

Analisi del circuito di stabilizzazione in ampiezza dell'oscillatore a ponte di Wien

Nota: nel testo sono riportati dei richiami a alcuni approfondimenti riportati alla fine di questo lavoro

La presente trattazione fa riferimento allo schema di Fig. 1 dove è rappresentato un oscillatore a ponte di Wien con la rete di stabilizzazione dell'ampiezza. L'analisi è svolta con l'obiettivo di dimensionare correttamente la rete di stabilizzazione dell'ampiezza e valutare la distorsione da essa prodotta sulla tensione di uscita. L'analisi si basa sulla sostituzione del ramo non lineare del circuito (il ramo contenente gli zener) con due generatori di corrente equivalenti. Il primo generatore I_1 contiene la sola componente fondamentale, alla frequenza dell'oscillatore, della corrente che circola negli zener, mentre il secondo generatore I_N contiene tutta la componente armonica della suddetta corrente. In questo modo la somma delle correnti dei due generatori coincide con la totale corrente che circola negli zener.

Nei calcoli si utilizza l'ipotesi semplificativa che la tensione di uscita dell'oscillatore sia pressoché sinusoidale e sia pressoché sinusoidale anche la tensione ai capi del ramo del circuito che contiene gli zener.

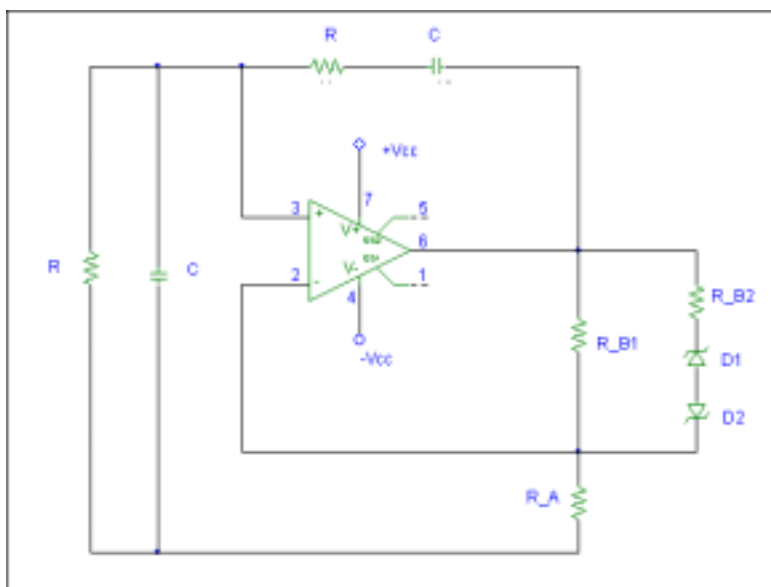


Fig.1 - Schema dell'oscillatore a ponte di Wien con rete di stabilizzazione dell'ampiezza

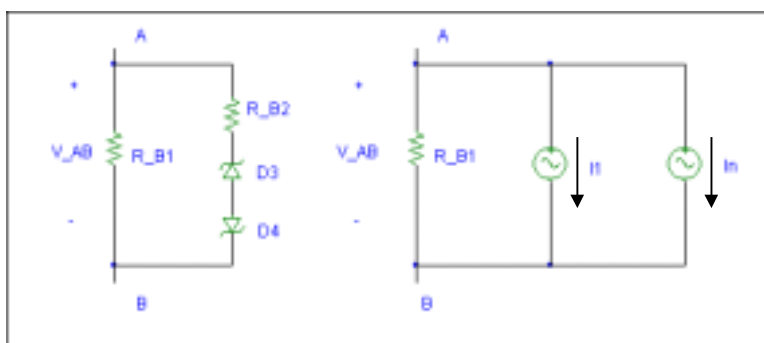


Fig.2 - Sostituzione della rete non lineare con due generatori di corrente: I_1 per la componente fondamentale e I_N per la componente armonica

La corrente che circola negli zener è diversa da zero solo quando la tensione v_{AB} supera la tensione di zener V_Z . Essa può essere calcolata a partire dalla tensione sulla resistenza R_{B2} di Fig.2 e vale:

$$\begin{aligned} v_{R_{B2}} &= v_{AB} - V_Z && \text{per } v_{AB} \geq V_Z \\ v_{R_{B2}} &= v_{AB} + V_Z && \text{per } v_{AB} \leq -V_Z \\ v_{R_{B2}} &= 0 && \text{per } |v_{AB}| \leq V_Z \end{aligned}$$

In una rappresentazione normalizzata rispetto a V_{AB} , la forma d'onda della tensione ai capi di R_{B2} , mostrata in Fig.3, Limitandoci al primo semiperiodo tale tensione assume un valore nullo per

$$v_{R_{B2}}^N = 0 \quad \text{per } \alpha < \alpha_1 \quad \text{e} \quad \alpha > 180 - \alpha_1$$

e valore non nullo altrove

$$v_{R_{B2}}^N = \frac{v_{AB}(a)}{V_{AB}} = \frac{V_{AB} \cdot \sin(\alpha)}{V_{AB}} - \frac{V_Z}{V_{AB}} = \sin(\alpha) - X_b \quad \text{per } \alpha_1 < \alpha < 180 - \alpha_1$$

Nelle precedenti equazioni sono state fatte le seguenti assunzioni:

$$\alpha_1 = a \sin(X_b) \quad \text{e} \quad X_b = \frac{V_Z}{V_{AB}}$$

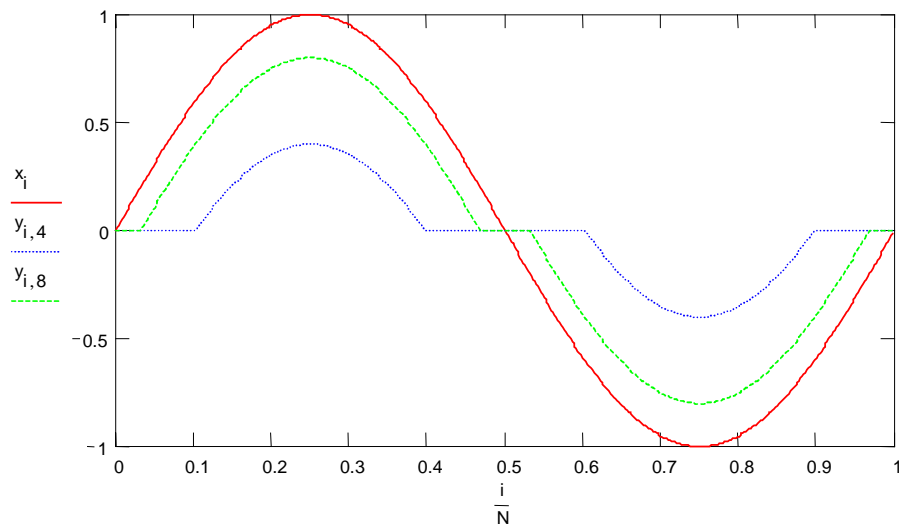


Fig.3 - Tensione sulla resistenza R_{B2} per diversi rapporti tra la tensione di zener V_Z e l'ampiezza della sinusoide V_{AB}

Continuando ad operare su grandezze normalizzate, dalla forma d'onda di Fig.3 si ricava la componente armonica fondamentale, parametrizzata con X_b della tensione su R_{B2} . Sfruttando la simmetria della forma d'onda, l'integrale è calcolato su un quarto di periodo:

$$X_1 = \frac{4}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\alpha) \cdot (\sin(\alpha) - X_b) d\alpha$$

$$X_1 = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha_1) \cdot \sin(\alpha_1) - \frac{1}{2} \cdot \alpha_1 - X_b \cdot \cos(\alpha_1) \right)$$

ora, sostituendo l'espressione di α_1 , si ottiene

$$X_1 = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - X_b^2} \cdot X_b - \frac{1}{2} \cdot \arcsin(X_b) \right)$$

Questa espressione fornisce il valore normalizzato della componente fondamentale (prima armonica) della tensione sulla resistenza R_B2, in funzione del rapporto X_b fra la tensione degli zener V_z e l'ampiezza della tensione V_{AB} ai capi del circuito. Il suo andamento è riportato in Fig. 4 in funzione del rapporto X_b

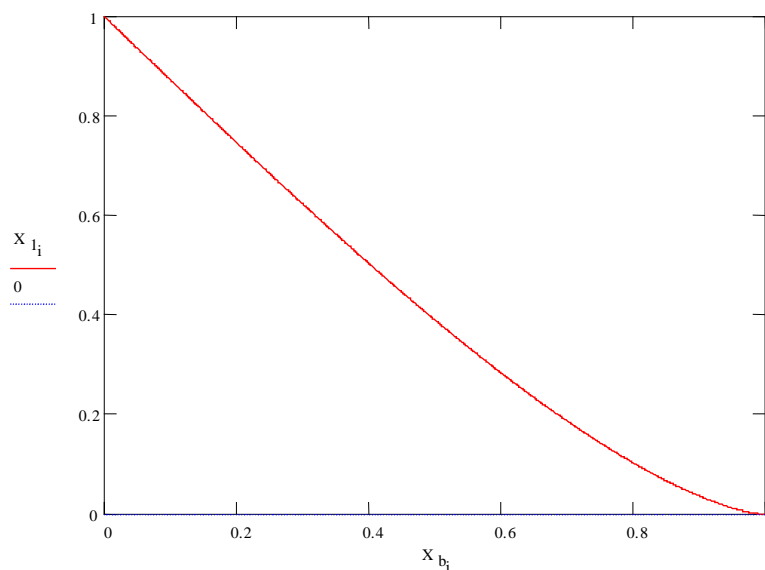


Fig.4 - Andamento della componente di prima armonica della tensione sulla resistenza R_B2 normalizzata rispetto alla tensione V_{AB} in funzione del rapporto X_b fra la tensione di zener V_z e l'ampiezza della tensione V_{AB}

-----APPROFONDIMENTI-----

Linearizzazione della caratteristica

Dall'analisi precedente risulta che il generatore I_1 impone una corrente sinusoidale in fase con la tensione V_{AB} , anch'essa sinusoidale (per ipotesi di lavoro), presente ai suoi capi. Quindi è equivalente ad una resistenza R_{equiv} di valore:

$$R_{equiv} = \frac{V_{AB}}{I_1} = \frac{V_{AB}}{V_{R_{B2_1}}} R_{B2}$$

da cui si può scrivere

$$\frac{R_{equiv}}{R_{B2}} = \frac{V_{AB}}{V_{R_{B2_1}}}$$

quindi il grafico di Fig.4 può anche rappresentare l'andamento del rapporto R_{B2} / R_{equiv} in funzione di X_b .

Il risultato dell'analisi precedente è che la rete non lineare può essere sostituita con un circuito parallelo costituito da una resistenza di valore R_{equiv} e da un generatore di corrente I_N .

Per avere la condizione di oscillazione del ponte di Wien l'amplificatore deve avere guadagno pari a 3 quindi si deve porre $R_B = R_{B1} // R_{equiv} = 2 * R_A$ e questo consente di definire una procedura di progetto:

Sia dato V_{out} (ampiezza della tensione di uscita dell'oscillatore)

1. Dalla condizione di oscillazione si ottiene $V_{AB} = 2/3 V_{out}$
2. Si sceglie il valore per il rapporto V_z / V_{AB}
3. Si impone un valore arbitrario per R_A
4. Si impone il valore R_{B1} leggermente maggiore (+10%) del valore teorico $2 * R_A$ per garantire la partenza dell'oscillazione
5. Dall'espressione $2 * R_A = R_B = R_{B1} // R_{equiv}$ si calcola R_{equiv}
6. Dal grafico, noto V_z / V_{AB} , si determina R_{equiv} / R_{B2}
7. Resta determinato il valore di R_{B2}
8. Ora si possono riscaldare proporzionalmente i valori di resistenza R_A , R_{B1} e R_{B2} per avere dei valori compatibili con la corrente erogabile dall'operazionale (che fissa un valore minimo per le resistenze) e la corrente di polarizzazione negli zener (che fissa un valore massimo)

-----APPROFONDIMENTI-----

 Criteri di progettazione

Analisi del contenuto armonico

Per analizzare il contenuto armonico della tensione di uscita occorre valutare la funzione di trasferimento fra il generatore I_N e la tensione di uscita V_{out} dell'oscillatore. Essa risulta

$$W_N(s) = \frac{V_{out}}{I_N} = -R_B \frac{1 + s3RC + (sRC)^2}{1 + (sRC)^2}$$

Si vede che la FdT ha due poli complessi coniugati alla frequenza di oscillazione che le danno un guadagno infinito, ed una coppia di zeri reali. Il segnale di ingresso (I_N) non ha componenti alla frequenza fondamentale dell'oscillatore ma contiene armoniche dispari. Osservando il diagramma asintotico, si trova che, per le componenti armoniche, il guadagno risulta costante. Infatti il secondo zero, oltre al quale il modulo della FdT è costante su tale diagramma, è a circa 2.62 volte la fondamentale e la prima armonica è a 3 volte la fondamentale. In pratica tutte le armoniche presenti sulla tensione su R_{B2} sono riportate in uscita con un rapporto pari a quello delle resistenze R_B / R_{B2} e che vale.

$$\frac{R_B}{R_{B2}} = \frac{\beta^2 - 1}{\beta}$$

Per migliorare la situazione è anche possibile modificare lo schema nel modo mostrato in Fig.6 dove si sfrutta l'effetto filtrante della rete di Wien per ottenere un segnale a distorsione inferiore. La nuova uscita V_{out} presenta ancora la stessa ampiezza di segnale alla componente fondamentale in quanto i due amplificatori hanno lo stesso guadagno sulla tensione presente agli ingressi invertenti. Però questa tensione è meno corrotta dalla presenza del generatore I_N . La nuova funzione di trasferimento risulta:

$$W_N(s) = -R_B \frac{sRC}{1 + (sRC)^2}$$

che presenta un solo zero nell'origine e quindi il suo modulo continua a diminuire all'aumentare della frequenza e le armoniche in uscita vengono attenuate in modo proporzionale al loro ordine.

Il risultato di una simulazione di ponte di Wien progettato secondo i criteri appena esposti, è riportato in Fig.7. Si vede la tensione sulla uscita a bassa distorsione V_{out2} e la tensione differenza fra le due uscite (bassa distorsione e uscita naturale), amplificata di 10 volte. Questa differenza mostra la cancellazione della componente fondamentale, praticamente coincidente per le due uscite, mentre mostra un residuo sostanzialmente di terza armonica che è presente sull'uscita *naturale* dell'oscillatore a ponte di Wien e non sulla nuova uscita.

Esistono molte varianti dell'oscillatore a ponte di Wien che sono intese a migliorarne le prestazioni, ma, generalmente sono tutte facilmente riconducibili alla topologia di base. Lo stesso si può dire per il circuito di limitazione del guadagno e quindi anche la teoria di analisi proposta con questo lavoro può facilmente essere estesa anche a situazioni diverse.

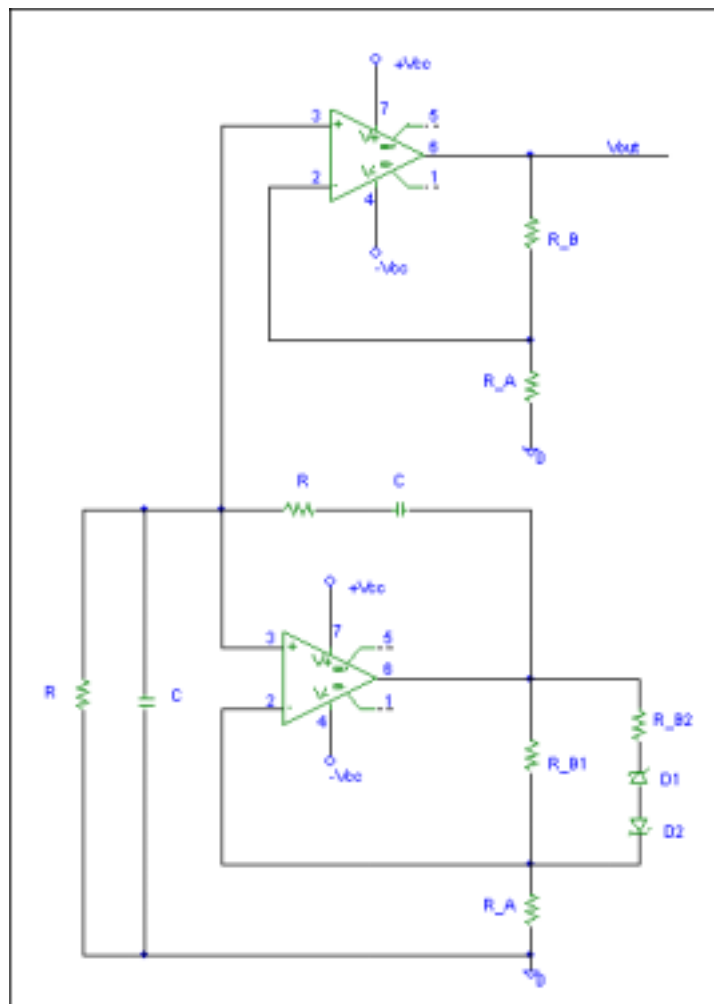


Fig.6 - Schema dell'oscillatore a ponte di Wien con rete di stabilizzazione dell'ampiezza e con uscita a bassa distorsione

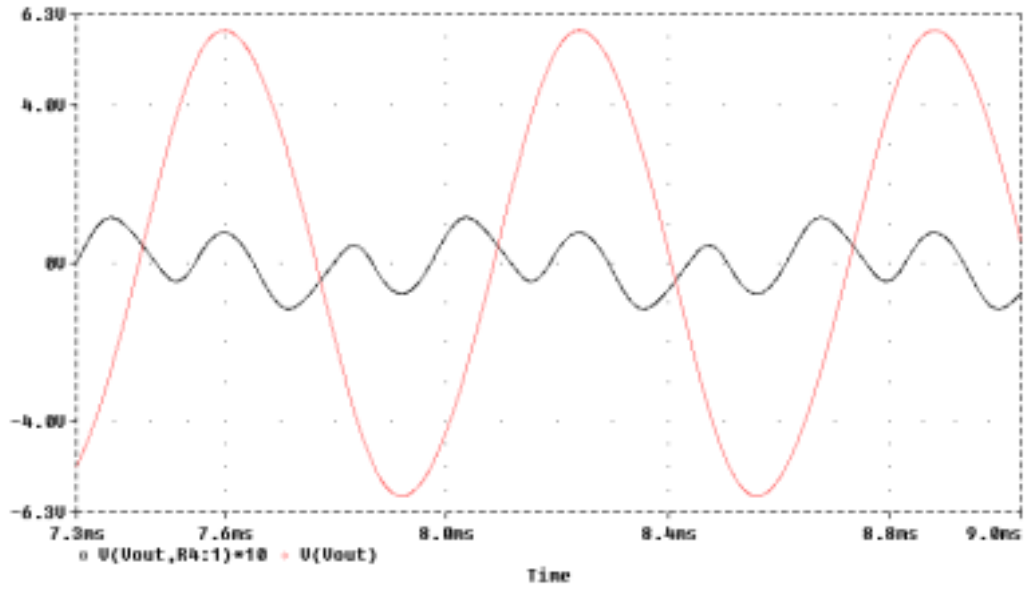


Fig.7 - Tensione di uscita dell'oscillatore a ponte di Wien (Vout_1) e differenza fra la tensione fra l'uscita a bassa distorsione e quella "naturale" . Questa tensione è amplificata di 10 volte (10(Vout-2 - Vout_1)).

-----APPROFONDIMENTI-----

Linearizzazione della caratteristica

Per avere una linearizzazione della curva per piccoli valori di X_b si può derivare l'espressione trovata in precedenza ottenendo:

$$\dot{X}_1 = \frac{4}{\pi} \left[\frac{X_b^2 - 1}{(2 \cdot \sqrt{1 - X_b^2})} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - X_b^2} \right]$$

che, come mostrato in Fig.5, vale circa -1.25 per X_b prossimi a zero. Tale espressione può quindi essere approssimata dall'equazione:

$$X_1 = 1 - 1.25 \cdot X_b$$

valida per tensioni di zener non superiori al 30% della tensione V_{AB} ai capi del circuito di limitazione.

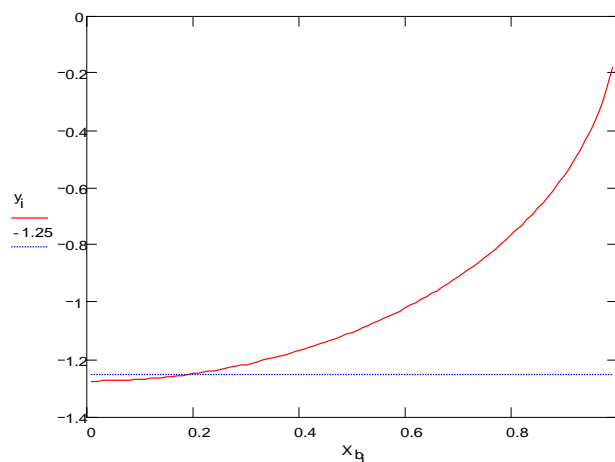


Fig.5 - Valutazione della pendenza della curva di Fig.4

Criteri di progettazione

Nel progetto così definito deve essere scelta (punto 2) la tensione di zener V_z . E' interessante avere un criterio per la sua scelta. Risulta conveniente che tale scelta sia per valori di tensione possibilmente bassi (rispetto a V_{AB}) in base alle seguenti considerazioni:

1. Il valore di R_{equiv} non dipende dalla tensione degli zener ma solo da R_A ed R_{B1} . Di conseguenza anche la corrente I_1 dipende solo dalla scelta di R_A ed R_{B1} .
2. E' conveniente che la componente I_N sia il più piccola possibile per avere meno distorsione sulla tensione di uscita
3. Dai punti precedenti risulta conveniente che il rapporto I_1 / I_N sia massimo cioè che la corrente sugli zener sia *il più sinusoidale possibile* e questo si ottiene se la caduta sugli zener è minima e quella su R_{B2} è massima.

Come si vedrà a breve, il valore minimo di V_Z risulta limitato dal fatto di avere fissato il guadagno massimo per consentire di far funzionare il circuito anche in considerazione delle tolleranze dei componenti e della non idealità dell'amplificatore operazionale. Finché $V_{AB} < V_Z$ gli zener sono spenti e il guadagno dell'amplificatore risulta massimo e tale condizione è necessaria per far iniziare l'oscillazione. Il guadagno vale:

$$A_{V_max} = 1 + \frac{R_{B1}}{R_A} = 1 + \beta \frac{R_B}{R_A} = 1 + \beta \cdot 2$$

dove β rappresenta l'incremento di R_{B1} dal suo valore nominale R_B che fornisce l'aumento di guadagno necessario ad iniziare l'oscillazione. Il suo valore risulta:

$$\beta = \frac{R_{B1}}{R_B} = \frac{A_{V_max} - 1}{2}$$

Fissato il valore di β , si può ottenere il valore della R_{equiv} che garantisce l'oscillazione sapendo che il suo parallelo con R_{B1} deve valere R_B :

$$R_{equiv} = \frac{R_{B1} \cdot R_B}{R_{B1} - R_B} = R_B \frac{\beta}{\beta - 1}$$

Scegliendo ora il rapporto V_Z / V_{AB} si impone, dal grafico di Fig. 4, il rapporto $X_{1_N} = R_{B2} / R_{equiv}$ dal quale il valore di R_{B2} risulta:

$$R_{B2} = X_{1_N} \cdot R_{equiv} = X_{1_N} \cdot R_B \frac{\beta}{\beta - 1}$$

concludendo così il progetto.

Fissati ora i valori di R_A , R_{B1} , R_{B2} , si può determinare l'andamento del guadagno (riferito alle sole componenti fondamentali di tensione e di corrente) al variare dell'ampiezza del segnale di uscita. Tale guadagno sarà maggiore di 3 per ampiezze V_{AB} prossime a zero, e sarà minore di 3 per valori elevati di V_{AB} .

$$R_{equiv} = \frac{R_{B2}}{X_1} = R_B \frac{\beta}{\beta - 1} \frac{X_{1_N}}{X_1}$$

$$A_V = 1 + \frac{R_{B1} // R_{equiv}}{R_A} = 1 + \frac{(\beta \cdot R_B) // \left(\frac{\beta}{\beta - 1} \frac{X_{1_N}}{X_1} \right)}{R_A} = 1 + 2 \frac{X_{1_N} \cdot \beta}{X_{1_N} + (\beta - 1) \cdot X_1}$$

L'andamento del guadagno è infine riportato in Fig.6 sempre al variare del rapporto X_b fra la tensione di zener V_Z e l'ampiezza della tensione V_{AB} . Si vede che per valori elevati di V_{AB} , il valore di X_b è basso e il guadagno risulta inferiore a 3. Viceversa il guadagno aumenta per valori bassi di V_{AB} . L'ampiezza (stabile) dell'oscillazione sarà quindi in corrispondenza del punto di intersezione fra le due curve di Fig. 6.

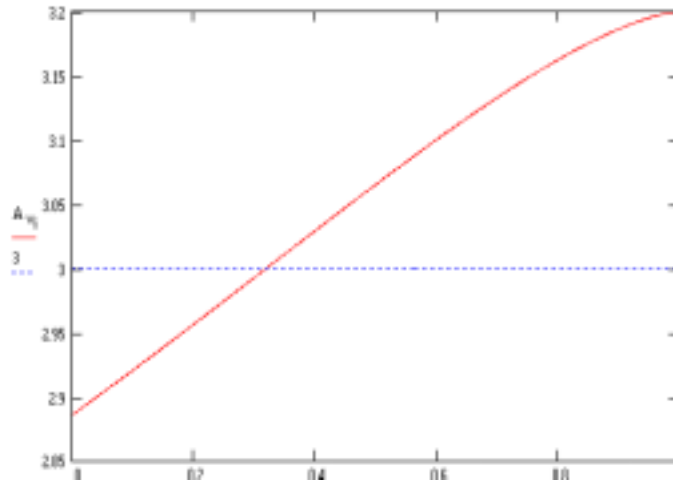


Fig.6 - Andamento del guadagno A_V in funzione del rapporto X_b fra la tensione di zener V_z e l'ampiezza della tensione V_{AB} ($K=0.6$, $\beta=1.1$)

Dalle precedenti equazioni si trova che i valori minimo e massimo del guadagno risultano:

$$A_{V_min} = 1 + 2 \cdot \beta \cdot \frac{X_{1_N}}{X_{1_N} + (\beta - 1)}$$

$$A_{V_max} = 1 + 2 \cdot \beta$$

tali valori devono essere in grado di coprire le variazioni di guadagno richieste dal fatto che i componenti utilizzati nella realizzazione dell'oscillatore a ponte di Wien non sono ideali e quindi la condizione di oscillazione richiederà un valore di guadagno diverso da quello teorico (3).

Volendo porre una variazione simmetrica δ di guadagno attorno al valore nominale deve risultare:

$$A_{V_max} = 1 + 2 \cdot \beta = 3 \cdot (1 + \delta)$$

$$A_{V_min} = 1 + 2 \cdot \beta \cdot \frac{X_{1_N}}{X_{1_N} + (\beta - 1)} = 3 \cdot (1 - \delta)$$

ricavando δ dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda, risulta

$$\delta = \frac{2}{3}(\beta - 1)$$

$$1 + 2 \cdot \beta \cdot \frac{X_{1_N}}{X_{1_N} + (\beta - 1)} = 3 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}(\beta - 1)\right)$$

da cui

$$X_{1_N} = \frac{1}{2} - \frac{\beta}{4}$$

Quindi, per avere una escursione simmetrica del guadagno intorno al suo valore teorico, il rapporto fra la tensione di zener V_z e l'ampiezza della tensione V_{AB} risulta inferiore a $1/2$ e tanto più basso quanto è alto il valore massimo del guadagno che si sceglie.

Si osserva che potrebbe non essere possibile garantire una escursione simmetrica del guadagno intorno al valore teorico.