

FRONTIERE

L'ipotesi di Riemann, il graal dei numeri primi

SILVIA CAMISASCA

“**P**roblemi del Millennio”: già l'espressione contiene tutto il peso e la dimensione di quei sette enunciati matematici che nel 2000 il Clay Mathematical Institute raccolse nella “lista nera” destinata ad affascinare il mondo della divulgazione scientifica. Probabilmente a ragione, dal momento che i matematici contemporanei ritengono legate alla risoluzione di questi rompicapo aspetti di assoluta rilevanza, in termini matematici e non solo. Non si nega che la matrice comune che stimola l'ambizione delle menti più brillanti sia la pura curiosità intellettuale, e del resto la storia insegna che la scienza avanza per ricerche condotte a fini squisitamente teorici e solo in un secondo momento e di riflesso hanno determinato ricadute nella vita concreta. Tra i sei problemi a oggi aperti – Perelman nel 2003 sciolse infatti la congettura di Poincaré – la sfida maggiore e, probabilmente, più mediatica, si gioca attorno all'ipotesi di Riemann, così definita, perché nel 1859 Georg Friedrich Bernhard Riemann – nel saggio *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (“Attorno al numero di numeri primi minori di un certo valore”) – ne suppose la correttezza come condizione necessaria al proseguimento delle investigazioni su una determinata funzione di variabile complessa. A tale supposizione rimase accollata la nomenclatura di ipotesi, benché – essendo un'affermazione non provata ma ritenuta valida per le conseguenze implicanti – secondo i criteri oggi in uso sarebbe più appropriato parlare di “congettura” di Riemann.

L'introduzione corretta e completa della “funzione zeta di Riemann” e dell'enunciato stesso – riguardante la dislocazione di certi punti di azzeramento (zeri non-banali) di tale funzione di variabile complessa – delle proprietà fin qui note e di quanto ancora resta ignoto, richiede una certa padronanza degli strumenti specifici di analisi complessa e teoria analitica dei numeri. Proprio in quanto materia per addetti ai lavori, la questione si presta a essere immanicabilmente presentata e divulgata con una buona dose di pressapochismo e superficialità, incentivati dall'abbondante ricorso a roboanti locuzioni, dal “grande mistero irrisolto della matematica” in giù... Per convincersi dell'importanza della congettura di Riemann basterebbe un approssimativo conto delle pubblicazioni scientifiche degli ultimi centosessant'anni dedicate all'argomento. La funzione zeta, in verità, compare già nel 1644 nel problema di Basilea, formulato dal bolognese Pietro Mengoli, e poi risolto un secolo più tardi da Eulero, il quale era ben consapevole dello stretto collegamento tra tale funzione e la distribuzione dei numeri primi. Non a caso, l'esistenza di infiniti numeri primi era nota ad Euclide, il cui celebre teorema a proposito fu indirettamente dimostrato da Eulero, sfruttando proprio una caratteristica della funzione zeta, di cui contemplò i soli valori reali. Il genio di Riemann si spinse, invece, a comprendere anche i valori complessi della variabile, intuendo non solo l'intimo legame tra la funzione e la distribuzione dei numeri primi, ma anche che la posizione dei suoi zeri consentisse di contarli in modo accurato. Cosa che, per al-

li a termine è relativamente piccolo. Nonostante una seria disamina sull'argomento richieda ben altra completezza, occorre puntualizzare l'assoluta infondatezza scientifica dell'affermazione secondo cui la prova della validità della congettura di Riemann comporterebbe la violazione dei sistemi crittografici basati sulla primalità e sulla fattorizzazione di numeri naturali. La sicurezza di tali sistemi – fondata sulla presunta difficoltà computazionale di determinare i

Tra i grandi che si cimentarono nell'impresa, compare anche il padre della crittografia moderna, Alan Turing. La congettura, infatti, riveste una certa importanza anche per gli aspetti più teorici dell'informatica, poiché se ne deduce una quantità di informazioni sulla terminazione di alcuni algoritmi, di cui la nostra ipotesi non ne dimostra la correttezza, limitandosi a provare, a priori, che il numero di operazioni necessarie a portar-

li a termine è relativamente piccolo. Nonostante una seria disamina sull'argomento richieda ben altra completezza, occorre puntualizzare l'assoluta infondatezza scientifica dell'affermazione secondo cui la prova della validità della congettura di Riemann comporterebbe la violazione dei sistemi crittografici basati sulla primalità e sulla fattorizzazione di numeri naturali. La sicurezza di tali sistemi – fondata sulla presunta difficoltà computazionale di determinare i

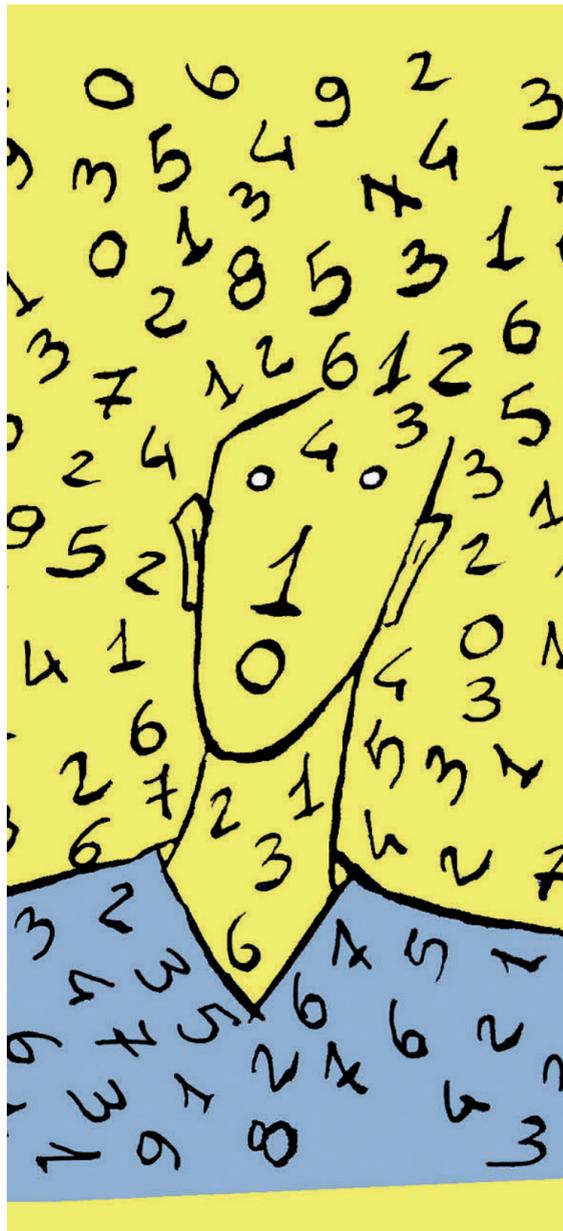
Formulata nel 1859, la congettura – supposta valida ma insoluta – è oggi tra i grandi problemi della matematica ed è anche quello che più accende l'interesse mediatico: sia per l'alone mitico di difficoltà estrema, sia perché chi lo risolvesse riceverebbe in premio un milione di dollari

fattori di interi particolarmente grandi, aventi esattamente due divisori primi distinti – non dipende dalla risoluzione della congettura di Riemann semplicemente perché fino a ora non sono noti teoremi in tal senso.

Tra fallimenti e insuccessi – più o meno clamorosi – nel corso degli anni, merita di essere ricordato Enrico Bombieri, che conquistò nel 1974 la Medaglia Fields (massimo riconoscimento nella matematica) per gli studi condotti sui numeri primi nelle progressioni aritmetiche. In altre parole, risolse il “corrispondente” problema alla congettura di Riemann, affrontato nella prima metà del XIX secolo da Dirichlet. E se il nome di Riemann è sempre di grande attualità, è pur vero che in queste ultime settimane è tornato prepotentemente alla ribalta: a ciò, probabilmente, ha contribuito il giovane matematico Alessio Figalli, che – vincendo la pre-

stigiosa Medaglia Field – ha affiancato il suo nome a quello di Bombieri. Certo, la principale ragione storica dell'interesse attorno alla congettura risiede nel rapporto con la distribuzione asintotica ottimale dei numeri primi. Ma non è la sola. La funzione zeta di Riemann è stata, infatti, la prima di una lunga e felice serie: rappresenta l'esempio più antico in cui proprietà algebro-geometriche di un dato oggetto matematico vengono tradotte in proprietà analitiche di una certa funzione. Sull'onda dello stratagemma di Riemann, oggi i matematici operano con “funzioni zeta” di gruppi, campi di numeri, curve ellittiche, varietà algebriche, forme modulari. In attesa della soluzione non ci resta che sfruttare proprietà e risultati della congettura – supposta valida, naturalmente – per fare luce su quanto ci è utile.

© RIPRODUZIONE RISERVATA



IL CASO Obsessioni incomprensibili

Il 24 maggio 2000 il facoltoso americano Landon Clay, al College de France a Parigi, annunciò di mettere a disposizione la ricompensa di sette milioni di dollari per chi fosse riuscito a risolvere, senza alcun limite di tempo, sette “problemi per il millennio”. Un milione per ogni quesito, ossia: P contro NP; congettura di Hodge; congettura di Poincaré (risolto); ipotesi di Riemann; Teoria quantistica di Yang-Mills e gap di massa; equazioni di Navier-Stokes; congettura di Birch e Swinnerton-Dyer. Il testo “più serio”, seppur sempre divulgativo, rivolto al grande pubblico sulla congettura di Riemann è *L'ossessione dei numeri primi* di John Derbyshire (2006): qui si alternano capitoli puramente storici a tentativi di argomentazioni della validità dell'enunciato di Riemann e della formula esplicita ricavata. Ossessione tale che sulle tracce di Riemann è partita perfino Rai Scuola con il nuovo documentario *Caccia ai numeri primi*, in cui alcuni tra i maggiori matematici e fisici del pianeta si sfidano nella traduzione più “digeribile” della teoria. (S. Cam.)

© RIPRODUZIONE RISERVATA

Leggere, rileggere

Da Peri a Verdi quanto Ovidio c'è nell'opera italiana



CESARE CAVALLIERI

«**P**ianse ed amò per tutti». Della lunga e ormai stucchevole lirica che D'Annunzio compose in morte di Giuseppe Verdi, nella quale il Vate immagina Dante, Leonardo e Michelangelo chini sul caro estinto, si cita solitamente quell'unico settenario che, bisogna ammetterlo, icasticamente scolpisce e tramanda il genio del bussetano. La funzione sociale dell'artista è appunto quella che Verdi svolse da par suo, e cioè di dare forma in parole, colori, suoni, i pensieri, i sentimenti, i desideri che tutti avvertiamo ma non sappiamo esprimere. Saint-John Perse chiama “Principi dell'esilio” quelle persone che svolgono un lavoro che solitamente passa inosservato ma resta prezioso e insostituibile. Paolo Isotta merita ad onorem il titolo di “Principe dell'Esilio” per tutti i libri che ha letto per noi, versandoli in 432 pagine di contagiosa erudizione, intitolate *La dotta lira. Ovidio e la musica* (Marsilio, pagine 426, euro 22).

Nessuno come Ovidio ha mai saputo interpretare il mito con tale immedesimazione e con tale felicità narrativa. A lui hanno attinto poeti e musicisti di ogni tempo, e Isotta sa guidare il lettore nei meandri della biblioteca mentale in cui si specchia la cultura occidentale. L'intuizione delle *Metamorfosi* di Ovidio è appunto, ben prima di Lavoisier, che nulla è stabile, tutto si trasforma e ricomincia. E Isotta insegue le metamorfosi, in poesia e in musica, dei miti di Dafne e di Orfeo, di Euridice, di Arianna e Medea, di Ero e Leandro, di Galatea, di Piramo e Tisbe, valorizzando, fra l'altro, le origini del melodramma con Ottavio Rinuccini e Jacopo Peri, senza trascurare Monteverdi, Mercadante, Haydn e su su fino a Strauss. Ovidio era di Sulmona, e fu relegato da Augusto a Tomi, nella gelida Scizia. Isotta non nasconde ammirazione e affinità con un altro abruzzese, Gabriele D'Annunzio, del quale trascrive in esergo questi versi: «In silenzio guardammo i grandi miti / come le nubi sorgere dall'Alpe / ed inclinarsi verso il bianco mare». E siccome eravamo partiti da Verdi, non possiamo non applaudire, nel quarto capitolo, le

pagine che Isotta dedica ad Arianna e Medea rilette in Violetta, protagonista della *Traviata*, valorizzando anche l'apporto del libretto di Francesco Maria Piave. Entrambe le eroine del mito sono archetipi della donna abbandonata e del contrasto d'affetti: «Il modo col quale Violetta pensa ad Alfredo e lo idealizza deriva pur sempre da quello di Arianna verso Teseo, Didone verso Enea, Medea verso Giasone. Anche il proceder delle antitesi concettuali mostra l'influenza della poesia classica e, credo, in particolare dei passi ovidiani. Ma la più forte antitesi poetica è fatta da Verdi in persona: nel mentre Violetta canta nella Cabaletta il proposito di buttarsi nei godimenti, giunge la voce di Alfredo che, fuori scena, canta la melodia della Cavatina, *A quell'amor: un memento* del destino della donna, alla quale l'amore porterà un'effimera gioia e non effimere sofferenza e morte». Il libro è dedicato, con gratitudine e amicizia, all'editore Cesare De Michelis, recentemente scomparso.

© RIPRODUZIONE RISERVATA

Il concorso scolastico Devoto-Oli

Avviato in occasione dell'uscita del Nuovo Devoto-Oli, giunge a compimento il concorso “#leparolechesiamo, i cittadini che diventiamo”, progetto di Mondadori Education rivolto a tutte le scuole secondarie di I e II grado per promuovere una riflessione comune tra gli studenti sui temi dell'integrazione e della convivenza. La premiazione avverrà questa mattina all'Auditorium Mondadori di Segrate. Nove le classi premiate una vincitrice per categoria più 7 menzioni speciali, provenienti da Capaccio/Paestum, Cosenza, Gela, Gorgonzola, Milano, Pomezia, Roseto degli Abruzzi, S. Maria Capua Vetere, Siracusa.

Domani Milano celebra l'antropologia

Domani a Milano verrà celebrato per la prima volta anche in Italia il World Anthropology Day, un'iniziativa promossa dall'Università di Milano-Bicocca. Più di trenta eventi in tutta la città: tra gli altri, passeggiate per scoprire qual è il contributo delle migrazioni al patrimonio culturale urbano; un incontro dedicato alla gestione del denaro e dei consumi; un laboratorio per conoscere il rapporto tra videogiochi e violenza, la collezione di arte contemporanea all'aperto del quartiere CityLife di Milano.

La Costituzione e il Palazzo della Consulta

Verrà presentato domani a Roma il volume “La Costituzione Italiana e il Palazzo della Consulta” (Utet), proprio presso il Palazzo della Consulta. Il volume include il testo completo della Costituzione e saggi di Paolo Grossi, Giuseppe Galasso e Paolo Portoghesi che illustrano rispettivamente il contesto giuridico in cui nacque la Costituzione Italiana, il quadro storico e l'analisi architettonica del Palazzo della Consulta, luogo in cui è stata concepita e redatta.

«La matematica? Democratica e meritocratica»

L'ESPERTO

Ha all'attivo oltre 50 pubblicazioni scientifiche internazionali e tre testi universitari sulle proprietà additive dei numeri primi: Alessandro Languasco, docente all'Università di Padova, è un vero conoscitore del “genere”.

Gli organi di stampa sembrano imporre la “moda” Riemann. Ma quanto c'è di vero?

Il forte interesse è conseguente alle numerose, e profondamente influenti, ripercussioni tecniche su molteplici campi della matematica. In aggiunta, è un problema di difficilissima soluzione, che occupa i consessi dei ricercatori da oltre un secolo e mezzo, resistendo alle sfide dei più agguerriti e dotati talenti. Sicuro è che colui che dimostrerà l'ipotesi, conquisterà un posto in prima fila nella storia della matematica. Non va sottovalutato poi l'impatto sul grande pubblico determinato dalla decisione del Clay Mathematical Institute di assegnare un milione di dollari a chi risolvesse il problema con un metodo accettato e riconosciuto dalla comunità scientifica. Inoltre, i “profani” della materia riversano grandi attenzioni su vicende inerenti dimostrazioni tentate, fallite o riuscite: in questo senso, sarebbe auspicabile

maggiore cautela, lasciando spazio e tempo agli esperti di esplorare e valutare nuovi approcci, prima di annunciare infondati.

L'opinione pubblica è consapevole dell'importanza della fondatezza scientifica?

Nello specifico, trattandosi di una questione squisitamente tecnica, solo chi possiede i fondamentali teorici e formali può comprenderne il linguaggio. Per chi desidera misurarsi su questi aspetti, esistono testi utili a strutturarsi adeguatamente e ad esercitare le competenze necessarie: ma questa è una palestra che richiede anni e anni di applicazione. In particolare, suggerirei di non prestare fede a quelle trattazioni divulgative tese a aggirare lo scomodo formalismo della disciplina. È una scorciatoia vana: al più, possono puntare a fornire qualche riferimento storico e vaghi elementi di merito.

Dunque, è un “gioco” per pochi eletti?

In realtà, è rivolto a tutti: i testi di riferimento sono abbondantemente disponibili, le regole che governano la “partita” note e relativamente semplici: attendono, infatti, essenzialmente alla deduzione logica. Perfino la

comunità matematica, in passato, ha dato prova di saper accogliere e accettare il contributo di outsider, qualora si riscontrassero le condizioni: si pensi a Ramanujan, per esempio. Certo, egli aveva qualcosa da dire ai matematici contemporanei! In quanto a democrazia, la matematica teorica non richiede esclusive apparecchiature o strumentazioni, se non intelligenza logica e analitica, matite e una discreta quantità di carta. La sola vera limitazione è l'accesso all'educazione più avanzata: in molti paesi, non è alla portata comune e, viste le recenti riforme adottate in Italia, la tendenza è all'aggravamento. Alcuni problemi sono molto difficili, a tal punto che per comprenderne solo i termini descrittivi al contorno occorrono competenze avanzate, non raggiungibili con diplomi di scuola superiore e, nei casi più frequenti, nemmeno con lauree triennali o magistrali. È irragionevole pretendere che da approcci elementari possano scaturire miracolose intuizioni che risolvano problemi da centinaia di anni sul tappeto, su cui hanno faticato, prima di noi, personaggi “dalle spalle larghe”!

Silvia Camisasca

© RIPRODUZIONE RISERVATA