Date d'esame: 20/01/2025 ore 09.00-13.30; 10/02/2025 ore 09.00-13.30; 30/06/2025 ore 09.00-13.30; 08/09/2025 ore 09.00-13.30. Le aule saranno comunicate sulla pagina MOODLE del corso.
Nota: A meno che non sia specificato diversamente, si intende che i teoremi, lemmi, proposizioni sotto menzionati siano stati dimostrati a lezione. Si ricorda che ognuna di tali dimostrazioni può essere chiesta all'esame.

Argomenti

Settimana 1.

Lezione 1 (01/10/2024). Generalità sul corso. Prime proprietà dei numeri naturali. L'insieme $\mathbb{N}$. Somma, prodotto, ordinamento: loro proprietà. Principio di induzione. Esempi di uso del principio di induzione: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Lezione 2 (02/10/2024). $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ per ogni $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. L'insieme $\mathbb{Z}$ e le sue proprietà. L'insieme $\mathbb{Q}$ e le sue proprietà. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Definizione di fattoriale. Definizione di binomiale. Proprietà del binomiale. Esempi ed esercizi.

Lezione 3 (03/10/2024). Altre proprietà del binomiale. L'insieme $\mathbb{R}$. Assioma di separazione. Proprietà di Archimede. Proprietà della parte intera [no dim]. La funzione parte intera: cenni euristici. $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ [no dim]. Densità dei razionali nei reali. Tra due numeri reali distinti esiste sempre almeno un razionale ed un irrazionale.[no dim]. Maggiorante e minorante di un insieme di numeri. Insiemi superiormente (inferiormente) limitati. Definizione di intervallo. Intervalli di $\mathbb{R}$.

Lezione 4 (04/10/2024). **La lezione odierna non è stata effettuata per inadeguatezza dell'aula P2-Paolotti. I contenuti verranno recuperati la settimana prossima. Le ore di lezioni verranno recuperate in data da decidere.**

Settimana 2.

Lezione 4 (08/10/2024). Massimo e minimo di un insieme di numeri reali. Estremo superiore e inferiore. Se A sup. (inf.) limitato allora M_A ha minimo (m_A ha massimo). Caratterizzazione di $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\inf A \in \mathbb{R}$. Esempi ed esercizi. Disuguaglianza di Bernoulli. Binomio di Newton (prima parte della dimostrazione).

Lezione 5 (09/10/2024). Binomio di Newton (seconda parte della dimostrazione). Esercizi sul principio di induzione: $n! > 2^n$ per ogni naturale $n \geq 4$, $n! \geq n^2$ per ogni naturale $n \geq 4$. Esercizi su massimo / minimo / estremo superiore / estremo inferiore di insiemi reali tra cui: se $A \subseteq B$ allora $\inf(A) \geq \inf(B)$ e $\sup A \leq \sup(B)$; $\sup(-A) = -\inf(A)$ e $\inf(-A) = -\sup(A)$.

Lezione 6 (10/10/2024). Esercizi su massimo / minimo / estremo superiore / estremo inferiore di insiemi reali tra cui: $\sup(A + B)$, $\sup(A) \leq \inf(B)$ se $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$. Applicazioni. Esempi. Dominio, codominio, immagine, controimmagine di una applicazione. Suriettività di un'applicazione.

Lezione 7 (11/10/2024). Iniettività di un'applicazione. Grafico di una applicazione; grafico di $f + c$. Somma di applicazioni. Grafico di $f(x + c)$. Prodotto e rapporto di applicazioni. Esempi. Elementi di topologia della retta reale: Intorni circolari di punti reali, intorni, intorni di $+\infty$ e di $-\infty$.

Math4U (Tonello) Incontro n. 1 (11/10/2024). Esercizi sull'estremo superiore e inferiore di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$: in particolare: determinare sup, inf di $\{40n/(64 + n^2) : n \in \mathbb{N}\}$ e di $\{|x|^7 - x^8 : x \in \mathbb{R}\}$.

Settimana 3.

Lezione 8 (15/10/2024). Punti di accumulazione: definizione per ($x_0, \ell \in \mathbb{R}$). Punti di accumulazione: definizione per ($x_0, \ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$). Esempi sui punti di accumulazione. Definizione di limite ($x_0, \ell \in \widetilde{\mathbb{R}}$). Esempi di come si specializza la definizione di limite nei vari casi.

Lezione 9 (16/10/2024). Esercizi sui punti di accumulazione e sul calcolo di limiti con la definizione. In particolare: $\lim_{x\to-4} -2/(x + 4)^2 = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} (3x - 1)/(x + 2) = 3$; $\lim_{x\to0} -1/(e^{\frac{1}{x^2}}) = 0$.

Lezione 10 (17/10/2024). Composizione di applicazioni. Applicazione identica. Applicazione inversa. Proprietà di dominio e immagine dell'applicazione inversa. Grafico dell'applicazione inversa. Vari esempi.

Lezione 11 (18/10/2024). Monotònia debole e stretta delle applicazioni. Monotònia stretta della funzione inversa [no dim]. Monotònia di $-f$, e di cf, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Monotònia di $f+g$. L'intersezione di un numero finito di intorni circolari $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ è un intorno circolare di x_0. Esempio sul fatto che l'intersezione di un numero infinito di intorni circolari possa non essere un intorno di $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Teorema dell'unicità del limite.

Math4U (Tonello) Incontro n. 2 (18/10/2024). Discussione su alcuni quesiti posti dagli studenti; in particolare sui punti di accumulazione. Inoltre sono stati svolti i seguenti esercizi: studio della funzione $\sqrt{1-x^2}$; risoluzione di $\cos(2t)+\sin(t) \leq 0$; risoluzione di $\log_2(e^x) \leq 1$; provare che $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Settimana 4.

Lezione 12 (22/10/2024). Teorema della permanenza del segno, Teorema della limitatezza locale (commenti, esempi). Teorema del confronto I. Teorema del confronto II [no dim]. Teorema delle tre funzioni. Commenti sul ruolo delle loro ipotesi ed esempi del loro utilizzo. $\lim_{x\to+\infty} x+\sin x = +\infty$. $\lim_{x\to-\infty} x+\sin x = -\infty$.

Lezione 13 (23/10/2024). $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$. Osservazioni su limiti e valore assoluto. La funzione di Dirichlet non ammette limite in 0. Limite della somma (dimostrato solo il caso reale). Commenti e discussione sui casi indeterminati del tipo $(-\infty)+(+\infty)$. Limite della somma in cui un addendo è localmente limitato e l'altro tende a $+\infty$ o a $-\infty$.

Lezione 14 (24/10/2024). Limite del prodotto (non dimostrato), del rapporto (non dimostrato). Descrizione ed esempi dei casi indeterminati del tipo $0\cdot\infty$, $0/0$, ∞/∞. Limiti dall'alto e dal basso. Limite destro e sinistro. Esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se esistono $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell^+$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell^-$ e $\ell = \ell^+ = \ell^-$. Non esistenza del $\lim_{x\to 0} 1/x$. Limiti di funzioni monotòne [enunciato].

Lezione 15 (25/10/2024). Limiti di funzioni monotòne [dimostrazione]. Se $a>1$, $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0^+$, $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$. Se $0<a<1$, $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0^+$, $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$. Teorema sui limiti per sostituzione [enunciato e discussione delle ipotesi]

Math4U (Tonello) Incontro n. 3 (25/10/2024). Esistenza ed eventuale calcolo dei seguenti limiti (verificando prima che il punto limite sia di accumulazione per $\mathcal{D}(f)$: $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3-x}$, $\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x^2-a^2}$ $(a\in\mathbb{R})$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$, $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})$, $\lim_{x\to+\infty}(\lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor)$, $\lim_{x\to+\infty} x\sin x$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}\sin x$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+3x^2-x}{x^3+e^{2x}+1}$, $\lim_{x\to+\infty} x+\sin x$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\tan(2x)}{\sin x}$. Discussione su alcuni quesiti posti dagli studenti.

Settimana 5.

Lezione 16 (29/10/2024). Esempi: $\lim_{t\to 0} 2^{1/t^2} = +\infty$.

Definizione di successione. L'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$ è $+\infty$. Esempio di calcolo di limite di una successione con la definizione. Teorema "ponte": $f(x)$ ammette limite ℓ per $x\to x_0$ se e solo se $f(a_n)\to\ell$ per $n\to+\infty$, per ogni $a_n\neq x_0$ successione, $a_n\to x_0$ [no dim]. Dimostrazione che $\nexists \lim_{x\to+\infty}\sin x$. Teorema di convergenza di $\lim_{n\to+\infty}(1+1/n)^n = e$ ($e\in(2,3)$, numero di Napier) [no dim]. Enunciati dei limiti e discussione sulla loro rilevanza (saranno dimostrati in seguito): $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, $\lim_{x\to x_0}\log_a x = \log_a x_0$, $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = e$, $\lim_{x\to-\infty}(1+1/x)^x = e$, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$. Dimostrazione dei limiti notevoli: $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a$.

Lezione 17 (30/10/2024). Dimostrazione dei limiti notevoli: $\lim_{n\to+\infty} 1/n! = 0$, $\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1$ $(a>0)$, $\lim_{n\to+\infty} n^{1/n} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} a^n/n! = 0$, $a\in\mathbb{R}$. $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$ per ogni $x_0\in\mathbb{R}$, $a>0$.

Lezione 18 (31/10/2024). Dimostrazione di: $\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$ per ogni $x_0 > 0, a > 0, a \neq 1$. Insiemi simmetrici rispetto allo 0: definizione. Funzioni pari e dispari: definizione Relazione tra il limite per $x \to 0^+$ e per $x \to 0^-$ di funzioni pari e di funzioni dispari. Limiti per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ di $f(x)/x$ e di $f(x) - mx$ con funzioni f pari o dispari. Dimostrazione dei limiti notevoli: $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = \lim_{x\to-\infty}(1+1/x)^x = e$.

Settimana 6.

Lezione 19 (05/11/2024). Dimostrazione che $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$. Dimostrazione che $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Esercizi che fanno uso dei limiti notevoli e del teorema di sostituzione. Esercizi che fanno uso del teorema delle tre funzioni.

Lezione 20 (06/11/2024). Esercizi che fanno uso dei limiti notevoli e del teorema di sostituzione. Esercizi che fanno uso del teorema delle tre funzioni. Dimostrazione che $0 < x < \sin x < \tan x$ per ogni $x \in (0, \pi/2)$. Dimostrazione di: $|\sin x| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e di $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Dimostrazione di: $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$, $\lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0$, $\lim_{x\to x_0} \cot x = \cot x_0$, $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Definizione di continuità di una funzione in un punto ed in un insieme. Esempi di funzioni continue nel loro dominio di definizione: polinomi, $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\log_a x$, $\tan x$, $\cot x$.

Lezione 21 (07/11/2024). Continuità destra e sinistra. Classificazione dei punti di discontinuità. Prolungamento continuo di una funzione. Continuità della somma, del prodotto, del rapporto. Continuità della composta. Esercizio sulla continuità di funzioni definite per casi. Continuità dell'inversa [no dim]. Definizione di derivata prima. Interpretazione geometrica della derivata. Teorema: f derivabile in x_0 implica f continua in x_0.

Lezione 22 (08/11/2024). Non esistenza della derivata in 0 di $|x|$ e $\sqrt{|x|}$. Definizione ed esempi di punti angolosi e cuspidali. Derivate delle funzioni fondamentali: a^x, c, $\sin x$, $\cos x$, x^n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), x^u ($x > 0, u \in \mathbb{R}$), $\log_a x$, $\log|x|$. Derivata di somma, del rapporto e del prodotto [dim solo prodotto]. Derivata di $(cf)' = cf'$. Derivata di x^n ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Linearità della derivazione. Derivabilità dei polinomi.

Math4U (Tonello) Incontro n. 4 (08/11/2024). Esercizi sui limiti usando i limiti notevoli.

Settimana 7.

Lezione 23 (12/11/2024). Teorema del Differenziale di Lagrange e suo "viceversa". Derivabilità della composta. Esempi. Derivata dell'inversa [no dim]. Derivata di $\arcsin x$.

Lezione 24 (13/11/2024). Derivata di $\arccos x$, $\arctan x$, $\log x$, $x^{1/n}$, x^α con dominio esteso al punto 0. Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital e Corollari [prima parte, no dim]. Discussione sull'uso errato del teorema di Bernoulli-de l'Hôpital. Esempi di uso del teorema di Bernoulli-de l'Hôpital: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{2x+\sin x}$. Corollario del teorema di Bernoulli-de l'Hôpital sull'esistenza della limite del rapporto incrementale in $x_0 \in \mathbb{R}$. Esempi di uso del Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital: $\lim_{x\to 0^+} x^\epsilon \log x = 0^-$ per ogni $\epsilon > 0$.

Lezione 25 (14/11/2024). I primi dieci minuti dell'orario di lezione sono stati utilizzati da candidati degli studenti al Senato, all'ESU e al ccs per segnalare le elezioni stesse. L'intervento NON è stato preannunciato da alcuna comunicazione in merito degli uffici preposti. Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital e Corollari [seconda parte, no dim]. Esempi di uso del Teorema di Bernoulli-de l'Hôpital: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$ per ogni $\alpha > 0$. Funzioni infinitesime. Infinitesimi dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore per $x \to x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Notazione o-piccolo per $x \to x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Funzioni asintotiche per $x \to x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Infinitesimo fondamentale per $x \to x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$.

Lezione 26 (15/11/2024). Ordine di un infinitesimo. Infinitesimi privi di ordine. Teoremi su somma e prodotto di due infinitesimi. Vari esempi. Principio di sostituzione degli infinitesimi di ordine superiore. Esempi sul principio di sostituzione degli infinitesimi di ordine superiore. Ordine di infinitesimo del prodotto; ordine di infinitesimo della somma. Esempi ed esercizi.

Math4U (Tonello) Incontro n. 5 (15/11/2024). Esercizi su continuità e derivabilità di funzioni definite a tratti. Esercizi sulla derivabilità.

Settimana 8.

Lezione 27 (19/11/2024). "Algebra" degli o-piccolo (con dimostrazione ed esempi). Definizione della notazione O-grande di Landau, proprietà e "algebra" degli O-grande (con dimostrazione ed esempi). Cenni all'utilizzo della notazione O-grande per la stima della complessità computazionale di un algoritmo.

Lezione 28 (20/11/2024). Cosa significano $f - g = o(h)$ e $f - g = O(h)$ per $x \to x_0$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Funzioni Infinite. Infiniti dello stesso ordine, di ordine superiore ed inferiore per $x \to x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Infinito fondamentale per $x \to x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Ordine di un infinito. Relazione tra ordine di infinito e di infinitesimo. Principio di sostituzione degli infiniti di ordine inferiore. Esempio: $\log x = o(x^\alpha)$ per $x \to \infty$. Gerarchia degli infiniti per funzioni e per successioni. Formula di Stirling [no dim]. Esempio: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!+\sqrt{n}}{e^n} = +\infty$. Derivate di ordine superiore al primo. Formula di Taylor con resto di Peano [no dim]; discussione sul significato della formula di Taylor in termini di approssimazione.

Lezione 29 (21/11/2024). Il polinomio di Taylor è la migliore approssimazione di una funzione regolare ["viceversa" della formula di Taylor; no dim]. Formula di Taylor di e^x centrata in $x_0 = 0$. Formula di Taylor di e^{x^2}; $\log|1 + x|$. Due limiti svolti con l'uso della formula di Maclaurin: $\lim\limits_{x\to0} \frac{\log(1+x)-x}{x^\alpha}$ al variare di $\alpha > 0$ e $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1-x-x^2/2}{x^3} = 1/6$.

Lezione 30 (22/11/2024). Formula di Maclaurin di $(1 + x)^\alpha$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$. Binomiale generalizzato. Osservazioni sul fatto che per $\sin x, \cos x$ il termine d'errore nelle loro Formula di Maclaurin è più preciso di quanto atteso. Esercizi con formule di Taylor per funzioni composte: esempio usando e^{2x+2}, $x_0 = 0$. Definizione di punti di estremali e estremi locali e globali. Relazioni tra loro. Esempi: unicità, se esistono, degli estremi, e possibile non unicità, se esistono, dei punti di estremo; x_0 punto di estremo globale è anche punto di estremo locale (il viceversa non vale).

Math4U (Tonello) Incontro n. 6 (22/11/2024). (da compilare) Esercizi su limiti con il principio di sostituzione degli infinitesimi/infiniti, formula di Taylor.

Settimana 9.

Lezione 31 (26/11/2024). Limiti con principio di sostituzione degli infinitesimi e uso della formula di Maclaurin: $\lim\limits_{x\to0} \frac{\tan(2x)+5x^3}{\sin(6x)+x^2}$, $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1-x-\cos x}{(\sin x)^2+\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to0} \frac{\log(1+x)-\sin x}{x^2+x^5}$. Definizione di bifattoriale e formule di Taylor in 0 di $(1 + x)^{-1}$, $(1 - x)^{-1}$, $(1 + x^2)^{-1}$, $(1 + x)^{1/2}$, $(1 + x)^{-1/2}$, $(1 - x^2)^{-1/2}$. Esistenza della successione minimizzante e massimizzante.[no dim] Definizione di sottosuccessione. $a_n \to \lambda$ per $n \to \infty$ se e solo se per ogni sottosuccessione a_{n_k} si ha che $a_{n_k} \to \lambda$ per $k \to \infty$. [no dim]. $a_n \to \lambda$ per $n \to \infty$ se e solo se $a_{2k} \to \lambda$ per $k \to \infty$ e $a_{2k+1} \to \lambda$ per $k \to \infty$. [no dim].

Lezione 32 (27/11/2024). Non tenuta per indisposizione del docente.

Lezione 33 (28/11/2024). Non tenuta per indisposizione del docente.

Lezione 34 (29/11/2024). Non tenuta per indisposizione del docente.

Math4U (Tonello) Incontro n. 7 (29/11/2024). Esercizi sui limiti con la formula di Taylor.

Settimana 10.

Lezione 32 (03/12/2024). Teorema di Bolzano-Weierstrass [no dim]. Teorema di Weierstrass. Teorema di Weierstrass generalizzato [no dim]. Teorema degli zeri, e sue generalizzazioni. Teorema dei valori intermedi [no dim]. Condizione necessaria per punti di massimo e minimo locale interno.

Lezione 33 (04/12/2024). Teorema di Rolle e Teorema di Lagrange. $f'(x) = 0$ in I se e solo se $f(x) = c$ in I. $f(x)$ debolmente crescente (decrescente) se e solo se $f'(x) \geq 0$ (≤ 0). Condizioni sufficienti di stretta monotònia. Condizioni sufficienti del primo ordine di massimo e minimo. Esempi.

Lezione 34 (05/12/2024). Condizioni necessarie e sufficienti di massimo e minimo con le derivate di ordine superiore al primo. Criterio delle derivate successive. Funzioni periodiche. Definizione di convessità/concavità. Una funzione convessa è continua (no dim.). Condizioni di convessità del primo e secondo ordine (no dim.). Punti di flesso con associata condizione necessaria per funzioni derivabili due volte (no dim). Asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

Lezione 35 (06/12/2024). Esercizi svolti in classe su limiti con formula di Taylor e sullo studio di funzioni.

Math4U (Tonello) **Incontro n. 8 (06/12/2024).** Esercizi sugli studi di funzione.

Lezione 36 (07/12/2024). [Recupero del 04/10/2024] Serie Numeriche: carattere di definizione. Serie di Mengoli, serie alternante, serie geometrica. $0.\overline{9} = 1$. Condizione necessaria di convergenza. La serie armonica diverge. Proprietà delle serie [no dim]. Serie a termini non negativi: Criterio del confronto. Criterio di condensazione di Cauchy [no dim] Serie armonica generalizzata. Serie di Abel di termine generale $a_k = k^{-1}(\log k)^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Criterio integrale per serie con $a_k \geq 0$, $a_{k+1} \leq a_k$ [no dim]. Convergenza assoluta delle serie. Criterio della radice [no dim]. Criterio del rapporto [no dim]. Serie esponenziale. Esercizi (criterio del confronto, radice, rapporto).

Settimana 11.

Lezione 37 (10/12/2024). Definizione e proprietà delle primitive. Definizione di integrale indefinito. Integrali immediati. Esempi su integrali immediati. Linearità e omogeneità delle primitive. Metodo di integrazione per parti. Esempi su integrali per parti: primitive di $x^n e^x$, $x^n a^x$, $e^x \sin x$, $x \cos x$.

Lezione 38 (11/12/2024). Teorema di integrazione per sostituzione (prima e seconda forma). Teorema di integrazione per sostituzione (terza forma) [no dim]. Esempi su integrali per sostituzione: primitive di $\log t/t$, $(\cos t)^3 \sin t$, calcolo di integrali della forma $\int f(g(t))g'(t)dt$ con $f(x)$ data da varie funzioni elementari, calcolo delle primitive di $\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$. Cenni sul Teorema fondamentale dell'algebra e scomposizione di un polinomio a coefficienti reali in prodotto di polinomi di grado ≤ 2. Metodo del completamento del quadrato.

Lezione 39 (12/12/2024). Integrali di funzioni razionali. Scomposizione di un rapporto $\frac{p(x)}{q(x)}$ come somma di frazioni algebriche con a denominatore i termini della scomposizione di $q(x)$ (con esempi). Metodo dei fratti semplici: caso delle radici reali semplici, delle radici reali multiple, delle radici complesse semplici. Calcolo esplicito dell'integrale di ciascuno dei termini della precedente scomposizione (con esempi). In particolare: integrazione di $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{-1}$. Calcolo di $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}dx$, $\int \frac{x^3-1}{x^2(x+1)^2}dx$, $\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$.

Lezione 40 (13/12/2024). Caso delle radici reali multiple: integrazione di $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Ulteriore esempio di calcolo di primitive nel caso di radici complesse multiple. Somme inferiori e somme superiori di una funzione limitata in un intervallo; relazione tra somme superiori e inferiori al variare della suddivisione dell'intervallo. Definizione di Integrale di Riemann. Significato geometrico dell'integrale di Riemann. Proprietà dell'integrale di Riemann. Esempi. Integrale di Riemann e relazione d'ordine. Additività dell'Integrale di Riemann. Condizioni sufficienti di Riemann-integrabilità [no dim].

Math4U (Tonello) **Incontro n. 9 (13/12/2024).** Calcolo di $\int \frac{3-4\sqrt{x}+x^5}{x^2}dx$, $\int \frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x}dx$, $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx$, $\int \frac{\sin(\log x)}{x}dx$, $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$. Uso delle sostituzioni consigliate nei casi: $R(e^x)$, $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, per $a > 0$ e $\Delta \neq 0$, $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, per $a < 0$ e $\Delta > 0$, dove $R(u, v, w, \dots)$ indica una funzione razionale.

Lezione 41 (14/12/2024). [Recupero del 27/11/2024] Criterio asintotico per le serie a termini non negativi. Come combinare il Criterio asintotico con quanto noto sulla convergenza della serie armonica generalizzata. Serie a segni alterni. Criterio di Leibniz per serie a segni alterni [no dim]. Esercizi sulla convergenza delle serie. (criterio a segni alterni, dell'ordine di infinitesimo, serie geometrica). Introduzione alle funzioni iperboliche: definizione, proprietà fondamentali e loro formule di Maclaurin. Esercizi di riepilogo sulle serie.

Settimana 12.

Lezione 42 (17/12/2024). Ulteriori esempi di sostituzioni consigliate: $R(\log x)/x$, $R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)$, $R(\sin x, \cos x)$, $R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_1/q_1}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{p_2/q_2}, \dots)$, dove $R(u, v, w, \dots)$ indica una funzione razionale; con esempi relativi. Teorema del valor medio integrale. Disuguaglianza del valore assoluto [no dim]. Definizione di funzione integrale. Una funzione Riemann integrabile ha funzione integrale continua.

Lezione 43 (18/12/2024). Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI), suoi corollari. Formula fondamentale del calcolo integrale. Funzioni integrali composte. Esempi ed esercizi. Calcolo di polinomio di Taylor di funzione integrale con agli estremi di integrazione funzioni differenziabili. Integrazione definita per sostituzione (prima e seconda forma) [no dim].

Lezione 44 (19/12/2024). Integrazione definita per parti [no dim]. Integrali impropri su insiemi limitati. Il caso di $\int_a^b |t-a|^{-\alpha} \mathrm{d}t$, $\alpha > 0$. Criterio del confronto e criterio del confronto asintotico in $(a, b]$. Il caso di $\int_0^{1/2} t^{-1}(-\log t)^{-\beta} \mathrm{d}t$, $\beta > 0$. Esempi sullo studio della convergenza e sul calcolo degli integrali impropri su insiemi limitati; integrale improprio di $\frac{x^{1/3}-x^{1/2}}{(x^{1/2}-x^{2/3})^2}$ in $(0, 1/2]$, in $[1/2, 1]$, in $(0, 1)$.

Lezione 45 (20/12/2024). Integrali impropri su insiemi illimitati: definizione. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \widetilde{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, allora f ha integrale improprio divergente a $+\infty$. Il caso di $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$. Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico per integrali su $[a, +\infty)$. Il caso di $\int_2^{+\infty} t^{-1}(\log t)^{-\beta} \mathrm{d}t$, $\beta > 0$. Calcolo di $\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} \mathrm{d}t = 0$. Studio della convergenza e calcolo di $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{3/2}}$.

Math4U (Tonello) Incontro n. 10 (20/12/2024). Esercizi sugli integrali definiti e impropri.

Lezione 46 (20/12/2024). [Recupero del 28/11/2024] Esercizi di riepilogo su serie, studio di funzione, limiti svolti usando la formula di Taylor.