema di Rolle e Teorema di Lagrange. $f'(x) = 0$ in I se e solo se $f(x) = c$ in I . $f(x)$ debolmente crescente (decrescente) se e solo se $f'(x) \geq 0$ (≤ 0).

SETTIMANA 10.

Lezione 35 (02/12/2019; Benvegnù). Definizioni delle funzioni iperboliche. Formula di Maclaurin di $\arctan x$, $\tan x$, $\tanh x$, $\sinh x$, $\cosh x$, $\sin x$, $\cos x$. Esercizi di calcolo di limiti con la formula di Taylor-Peano.

Math4U; Incontro n. 8 (03/12/2019). Limiti con la formula di Taylor.

Lezione 36 (03/12/2019). Condizioni sufficienti di stretta monotonia. Condizioni sufficienti del primo ordine di massimo e minimo. Condizioni necessarie e sufficienti di massimo e minimo con le derivate di ordine superiore al primo. Criterio delle derivate successive. Definizione e proprietà delle primitive. Definizione di integrale indefinito. Integrali immediati. Esempi su integrali immediati.

Lezione 37 (05/12/2019). Linearità e omogeneità delle primitive. Metodo di integrazione per parti. Teorema di integrazione per sostituzione (prima, seconda e terza forma). Esempi su integrali per parti e su integrali per sostituzione.

Lezione 38 (06/12/2019). Integrazione delle funzioni razionali: caso delle radici reali semplici, delle radici reali multiple e delle radici complesse semplici. Integrazione di $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{-1}$. Integrazione delle funzioni razionali: caso delle radici complesse multiple. Integrazione di $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

SETTIMANA 11.

Lezione 39 (09/12/2019; (Benvegnù)). Schema generale di integrazione delle funzioni razionali. Sostituzioni consigliate nei casi: $R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_1/q_1}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_2/q_2} \dots)$, $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, per $a > 0$ e per $a < 0$, $R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)$, $R(\sin x, \cos x)$, $R(e^x)$, $R(\log x)/x$, $R(\tan x)$, $R(a^{dx})$, $R(\sin^\alpha x, \cos^\beta x)$, dove R è una funzione razionale, $x^m(a + bx^n)^p$.

Math4U; Incontro n. 9 (10/12/2019). Esercizi sui limiti con la formula di Taylor.

Lezione 40 (10/12/2019). Esempi sull'integrazione delle funzioni razionali e sulle sostituzioni consigliate. Sostituzioni consigliate nei casi: $R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)$, $R(\sin x, \cos x)$, $R(\log x)/x$. Somme inferiori e somme superiori di una funzione limitata in un intervallo; relazione tra somme superiori e inferiori al variare della suddivisione dell'intervallo. Definizione di Integrale di Riemann. Significato geometrico dell'integrale di Riemann.

Lezione 41 (12/12/2019). Proprietà dell'integrale di Riemann. Esempi. Integrale di Riemann e relazione d'ordine. Additività dell'Integrale di Riemann. Condizioni sufficienti di Riemann-integrabilità [no dim]. [no dim fino a qui] Teorema della media. Disuguaglianza del valore assoluto. Definizione di funzione integrale. Una funzione Riemann integrabile ha funzione integrale continua. Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI), suoi corollari e Formula fondamentale del calcolo integrale [dim. nella prossima lezione].

Lezione 42 (13/12/2019). Dimostrazione del TFCI e della FFICI. Funzioni integrali composte. Integrazione definita per parti [no dim]. Integrazione definita per sostituzione (prima e seconda forma) [no dim]. Esempi ed esercizi.

SETTIMANA 12.

Lezione 43 (16/12/2019; (Benvegnù)). Esercizi sul calcolo delle primitive e su integrali di Riemann. Funzioni integrali composte: esercizi.

Math4U; Incontro n. 10 (17/12/2019). Funzioni convesse. Criteri di convessità con derivata la prima e seconda [no dim]. Punti di flesso. Asintoti. Descrizione della strategia da seguire per effettuare lo studio di funzione. Esercizi sullo studio di funzione.

Lezione 44 (17/12/2019). Integrali impropri su insiemi limitati. Il caso di $\int_a^b |t - a|^{-\alpha} dt$, $\alpha > 0$. Criterio del confronto e criterio del confronto asintotico. Esempi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi limitati. Il caso di $\int_0^{1/2} t^{-1} (-\log t)^{-\beta} dt$, $\beta > 0$. Esempi.

Lezione 45 (19/12/2019). Integrali impropri su insiemi illimitati. Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico per integrali su $[a, +\infty)$. Esempi. Considerazioni sulla convergenza dell'integrale e limite dell'integranda. Il caso di $\int_2^{+\infty} t^{-1} (\log t)^{-\beta} dt$, $\beta > 0$. Calcolo di $\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt = 0$. Esempi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi illimitati.

Lezione 46 (20/12/2019). Esercizi sugli integrali di Riemann ed impropri.

SETTIMANA 13.

Math4U; Incontro n. 11 (07/01/2020). Esercizi sugli integrali di Riemann ed impropri.

Lezione 47 (07/01/2020). Serie Numeriche: carattere di definizione. serie alternante, serie geometrica. Condizione necessaria di convergenza. Serie armonica. Proprietà delle serie. Serie a termini non negativi. Criterio del confronto [no dim]. Criterio dell'ordine di infinitesimo [no dim]. Criterio integrale per serie con $a_k \geq 0$, $a_{k+1} \leq a_k$ [no dim]. Serie armonica generalizzata. Serie di termine generale $a_k = k^{-1} (\log k)^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Alcuni esempi.

Lezione 48 (09/01/2020). Convergenza assoluta delle serie. Criterio della radice [no dim]. Criterio del rapporto [no dim]. Serie esponenziale. Serie a segni alterni. Criterio di Leibniz per serie a segni alterni [no dim]. Esempi sulla convergenza delle serie.

Lezione 49 (10/01/2020). Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine lineari a coefficienti continui. Equazioni a variabili separabili. Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine lineari a coefficienti costanti: Integrale generale del caso omogeneo. Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine lineari a coefficienti costanti: Integrale generale del caso non omogeneo con metodo di somiglianza. Esempi ed Esercizi.

SETTIMANA 14.

Lezione 50 (13/01/2020; (Benvegnù)). Esercizi sulle serie numeriche.

Math4U; Incontro n. 12 (14/01/2020). Esercizi sulle serie numeriche.

Lezione 51 (14/01/2020). Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine lineari a coefficienti costanti: Integrale generale del caso non omogeneo con metodo di sovrapposizione. Esercizi sulle equazioni differenziali. Esercizi di riepilogo.

Lezione 52 (16/01/2020). Esercizi di riepilogo.