

Orario di lezione: Lunedì e Martedì: 10.30-12.30; Mercoledì: 08.30-10.30 [ONLINE](#). Prima lezione: 28 Settembre. **Nota:** Verranno indicati con [DIM] i teoremi, lemmi, proposizioni che sono stati dimostrati a lezione. Si ricorda che ognuna di tali dimostrazioni può essere chiesta all'esame.

#### ARGOMENTI

##### SETTIMANA 1.

**Lezione 1 (28/09/2020).** Presentazione del corso. Richiami su  $\mathbb{R}^n$  e prodotti tra vettori, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e triangolare [DIM]. Funzioni vettoriali di una variabile: definizione di limite.

**Lezione 2 (29/09/2020).** Proprietà dei limiti di funzioni vettoriali. Curve parametriche, esempi. Derivata delle funzioni vettoriali, curve regolari, vettore tangente. Esempi.

**Lezione 3 (30/09/2020).** Integrali di funzioni vettoriali di una variabile. Teorema fondamentale del calcolo e disuguaglianza per la norma dell'integrale. Lunghezza di una curva. Rettificabilità delle curve  $\mathcal{C}^1$  [DIM] e formula per la lunghezza. Esempi, lunghezza dei grafici cartesiani.

##### SETTIMANA 2.

**Lezione 4 (05/10/2020).** Lunghezza di curve in coord. polari; cambi di parametrizzazione; ascissa curvilinea e sue proprietà [DIM]. Integrali curvilinei di prima specie, proprietà; applicazioni al calcolo di baricentri e momenti d'inerzia. Indipendenza dell'integrale dal cambiamento di parametro della curva [DIM].

**Lezione 5 (06/10/2020).** Integrali curvilinei di seconda specie: motivazioni, proprietà ed esempi. Funzioni scalari di più variabili: dominio, grafico, insiemi di livello. Definizione di limite mediante successioni.

**Lezione 6 (07/10/2020).** Definizione di limite; esempi e proprietà. Funzioni continue: proprietà ed esempi. Teoremi della permanenza del segno, dei limiti su restrizioni, della maggiorazione con funzioni radiali, del confronto. Esempi di non esistenza del limite, calcolo di limiti mediante coordinate polari.

##### SETTIMANA 3.

**Lezione 7 (12/10/2020).** Derivate parziali, esempi. Regole di derivazione. Funzioni differenziabili e loro proprietà [DIM]. Differenziabilità e piano tangente. Teorema del differenziale totale.

**Lezione 8 (13/10/2020).** Punti interni, esterni, di frontiera. Insiemi aperti e chiusi, esempi. Proprietà di chiusi ed aperti. Insiemi limitati. Insiemi aperti e chiusi definiti da disuguaglianze; esempi.

**Lezione 9 (14/10/2020).** Insiemi connessi, esempi; teorema degli zeri delle funzioni continue [DIM]. Teorema di Weierstraß.

##### SETTIMANA 4.

**Lezione 10 (19/10/2020).** Differenziale, normale al piano tangente; esercizi sulla differenziabilità. Derivate direzionale, esempi, formula del gradiente [DIM], esercizi. Il gradiente è la direzione di massima pendenza [DIM].

**Lezione 11 (20/10/2020).** Il gradiente è ortogonale alle curve di livello [DIM]. Derivate seconde e matrice Hessiana, esempi; teorema di Schwarz. Formula di Taylor col resto di Peano [DIM]. Ottimizzazione: estremi locali e globali e teorema di Fermat [DIM].

**Lezione 12 (21/10/2020).** Punti critici e selle. Forme quadratiche definite positive, negative, indefinite; esempi; caratterizzazione in dimensione 2 e 3 (criterio di Sylvester) [DIM]. Richiami su autovalori e matrici simmetriche; caratterizzazione del segno della matrice mediante gli autovalori [DIM]. Condizioni sufficienti di estremo locale [DIM].

##### SETTIMANA 5.

**Lezione 13 (26/10/2020).** Esercizi sui max e min locali e globali. Funzioni convesse, esempi. Caratterizzazione delle funzioni convesse  $\mathcal{C}^1$  e  $\mathcal{C}^2$  [DIM].

**Lezione 14 (27/10/2020).** Ottimizzazione e funzioni convesse. Esempi ed esercizi. Estremi vincolati: 1. a curve parametriche, 2. a insiemi limitati con frontiera curva. Teorema della funzione implicita in  $\mathbb{R}^2$  [DIM]. Formula per la derivata della funzione implicita [DIM].

**Lezione 15 (28/10/2020).** Esercizi su funzioni implicite, derivata seconda. Teorema di Dini della funzione implicita in  $\mathbb{R}^3$ . Estremi vincolati a una curva in forma implicita: metodo dei moltiplicatori di Lagrange [DIM].

SETTIMANA 6.

**Lezione 16 (02/11/2020).** Esercizi di estremi vincolati in insiemi compatti e in insiemi illimitati. Funzioni di più variabili a valori vettoriali: differenziabilità e matrice Jacobiana, esempi.

**Lezione 17 (03/11/2020).** Coordinate sferiche. Teorema di derivazione delle funzioni composte nel caso vettoriale, esempi. Estremi vincolati su una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , con esercizio. Introduzione agli integrali doppi: definizione in un rettangolo.

**Lezione 18 (04/11/2020).** Primi esempi di integrali doppi. Integrali dipendenti da parametri. Formule di riduzione nei rettangoli, esempi. Definizione di integrale in domini generali. Domini semplici o regolari: integrabilità delle funzioni continue e formule di riduzione [DIM]; primi esempi.

SETTIMANA 7.

**Lezione 19 (09/11/2020).** Def. di insieme misurabile nel piano, criteri per gli insiemi di misura nulla. Integrabilità delle funzioni continue quasi ovunque. Proprietà degli integrali doppi, teorema della media integrale [DIM]. Baricentri e momenti d'inerzia di insiemi piani. Esercizi di integrazione.

**Lezione 20 (10/11/2020).** Cambi di variabili negli integrali doppi: motivazioni alla formula con trasformazioni affini, esempi. Coordinate polari. Esempi ed esercizi.

**Lezione 21 (11/11/2020).** Integrali di funzioni pari o dispari. Integrali tripli: definizione, integrabilità delle funzioni continue in insiemi semplici o stratificati, formule di riduzione per strati e per fili. Esempi. Teorema di cambiamento di variabili; esempi. Coordinate cilindriche.

SETTIMANA 8.

**Lezione 22 (16/11/2020).** Esercizi sulle coordinate cilindriche; volume dei solidi di rotazione [DIM]. Coordinate sferiche con esercizi. Cenni agli integrali generalizzati: integrale della Gaussiana in due variabili e in una variabile [DIM].

**Lezione 23 (17/11/2020).** Superfici notevoli in  $\mathbb{R}^3$  (iperboloidi ecc.). Esercizi di integrali doppi e tripli. Campi vettoriali conservativi e forme esatte: prime proprietà.

**Lezione 24 (18/11/2020).** Caratterizzazione dei campi conservativi mediante i loro integrali curvilinei [DIM]. Rotore. Conservativo implica irrotazionale [DIM]. Insiemi semplicemente connessi: irrotazionale implica conservativo. Esempi e primi esercizi.

SETTIMANA 9.

**Lezione 25 (23/11/2020).** Esercizi su forme differenziali e integrali multipli. Formule di Gauss-Green [DIM] e di Stokes nel piano [DIM].

**Lezione 26 (24/11/2020).** Estensione delle formule di Gauss-Green ai domini decomponibili. Applicazioni delle formule di Gauss-Green al calcolo di aree e di integrali doppi. Esercizi su forme differenziali con parametri.

**Lezione 27 (25/11/2020).** Esercizio su volume e baricentro. Definizione di superficie parametrica regolare e semplice. Piano tangente e vettore normale. Esempi: grafici cartesiani e sfera.

SETTIMANA 10.

**Lezione 28 (30/11/2020).** Definizione di area di una superficie parametrica e di integrale superficiale. Applicazioni: baricentri. Esempi: grafici cartesiani, sfera, coni, cilindri.

**Lezione 29 (01/12/2020).** Area delle superfici di rotazione; esempi. Flussi di campi vettoriali. Superfici chiuse; esempi di flussi entranti o uscenti. Divergenza e teorema di Gauss **[DIM]**.

**Lezione 30 (02/12/2020).** Esercizi sul teorema della divergenza. Superfici con bordo e orientamento del bordo. Teorema del rotore di Stokes **[DIM]**. Esercizio sui flussi. Operatori differenziali e formule che li collegano: il rotore è solenoidale **[DIM]**. Teorema del rotore per superfici chiuse **[DIM]**. Definizione di potenziale vettore; condizioni necessarie per la sua esistenza. Il campo gravitazionale è solenoidale ma non ha potenziale vettore; teorema di esistenza locale.

SETTIMANA 11.

**Lezione 31 (09/12/2020, M. Cirant).** Equazioni differenziali: motivazioni. Problema di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie del primo ordine: teorema di esistenza di Peano; esempio di non esistenza di soluzioni. Metodo di separazione delle variabili. Esempio di non unicità di soluzioni. Teorema di esistenza e unicità locale (Cauchy-Lipschitz). Intervallo massimale di esistenza delle soluzioni, esempio esplosione in tempo finito.

SETTIMANA 12.

**Lezione 32 (14/12/2020, M. Cirant).** Problema di Cauchy per equazioni differenziali del primo ordine: teorema di esistenza e unicità globale; applicazione alle equazioni lineari. Sistemi di prim'ordine: teorema di esistenza ed unicità locale e globale. Riduzione di equazioni di second'ordine a sistemi di prim'ordine. Sistemi lineari omogenei: principio di sovrapposizione e teorema di struttura dell'integrale generale **[DIM]**.

**Lezione 33 (15/12/2020, M. Cirant).** Caratterizzazione dell'integrale generale di sistemi lineari omogenei  $2 \times 2$  a coefficienti costanti, attraverso l'equazione di second'ordine associata **[DIM]**. Sistemi lineari non omogenei: principio di sovrapposizione **[DIM]**. Richiami sul metodo di "somialianza" per equazioni non omogenee del secondo ordine.

**Lezione 34 (16/12/2020; M. Cirant).** Esempi di calcolo esplicito di soluzioni di sistemi non omogenei (tramite riduzione ad equazione del second'ordine). Stabilità per sistemi autonomi: definizione di punto di equilibrio e di asintotica stabilità. Caratterizzazione della stabilità asintotica dell'origine per sistemi  $2 \times 2$  a coefficienti costanti **[DIM]**. Esempi.

SETTIMANA 13.

**Lezione 35 (21/12/2020).** Esercizi di riepilogo.

**Lezione 36 (22/12/2020).** Esercizi di riepilogo.

il corso è terminato