

**Date d'esame:** 25/01/2023 aule P1-P2-P3; 09.00-13.00; 21/02/2023 aule P2-P3-P4; 09.00-13.00; 04/07/2023 aule P1-P2-P3; 09.00-13.00; 12/09/2023 aule P1-P2-P3; 09.00-13.00. **Nota:** A meno che non sia specificato diversamente, si intende che i teoremi, lemmi, proposizioni sotto menzionati siano stati dimostrati a lezione. Si ricorda che ognuna di tali dimostrazioni può essere chiesta all'esame.

## ARGOMENTI

### SETTIMANA 1.

**Lezione 1 (03/10/2022).** Generalità sul corso. Prime proprietà dei numeri naturali. L'insieme  $\mathbb{N}$ . Somma, prodotto, ordinamento: loro proprietà. Principio di induzione. Esempi di uso del principio di induzione:  $\sum_{k=0}^n k = \frac{k(k+1)}{2}$ .

**Lezione 2 (04/10/2022).**  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  per ogni  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . L'insieme  $\mathbb{Z}$  e le sue proprietà. L'insieme  $\mathbb{Q}$  e le sue proprietà.  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Definizione di fattoriale. Definizione di binomiale. Proprietà del binomiale. Altre proprietà del binomiale. Esempi ed esercizi.

**Lezione 3 (06/10/2022).** L'insieme  $\mathbb{R}$ . Assioma di separazione. Proprietà di Archimede. Proprietà della parte intera [no dim]. La funzione parte intera: cenni euristici.  $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  [no dim]. Densità dei razionali nei reali. Tra due numeri reali distinti esiste sempre almeno un razionale ed un irrazionale.[no dim]. Maggiorante e minorante di un insieme di numeri. Insiemi superiormente (inferiormente) limitati. Definizione di intervallo. Intervalli di  $\mathbb{R}$ .

**Lezione 4 (07/10/2022).** Massimo e minimo di un insieme di numeri reali. Estremo superiore e inferiore. Se  $A$  sup. (inf.) limitato allora  $M_A$  ha minimo ( $m_A$  ha massimo). Caratterizzazione di  $\sup A \in \mathbb{R}$  e  $\inf A \in \mathbb{R}$ . Esempi ed esercizi.

### SETTIMANA 2.

**Lezione 1 (Fusco) (10/10/2022).** Esercizi su massimo/minimo/estremo superiore/estremo inferiore di insiemi reali tra cui:  $\sup(A+B)$ ,  $\sup(-A)$ ,  $\sup(A) \leq \inf(B)$  se  $a \leq b$  per ogni  $a \in A$  e  $b \in B$ . Esercizi sul principio di induzione:  $n! > 2^n$  per ogni naturale  $n \geq 4$ ,  $n! \geq n^2$  per ogni naturale  $n \geq 4$ .

**Lezione 5 (11/10/2022).** Disuguaglianza di Bernoulli. Binomio di Newton. Applicazioni. Esempi. Dominio, codominio, immagine, controimmagine di una applicazione.

**Lezione 6 (13/10/2022).** Suriattività e iniettività. Grafico di una applicazione; grafico di  $f+c$ . Somma di applicazioni. Grafico di  $f(x+c)$ . Prodotto e rapporto di applicazioni. Esempi ed esercizi. Elementi di topologia della retta reale: Intorni circolari di punti reali, intorni, intorni di  $+\infty$  e di  $-\infty$ . Punti di accumulazione: definizione per  $(x_0, \ell \in \mathbb{R})$ .

**Lezione 7 (14/10/2022).** Punti di accumulazione: definizione per  $(x_0, \ell \in \widetilde{\mathbb{R}})$ . Definizione di limite  $(x_0, \ell \in \widetilde{\mathbb{R}})$ . Esempi di come si specializza la definizione di limite nei vari casi. Esempi ed esercizi. Composizione di applicazioni.

**Math4U (Alessi) Incontro n. 1 (14/10/2022).** Ripasso delle proprietà delle funzioni elementari. Esercizi sull'estremo superiore e inferiore con la definizione ed esercizi sul principio di induzione.

### SETTIMANA 3.

**Lezione 2 (Fusco) (17/10/2022).** Esercizi sui punti di accumulazione e sul calcolo di limiti con la definizione. In particolare:  $\lim_{x \rightarrow -4} -2/(x+4)^2 = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-1)/(x+2) = 3$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} -1/(e^{\frac{1}{x^2}}) = 0$ .

**Lezione 8 (18/10/2022).** Applicazione identica. Applicazione inversa. Proprietà di dominio e immagine dell'applicazione inversa. Grafico dell'applicazione inversa. Vari esempi. Monotonia debole e stretta delle applicazioni. Monotonia stretta della funzione inversa. L'intersezione di un numero finito di intorni circolari è un intorno circolare. Intersezione di un numero infinito di intorni circolari, esempio.

**Lezione 9 (20/10/2022).** Teorema dell'unicità del limite, della permanenza del segno. Teorema del confronto I. Teorema del confronto II. Teorema delle tre funzioni. Commenti ed esempi del loro utilizzo.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$ .

**Lezione 10 (21/10/2022).**  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$ . Osservazioni su limiti e valore assoluto. La funzione di Dirichlet non ammette limite in 0. Limite della somma (dimostrato solo il caso reale), del prodotto (non dimostrato), del rapporto (non dimostrato) [prima parte]. Descrizione ed esempi dei casi indeterminati del tipo  $(-\infty) + (+\infty)$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ .

**Math4U (Alessi) Incontro n. 2 (21/10/2022).** Esercizi sui punti di accumulazione e sul calcolo di limiti con la definizione.

SETTIMANA 4.

**Lezione 3 (Fusco) (24/10/2022).** Limite del rapporto di polinomi. Esercizi che usano razionalizzazioni, scomposizioni di trinomi di secondo grado e somme/differenze di due cubi. Esercizi che utilizzano il limite notevole  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ .

**Lezione 11 (25/10/2022).** Limite del rapporto (non dimostrato) [Seconda parte]. Ulteriori casi indeterminati del tipo  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ . Limiti dall'alto e dal basso. Limite destro e sinistro. Esiste  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  se e solo se esistono  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell^+$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell^-$  e  $\ell = \ell^+ = \ell^-$ . Non esistenza del  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$ . Limiti di funzioni monotone. Se  $a > 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ .

**Lezione 12 (27/10/2022).** Se  $0 < a < 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ . Se  $a > 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = 0$ . Se  $0 < a < 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$ . Teorema sui limiti per sostituzione. Esempi:  $\lim_{t \rightarrow 0} 2^{1/t^2} = +\infty$ . Definizione di successione. L'unico punto di accumulazione di  $\mathbb{N}$  è  $+\infty$ . Esempio di calcolo di limite di una successione con la definizione. Teorema "ponte":  $f(x)$  ammette limite  $\ell$  per  $x \rightarrow x_0$  se e solo se  $f(a_n) \rightarrow \ell$  per  $n \rightarrow +\infty$ , per ogni  $a_n$  successione,  $a_n \rightarrow x_0$  [no dim].

**Lezione 13 (28/10/2022).** Teorema di convergenza di  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n = e$  ( $e \in (2, 3)$ , numero di Nepero) [no dim]. Enunciati dei limiti e discussione sulla loro rilevanza (saranno dimostrati in seguito):  $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 1/x)^x = e$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + 1/x)^x = e$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$ . Dimostrazione dei limiti notevoli:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1/n! = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{1/n} = 1$  ( $a > 0$ ),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n/n! = 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**Math4U (Alessi) Incontro n. 3 (28/10/2022).** Esercizi sui limiti.

SETTIMANA 5.

**Lezione 14 (03/11/2022).** Dimostrazione di:  $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$ . Insiemi simmetrici rispetto allo 0: definizione. Funzioni pari e dispari: definizione e alcuni loro limiti. Dimostrazione dei limiti notevoli:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$ , [dim. nella prossima lezione]  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{a-1}}{x} = a$ .

**Lezione 15 (04/11/2022).** Dimostrazione dei limiti notevoli:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$ . Dimostrazione che  $0 < x < \sin x < \tan x$  per ogni  $x \in (0, \pi/2)$ . Dimostrazione di:  $|\sin x| \leq |x|$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \cot x = \cot x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ .

**Math4U (Alessi) Incontro n. 4 (04/11/2022).** Esercizi sui limiti usando i limiti notevoli.

SETTIMANA 6.

**Lezione 4 (Fusco) (07/11/2022).** Esercizi che fanno uso dei limiti notevoli e del teorema di sostituzione. Esercizi che fanno uso del teorema delle tre funzioni. Dimostrazione che  $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ .

**Lezione 16 (08/11/2022).** Definizione di continuità di una funzione in un punto ed in un insieme. Esempi di funzioni continue nel loro dominio di definizione: polinomi,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $a^x$ ,  $\log_a x$ ,  $\tan x$ ,  $\cot x$ . Continuità destra e sinistra. Classificazione dei punti di discontinuità. Prolungamento continuo di una funzione. Continuità della

somma, del prodotto, del rapporto. Continuità della composta. Esercizio sulla continuità di funzioni definite per casi.

**Lezione 17 (10/11/2022).** Continuità dell'inversa [no dim]. Definizione di derivata prima. Interpretazione geometrica della derivata, esempi di punti angolosi e cuspidali. Non esistenza della derivata in 0 di  $|x|$  e  $\sqrt{|x|}$ . Teorema:  $f$  derivabile in  $x_0$  implica  $f$  continua in  $x_0$ . Derivate delle funzioni fondamentali:  $a^x$ ,  $c$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $x^n$  ( $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ),  $x^u$  ( $x > 0$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ).

**Lezione 18 (11/11/2022).** Derivata di  $\log_a x$ ,  $\log |x|$ . Derivata di somma, del rapporto e del prodotto [dim solo prodotto]. Derivata di  $(cf)' = cf'$ . Derivata di  $x^n$  ( $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ). Linearità della derivazione. Derivabilità dei polinomi. Teorema del Differenziale di Lagrange e suo "viceversa". Derivabilità della composta. Esempi.

**Math4U (Alessi) Incontro n. 5 (11/11/2022).** Ultimi esercizi sui limiti notevoli, ed esercizi sulla continuità per funzioni definite per casi.

SETTIMANA 7.

**Lezione 5 (Fusco) (14/11/2022).** Esercizi su continuità e derivabilità di funzioni definite a tratti.

**Lezione 19 (15/11/2022).** Derivata dell'inversa [no dim]. Derivata di  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctan x$ . Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital e Corollari [prima parte, no dim]. Esempi di uso del teorema di Bernoulli-de l'Hôpital. Corollario del teorema di Bernoulli-de l'Hôpital.

**Lezione 20 (17/11/2022).** Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital e Corollari [seconda parte, no dim]. Esempi di uso del Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\epsilon \log x$ ,  $\epsilon > 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = 0^-$  per ogni  $\alpha > 0$ . Infinitesimi dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore per  $x \rightarrow x_0$ .

**Lezione 21 (18/11/2022).** Infinitesimo fondamentale. Ordine di un infinitesimo. Infinitesimi privi di ordine. Teoremi su somma e prodotto di due infinitesimi. Vari esempi. Principio di sostituzione degli infinitesimi. Esempi sul principio di sostituzione degli infinitesimi di ordine superiore. Ordine di infinitesimo del prodotto; ordine di infinitesimo della somma.

**Math4U (Alessi) Incontro n. 6 (18/11/2022).** Esercizi sulla derivabilità.

SETTIMANA 8.

**Lezione 6 (Fusco) (21/11/2022).** Algebra degli o-piccolo (con dimostrazione ed esempi), limiti che usano il principio di sostituzione degli infinitesimi di ordine superiore, derivate di  $x^x$  e  $x^{(1/x)}$ . In particolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)-x}{x^2} = -1/2$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - x^2/2}{x^3} = 1/6$ . Limiti con principio di sostituzione degli infinitesimi:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)+5x^3}{\sin(6x)+x^2}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x-\cos x}{(\sin x)^2+\sqrt{x}}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)-\sin x}{x^2+x^5}$ .

**Lezione 22 (22/11/2022).** Definizione di funzione infinita. Infiniti dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore. Ordine di un infinito. Principio di sostituzione degli infiniti. Esempi. Infinito fondamentale. Ordine di un infinito. Infiniti privi di ordine. Gerarchia degli infiniti per le funzioni e per le successioni. Formula di Stirling per il comportamento asintotico di  $n!$  ed un esempio del suo uso. Derivate di ordine superiore al primo. Formula di Taylor con resto di Peano [no dim]. Il polinomio di Taylor è la migliore approssimazione di una funzione regolare ["viceversa" della formula di Taylor; no dim]. Formula di Taylor di  $e^x$  centrata in  $x_0 = 0$ .

**Lezione 23 (24/11/2022).** Formula di Taylor di  $e^{x^2}$ ;  $\log |1+x|$ . Due limiti svolti con l'uso della formula di Maclaurin. Formula di Maclaurin di  $(1+x)^\alpha$ ,  $\sin x$ . Binomiale generalizzato

**Lezione 24 (25/11/2022).** Formula di Maclaurin di  $\cos x$ . Osservazioni sul fatto che per  $\sin x$ ,  $\cos x$  il termine d'errore nelle loro Formula di Maclaurin è più preciso di quanto atteso. Definizione di punti di estremali e estremi locali (relativi) e globali (assoluti). Esistenza della successione minimizzante e massimizzante.[no dim] Definizione di sottosuccessione.

**Math4U (Alessi) Incontro n. 7 (25/11/2022).** Esercizi su limiti con il principio di sostituzione degli infinitesimi/infiniti.

SETTIMANA 9.

**Lezione 7 (Fusco) (28/11/2022).** Introduzione alle funzioni iperboliche: definizione, derivate, uguaglianza fondamentale e formule di Taylor in 0. Definizione di bifattoriale e formule di Taylor in 0 di  $(1+x)^{1/2}$ ,  $(1+x)^{-1/2}$ ,  $(1+x)^{-1}$ . Esercizi con formule di Taylor che fanno uso anche di formule di funzioni composte.

**Lezione 25 (29/11/2022).**  $a_n \rightarrow \lambda$  per  $n \rightarrow \infty$  se e solo se per ogni sottosuccessione  $a_{n_k}$  si ha che  $a_{n_k} \rightarrow \lambda$  per  $k \rightarrow \infty$ . [no dim].  $a_n \rightarrow \lambda$  per  $n \rightarrow \infty$  se e solo se  $a_{2k} \rightarrow \lambda$  per  $k \rightarrow \infty$  e  $a_{2k+1} \rightarrow \lambda$  per  $k \rightarrow \infty$ . [no dim]. Teorema di Bolzano-Weierstrass [no dim]. Teorema di Weierstrass [dim] e teorema di Weierstrass generalizzato [no dim]. Teorema degli zeri, e sue generalizzazioni.

**Lezione 26 (01/12/2022).** Teorema dei valori intermedi [no dim]. Condizione necessaria per punti di massimo e minimo locale interno. Teorema di Rolle e Teorema di Lagrange.  $f'(x) = 0$  in  $I$  se e solo se  $f(x) = c$  in  $I$ .  $f(x)$  debolmente crescente (decrescente) se e solo se  $f'(x) \geq 0$  ( $\leq 0$ ).

**Lezione 27 (02/12/2022).** Condizioni sufficienti di stretta monotonia. Condizioni sufficienti del primo ordine di massimo e minimo. Condizioni necessarie e sufficienti di massimo e minimo con le derivate di ordine superiore al primo. Criterio delle derivate successive. Descrizione della strategia da seguire per effettuare lo studio di funzione. Definizione e proprietà delle primitive. Definizione di integrale indefinito. Integrali immediati. Esempi su integrali immediati.

**Math4U (Alessi) Incontro n. 8 (02/12/2022).** Esercizi sui limiti con la formula di Taylor.

SETTIMANA 10.

**Lezione 8 (Fusco) (05/12/2022).** Definizione di convessità/concavità. Una funzione convessa è continua (no dim.). Condizioni di convessità del primo e secondo ordine (no dim.). Punti di flesso con associata condizione necessaria per funzioni derivabili due volte (con esempi). Asintoti verticali, orizzontali ed obliqui (con esempi). Studio della funzione  $e^{\frac{x-1}{2-x}}$ .

**Lezione 28 (06/12/2022).** Funzioni periodiche. Linearità e omogeneità delle primitive. Metodo di integrazione per parti. Teorema di integrazione per sostituzione (prima, seconda). Esempi su integrali per parti e su integrali per sostituzione.

SETTIMANA 11.

**Lezione 9 (Fusco) (12/12/2022).** Integrali di funzioni razionali. Teorema fondamentale dell'algebra e scomposizione di un polinomio a coefficienti reali in prodotto di polinomi di grado  $\leq 2$ . Scomposizione di un rapporto  $\frac{p(x)}{q(x)}$  come somma di frazioni algebriche con a denominatore i termini della scomposizione di  $q(x)$  (con esempi). Metodo del completamento del quadrato. Caso delle radici reali semplici, delle radici reali multiple, delle radici complesse semplici, delle radici complesse multiple. Calcolo esplicito dell'integrale di ciascuno dei termini della precedente scomposizione (con esempi). In particolare: Integrazione di  $[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{-1}$ , integrazione di  $[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{-m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ .

**Lezione 29 (13/12/2022).** Teorema di integrazione per sostituzione (terza forma) [no dim]. Calcolo delle primitive di  $\sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $a > 0$ . Ulteriore esempio di calcolo di primitive nel caso di radici complesse multiple. Alcuni testi di esercizi su primitive per sostituzione (consigliati con commento). Sostituzioni consigliate nei casi:  $R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_1/q_1}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_2/q_2} \dots)$ ,  $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ , per  $a > 0$ ,  $R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)$ ,  $R(\sin x, \cos x)$ ,  $R(e^x)$ ,  $R(\log x)/x$ , Esempi sull'integrazione delle funzioni razionali e sulle sostituzioni consigliate.

**Lezione 30 (15/12/2022).** Sostituzioni consigliate nei casi:  $R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)$ ,  $R(\sin x, \cos x)$ ,  $R(\log x)/x$ ; con esempi relativi. Somme inferiori e somme superiori di una funzione limitata in un intervallo; relazione tra somme superiori e inferiori al variare della suddivisione dell'intervallo. Definizione di Integrale di Riemann. Significato geometrico dell'integrale di Riemann. Proprietà dell'integrale di Riemann. Esempi. Integrale di Rie-

mann e relazione d'ordine. Additività dell'Integrale di Riemann. Condizioni sufficienti di Riemann-integrabilità [no dim].

**Lezione 31 (16/12/2022).** Teorema del valor medio integrale. Disuguaglianza del valore assoluto. Definizione di funzione integrale. Una funzione Riemann integrabile ha funzione integrale continua [no dim]. Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI), suoi corollari [no dim]. Formula fondamentale del calcolo integrale. Funzioni integrali composte. Esempi ed esercizi.

**Math4U (Alessi) Incontro n. 9 (16/12/2022).** Studio di una funzione esponenziale con valore assoluto. Calcolo di primitive con uso dei teoremi di sostituzione e integrazione di funzioni fratte.

SETTIMANA 12.

**Lezione 10 (Fusco) (19/12/2022).** Esercizi con integrali definiti ed indefiniti (integrali per parti, integrali con formule parametriche per seno e coseno, integrali di funzioni razionali). Sostituzione di Eulero per  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$  nel caso  $a < 0$  e  $\Delta > 0$ , dove  $R(\cdot, \cdot)$  è funzione razionale (con esercizio). Calcolo di polinomio di Taylor di funzione integrale con agli estremi di integrazione funzioni differenziabili.

**Lezione 32 (20/12/2022).** Integrazione definita per parti [no dim]. Integrazione definita per sostituzione (prima e seconda forma) [no dim]. Integrali impropri su insiemi limitati. Il caso di  $\int_a^b |t - a|^{-\alpha} dt$ ,  $\alpha > 0$ . Criterio del confronto e criterio del confronto asintotico. Il caso di  $\int_0^{1/2} t^{-1} (-\log t)^{-\beta} dt$ ,  $\beta > 0$ . Esempi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi limitati.

**Lezione 33 (22/12/2022).** Integrali impropri su insiemi illimitati. Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico per integrali su  $[a, +\infty)$ . Esempi. Considerazioni sulla convergenza dell'integrale e limite dell'integranda. Il caso di  $\int_2^{+\infty} t^{-1} (\log t)^{-\beta} dt$ ,  $\beta > 0$ . Calcolo di  $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt = 0$ . Esempi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi illimitati.

SETTIMANA 13.

**Lezione 11 (Fusco) (09/01/2023).** Esercizi su integrali impropri. Studio della convergenza e calcolo di  $\int_0^2 \frac{x+2}{\sqrt{4-x^2}} dx$ . Studio della convergenza di  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^a \sqrt{x^2-4}} dx$  al variare di  $a \in \mathbb{R}$ . Studio della convergenza di  $\int_0^1 \frac{e^x - e^{\sin x} - \frac{x^3}{6}}{x^a} dx$  al variare di  $a \in \mathbb{R}$ . Studio della convergenza di  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(1/x)}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})} dx$ .

**Lezione 34 (10/01/2023).** Serie Numeriche: carattere di definizione. Serie di Mengoli, serie alternante, serie geometrica. Condizione necessaria di convergenza. La serie armonica diverge [no dim]. Proprietà delle serie [no dim]. Serie a termini non negativi: Criterio del confronto [no dim]. Criterio dell'ordine di infinitesimo [no dim]. Criterio integrale per serie con  $a_k \geq 0$ ,  $a_{k+1} \leq a_k$  [no dim]. Alcuni esempi.

**Lezione 35 (12/01/2023).** Serie armonica generalizzata. Serie di termine generale  $a_k = k^{-1}(\log k)^{-\gamma}$ ,  $\gamma > 0$ . Convergenza assoluta delle serie. Criterio della radice [no dim]. Criterio del rapporto [no dim]. Serie esponenziale. Serie a segni alterni. Criterio di Leibniz per serie a segni alterni [no dim]. Esempi sulla convergenza delle serie. (criterio del confronto, radice, rapporto, ordine di infinitesimo, serie geometrica).

**Lezione 36 (13/01/2023).** Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine lineari a coefficienti continui. Equazioni differenziali a variabili separabili. Esempi ed esercizi.

**Math4U (Alessi) Incontro n. 10 (13/01/2023).** Esercizi su convergenza di integrali impropri con parametro alpha e convergenza serie numeriche.

SETTIMANA 14.

**Math4U (Alessi) Incontro n. 11 (16/01/2023).** Esercizi di riepilogo.

**Lezione 12 (Fusco) (16/01/2023).** Esercizi sulla convergenza e divergenza di serie numeriche che utilizzano il principio del rapporto, della radice  $n$ -esima. Studio della convergenza di serie dipendenti da parametro tramite sviluppi di Taylor e teorema del confronto.

**Lezione Suppletiva 1 (17/01/2023).** Esercizi di riepilogo.

**Lezione Suppletiva 2 (19/01/2023).** Esercizi di riepilogo.

**Math4U (Alessi) Incontro n. 12 (19/01/2023).** Esercizi di riepilogo.

---