ESERCIZIO : AMPLIFICATORE DIFFERENZIALE

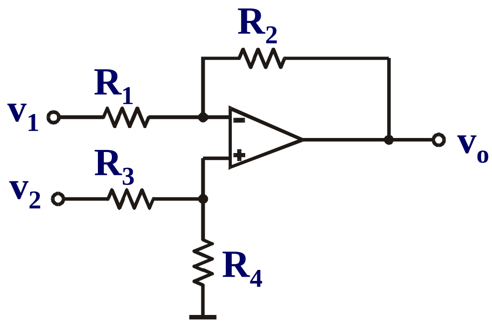

Figura 1

SOLUZIONE

La tensione di uscita può essere ricavata applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, e cioè considerando l'azione della tensione v_1 e della tensione v_2 agenti una alla volta (l'amplificatore operazionale è considerato ideale):

$$v_0 = v_0' + v_0'' = -\frac{R_2}{R_1}v_1 + \frac{R_4}{R_3+R_4}\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)v_2 \tag{1}$$

Se le resistenze fossero ideali, essendo soddisfatta la seguente condizione:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3} \tag{2}$$

la tensione di uscita dipenderebbe solo dalla differenza delle due tensioni applicate agli ingressi secondo la relazione:

$$v_0 = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1) \tag{3}$$

In tali condizioni, il CMRR sarebbe infinito. Considerando la tolleranza del valore delle resistenze, per calcolare l'espressione del CMRR esprimiamo le tensioni v_1 e v_2 in funzione delle loro componenti differenziali e di modo comune:

$$\begin{cases} v_1 = v_{cm} + \dfrac{v_{dm}}{2} \\ v_2 = v_{cm} - \dfrac{v_{dm}}{2} \end{cases} \tag{4}$$

Sostituendo nella (1) otteniamo:

$$v_0 = A_{dm}v_{dm} + A_{cm}v_{cm} \tag{5}$$

dove:

$$A_{dm} = -\frac{1}{2}\left[\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_4}{R_3}\frac{1+\frac{R_2}{R_1}}{1+\frac{R_4}{R_3}}\right] \tag{6}$$

$$A_{cm} = \frac{R_4}{R_3}\frac{1+\frac{R_2}{R_1}}{1+\frac{R_4}{R_3}} - \frac{R_2}{R_1} \tag{7}$$

Per semplificare la notazione, poniamo:

$$\begin{cases} x = \frac{R_2}{R_1} \\ y = \frac{R_4}{R_3} \end{cases} \tag{8}$$

Il rapporto di reiezione di modo comune risulta:

$$CMRR = \left|\frac{A_{dm}}{A_{cm}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{x+y+2xy}{y-x}\right| = f(x,y) \tag{9}$$

Si tratta quindi di calcolare il minimo di una funzione di due variabili all'interno della regione A definita dai valori massimi e minimi di x e di y, come mostrato in figura 2.

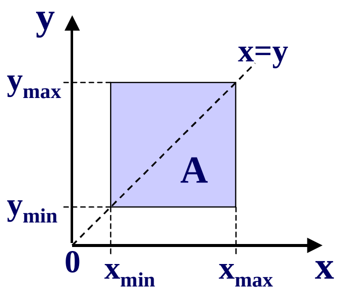

Figura 2

Essendo il numeratore simmetrico rispetto a x e y, il CMRR assume gli stessi valori sia nella regione $y > x$ che nella regione $y < x$. Possiamo quindi limitare lo studio alla regione $y > x$, in modo da poter togliere il valore assoluto dalla (9). Dalla teoria sappiamo che condizione necessaria affichè una funzione f(x,y), definita su un insieme aperto A, ivi continua insieme alle derivate prime e seconde, abbia nel punto $(x_0,y_0) \in A$ un minimo locale è che sia:

1) $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$ (10.a)

2) $\alpha^2 f_{xx}(x_0,y_0) + 2\alpha\beta f_{xy}(x_0,y_0) + \beta^2 f_{yy}(x_0,y_0) \geq 0 \quad \forall\alpha,\beta$ (10.b)

dove $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, etc.

Le derivate parziali prime di f(x,y) sono:

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{2y(1+y)}{(y-x)^2} \\ f_y = -\dfrac{2x(1+x)}{(y-x)^2} \end{cases} \qquad (11)$$

che si annullano in (0,0) e (-1,-1) che sono entrambi punti al di fuori della regione di interesse. Pertanto il punto di minimo è da ricercarsi sulla frontiera di A. A questo punto è facile verificare che tale minimo si ottiene ai vertici della regione A, cioè nei punti (x_{min}, y_{max}) e (x_{max}, y_{min}), cioè:

$$CMRR_{min} = \frac{1}{2}\left|\frac{x_{min} + y_{max} + 2x_{min}y_{max}}{y_{max} - x_{min}}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{x_{max} + y_{min} + 2x_{max}y_{min}}{y_{min} - x_{max}}\right| \qquad (12)$$

Dalla (8) otteniamo (con il pedice N si indicano i valori nominali delle resistenze):

$$\begin{cases} x_{min} = \dfrac{R_{2min}}{R_{1max}} = \dfrac{R_{2N}(1-\alpha)}{R_{1N}(1+\alpha)} = k\dfrac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)} \\ y_{max} = \dfrac{R_{4max}}{R_{3min}} = \dfrac{R_{4N}(1+\alpha)}{R_{3N}(1-\alpha)} = k\dfrac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)} \end{cases} \qquad (13)$$

Sostituendo la (13) nella (12) otteniamo:

$$CMRR_{min} = \frac{1+\alpha^2 + k(1-\alpha^2)}{4\alpha} \qquad (14)$$

Con i valori numerici dati si ottiene un CMRR minimo pari a 142.5 (≈43dB).