

Orario di lezione: Lunedì, Mercoledì, Giovedì: 16.30-18.30 **DUALE**. Prima lezione: 04 Ottobre 2021. **Nota:** Verranno indicati con **[DIM]** i teoremi, lemmi, proposizioni che sono stati dimostrati a lezione. Si ricorda che ognuna di tali dimostrazioni può essere chiesta all'esame.

## ARGOMENTI

### SETTIMANA 1.

**Lezione 1 (04/10/2021).** Presentazione del corso. Richiami su  $\mathbb{R}^n$  e prodotti tra vettori, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e triangolare **[DIM]**. Funzioni vettoriali di una variabile: definizione di limite.

**Lezione 2 (06/10/2021).** Proprietà dei limiti di funzioni vettoriali. Curve parametriche, esempi. Derivata delle funzioni vettoriali, curve regolari, vettore tangente. Esempi.

**Lezione 3 (07/10/2021).** Integrali di funzioni vettoriali di una variabile. Teorema fondamentale del calcolo e disuguaglianza per la norma dell'integrale. Lunghezza di una curva. Rettificabilità delle curve  $C^1$  e formula per la lunghezza. Esempi, lunghezza dei grafici cartesiani.

### SETTIMANA 2.

**Lezione 4 (11/10/2021).** Lunghezza di curve in coord. polari; cambi di parametrizzazione; ascissa curvilinea e sue proprietà **[DIM]**. Integrali curvilinei di prima specie, proprietà.

**Lezione 5 (13/10/2021).** Calcolo di baricentri e momenti d'inerzia. Indipendenza dell'integrale dal cambiamento di parametro della curva **[DIM]**. Integrali curvilinei di seconda specie: motivazioni, proprietà ed esempi.

**Lezione 6 (14/10/2021).** Funzioni scalari di più variabili: dominio, grafico, insiemi di livello. Definizione di limite mediante successioni. Definizione di limite; esempi e proprietà. Funzioni continue: proprietà ed esempi.

### SETTIMANA 3.

**Lezione 7 (18/10/2021).** Teoremi della permanenza del segno, dei limiti su restrizioni, della maggiorazione con funzioni radiali, del confronto. Esempi di non esistenza del limite, calcolo di limiti mediante coordinate polari. Derivate parziali, esempi. Regole di derivazione.

**Lezione 8 (20/10/2021).** Funzioni differenziabili e loro proprietà. La differenziabilità implica la continuità e l'esistenza del gradiente **[DIM]**. Differenziabilità e piano tangente. Teorema del differenziale totale. Esempi

**Lezione 9 (21/10/2021).** Proprietà del gradiente (somma, prodotto, rapporto, composizione). Punti interni, esterni, di frontiera. Insiemi aperti e chiusi, esempi. Proprietà di chiusi ed aperti. Insiemi limitati. Insiemi aperti e chiusi definiti da disuguaglianze; esempi.

### SETTIMANA 4.

**Lezione 10 (25/10/2021).** Insiemi connessi, esempi; teorema degli zeri delle funzioni continue **[DIM]**. Teorema di Weierstraß. Differenziale, normale al piano tangente.

**Lezione 11 (27/10/2021).** Esercizi sulla differenziabilità. Derivate direzionale, esempi, formula del gradiente **[DIM]**, esercizi. Il gradiente è ortogonale alle curve di livello **[DIM]**.

**Lezione 12 (28/10/2021).** Derivate seconde e matrice Hessiana, esempi; teorema di Schwarz. Formula di Taylor col resto di Peano **[DIM]**. Ottimizzazione: estremi locali e globali e teorema di Fermat **[DIM]**. Punti critici e selle.

### SETTIMANA 5.

**Lezione 13 (03/11/2021).** Forme quadratiche definite positive, negative, indefinite; esempi; caratterizzazione in dimensione 2 e 3 (criterio di Sylvester). Richiami su autovalori e matrici simmetriche; caratterizzazione del segno della matrice mediante gli autovalori **[DIM]**. Condizioni sufficienti di estremo locale **[DIM]**.

**Lezione 14 (04/11/2021).** Esercizi sui max e min locali e globali. Funzioni convesse, esempi. Caratterizzazione delle funzioni convesse  $C^1$  e  $C^2$ . Ottimizzazione e funzioni convesse [DIM]. Esempi ed esercizi. Estremi vincolati: vincolo costituito da curve parametriche.

SETTIMANA 6.

**Lezione 15 (08/11/2021).** Estremi vincolati: vincolo costituito da insiemi limitati con frontiera curva. Teorema della funzione implicita in  $\mathbb{R}^2$ . Formula per la derivata della funzione implicita [DIM]. Esercizi su funzioni implicite, derivata seconda. Estremi vincolati a una curva in forma implicita: metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

**Lezione 16 (10/11/2021).** Dimostrazione del teorema dei moltiplicatori di Lagrange [DIM]. Esercizi di estremi vincolati in insiemi chiusi e limitati e in insiemi chiusi e illimitati. Teorema di Dini della funzione implicita in  $\mathbb{R}^3$  (parte prima).

**Lezione 17 (11/11/2021).** Teorema di Dini della funzione implicita in  $\mathbb{R}^3$  (parte seconda). Funzioni di più variabili a valori vettoriali: differenziabilità e matrice Jacobiana, esempi. Coordinate sferiche. Teorema di derivazione delle funzioni composte nel caso vettoriale, esempi.

SETTIMANA 7.

**Lezione 18 (15/11/2021).** Introduzione agli integrali doppi: definizione in un rettangolo. Primi esempi di integrali doppi. Integrali dipendenti da parametri. Formule di riduzione nei rettangoli, esempi. Definizione di integrale in domini generali. Domini semplici o regolari: integrabilità delle funzioni continue e formule di riduzione [DIM]; primi esempi.

**Lezione 19 (17/11/2021).** Def. di insieme misurabile nel piano, criteri per gli insiemi di misura nulla. Integrabilità delle funzioni continue quasi ovunque. Proprietà degli integrali doppi, teorema della media integrale [DIM]. Baricentri e momenti d'inerzia di insiemi piani. Esercizi di integrazione.

**Lezione 20 (18/11/2021).** Cambi di variabili negli integrali doppi: motivazioni alla formula con trasformazioni affini, esempi. Coordinate polari. Esempi ed esercizi.

SETTIMANA 8.

**Lezione 21 (22/11/2021).** Integrali di funzioni pari o dispari. Integrali tripli: definizione, integrabilità delle funzioni continue in insiemi semplici o stratificati, formule di riduzione per strati e per fili. Esempi. Teorema di cambiamento di variabili; esempi. Coordinate cilindriche.

**Lezione 22 (24/11/2021).** Esercizi sulle coordinate cilindriche; volume dei solidi di rotazione (Teorema di Pappo-Guldino) [DIM]. Coordinate sferiche con esercizi. Cenni agli integrali generalizzati: integrale della Gaussiana in due variabili e in una variabile [DIM]. Superfici notevoli in  $\mathbb{R}^3$  (iperboloidi ecc.). Esercizi di integrali doppi e tripli.

**Lezione 23 (25/11/2021).** Campi vettoriali conservativi e forme esatte: prime proprietà. Caratterizzazione dei campi conservativi mediante integrali curvilinei [DIM]. Rotore. Conservativo implica irrotazionale ([DIM]; nella prossima lezione).

SETTIMANA 9.

**Lezione 24 (29/11/2021).** Insiemi semplicemente connessi: irrotazionale implica conservativo. Esempi e primi esercizi. Esercizi su forme differenziali e integrali multipli.

**Lezione 25 (01/12/2021).** Formule di Gauss-Green [DIM] e di Stokes nel piano [DIM]. Estensione delle formule di Gauss-Green ai domini decomponibili. Applicazioni delle formule di Gauss-Green al calcolo di aree.

**Lezione 26 (02/12/2021).** Applicazioni delle formule di Gauss-Green al calcolo di integrali doppi. Esercizi su forme differenziali con parametri.

SETTIMANA 10.

**Lezione 27 (06/12/2021).** Definizione di superficie parametrica regolare e semplice. Piano tangente e vettore normale. Esempi: grafici cartesiani e sfera. Definizione di area di una superficie parametrica e di integrale superficiale. Esempi: grafici cartesiani, sfera, coni, cilindri.

**Lezione 28 (09/12/2021).** Applicazioni: baricentri. Esempi: grafici cartesiani, cilindri. Area delle superfici di rotazione; dimostrazione del teorema di Pappo-Guldino [DIM]. Esempi.

SETTIMANA 11.

**Lezione 29 (13/12/2021).** Area delle superfici di rotazione; esempi. Flussi di campi vettoriali. Superfici chiuse; esempi di flussi entranti o uscenti. Divergenza e teorema di Gauss ([DIM] per domini semplici rispetto agli assi).

**Lezione 30 (15/12/2021).** Esercizi sul teorema della divergenza. Superfici con bordo e orientamento del bordo. Teorema del rotore di Stokes per superfici con bordo. Esercizio sui flussi.

**Lezione 31 (16/12/2021).** Operatori differenziali e formule che li collegano: il rotore è solenoidale [DIM]. Teorema del rotore per superfici chiuse [DIM]. Definizione di potenziale vettore; condizioni necessarie per la sua esistenza. Il campo gravitazionale è solenoidale ma non ha potenziale vettore; teorema di esistenza locale. Due esercizi di riepilogo.

SETTIMANA 12.

**Lezione 32 (20/12/2021).** Esercizi di riepilogo.

**Lezione 33 (22/12/2021).** Il gradiente è la direzione di massima pendenza [DIM]. Estremi vincolati su una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , con esercizio. Equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti; soluzioni del caso omogeneo e metodo di somiglianza per risolvere il caso non omogeneo.

SETTIMANA 13.

**Lezione 34 (10/01/2022).** Equazioni differenziali: motivazioni. Problema di Cauchy per sistemi differenziali ordinari del primo ordine: teorema di esistenza di Peano; esempio di non esistenza di soluzioni. Esempio di non unicità di soluzioni. Teorema di esistenza e unicità locale (Cauchy-Lipschitz). Intervallo massimale di esistenza delle soluzioni, esempio esplosione in tempo finito. Problema di Cauchy per sistemi differenziali del primo ordine: teorema di esistenza e unicità globale; applicazione alle equazioni lineari. Sistemi di prim'ordine: teorema di esistenza ed unicità locale e globale.[DIM]Riduzione di equazioni di second'ordine a sistemi di prim'ordine.

**Lezione 35 (12/01/2022).** Sistemi lineari omogenei: principio di sovrapposizione e teorema di struttura dell'integrale generale [DIM]. Caratterizzazione dell'integrale generale di sistemi lineari omogenei  $2 \times 2$  a coefficienti costanti, attraverso l'equazione di second'ordine associata [DIM]. Sistemi lineari non omogenei: principio di sovrapposizione [DIM]. Richiami sul metodo di "somiglianza" per equazioni non omogenee del secondo ordine. Esempi di calcolo esplicito di soluzioni di sistemi non omogenei (tramite riduzione ad equazione del second'ordine).

**Lezione 36 (13/01/2022).** Stabilità per sistemi autonomi: definizione di punto di equilibrio e di asintotica stabilità. Caratterizzazione della stabilità asintotica dell'origine per sistemi  $2 \times 2$  a coefficienti costanti [DIM]. Esempi.

Il corso è terminato