

**RICHIAMI SULLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO,  
TRASFORMATE DI FOURIER E LAPLACE E DIAGRAMMI DI BODE**  
**Università di Padova – Facoltà di Ingegneria**  
**Corso di Fondamenti di Elettronica – A.A.2004/2005**  
**Padova, 14/01/2005**

Le note seguenti sono un richiamo di nozioni che sono già note dai Corsi precedenti. Esse hanno lo scopo di dare un sussidio alle Lezioni e costituire un conciso riferimento a concetti di importanza fondamentale per lo studio dell'Elettronica.

La materia che segue, anche se la sua conoscenza è necessaria, non costituisce tuttavia oggetto diretto delle domande di esame del Corso di fondamenti di Elettronica.

**1 – Sistemi differenziali lineari**

In molti sistemi fisici le grandezze in gioco, funzioni del tempo, si possono considerare legate tra loro da relazioni **differenziali lineari**. Cioè, se si hanno n grandezze  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , si possono scrivere un certo numero r di equazioni del tipo

$$\sum_{p=1}^n A_{1p} u_p + \sum_{p=1}^n B_{1p} \frac{du_p}{dt} + \sum_{p=1}^n C_{1p} \int u_p dt + D_1 = 0$$

$$\sum_{p=1}^n A_{2p} u_p + \sum_{p=1}^n B_{2p} \frac{du_p}{dt} + \sum_{p=1}^n C_{2p} \int u_p dt + D_2 = 0$$

(1)

.....

$$\sum_{p=1}^n A_{rp} u_p + \sum_{p=1}^n B_{rp} \frac{du_p}{dt} + \sum_{p=1}^n C_{rp} \int u_p dt + D_r = 0$$

che, per derivazione, si possono ricondurre ad equazioni differenziali nel tempo.

Se in ogni relazione ogni addendo contiene una sola variabile o una sua derivata od integrale, **senza prodotti o elevamenti a potenza** delle variabili, o delle loro derivate o dei loro integrali, il sistema gode della proprietà della **sovrapposizione degli effetti**, e si considera **lineare**.

Normalmente nelle (1) molti dei coefficienti A, B e/o C sono nulli, cioè in ognuna delle equazioni mancano una o più variabili..

Se i coefficienti A, B, C e D sono costanti, cioè indipendenti dal tempo e dai valori delle  $u_i$ , il sistema **lineare** viene detto **a coefficienti costanti**.

Esempi di sistemi che possono essere rappresentati con equazioni lineari del tipo delle (1) sono i circuiti elettrici, alcuni movimenti inerziali e gravitazionali a parametri concentrati e molti altri fenomeni fisici lineari. Il comportamento di molti altri sistemi può essere rappresentato dalle (1) con approssimazioni più o meno grandi, ad esempio limitando il campo di variazione delle grandezze in gioco.

Un esempio di sistema rappresentabile con equazioni differenziali lineari del tipo (1) è illustrato in Appendice.

Tra le variabili  $u_i$  del sistema, alcune possono essere assegnate o determinate da vincoli esterni. Esse sono quindi “variabili indipendenti” con il significato fisico di “cause”. Le altre variabili sono determinate dalle equazioni (1) e sono “variabili dipendenti” da considerare come “effetti”. Il numero e la struttura delle equazioni (1) deve essere tale da determinare gli effetti in funzione delle cause.

Si deve tener presente tuttavia che nelle (1) la distinzione tra cause ed effetti non compare. Essa è determinata da considerazioni aggiuntive che non alterano la struttura delle relazioni stesse.

Ad esempio nel caso del circuito considerato in Appendice, nelle relazioni (A.1) le variabili che si possono considerare cause, cioè il generatore di tensione  $e_1$  ed il generatore di corrente  $h_5$ , compaiono nelle relazioni assieme alle altre variabili, senza particolari distinzioni. Ovviamente, le (1) e/o le (A.1) possono essere rielaborate in modo da porre in evidenza le cause e/o gli effetti.

## 2 – Sovrapposizione degli effetti

Se il sistema contiene una sola variabile o una sua derivata od integrale, *senza prodotti o elevamenti a potenza* delle variabili, o delle loro derivate o dei loro integrali, si dimostra facilmente che vale il *principio di sovrapposizione degli effetti*, che dice che se un insieme di variabili  $u_1', u_2', \dots, u_n'$  soddisfa il sistema (1), cioè ne è una soluzione, ed un altro sistema di variabili  $u_1'', u_2'', \dots, u_n''$  soddisfa anch'esso lo stesso sistema, anche l'insieme di variabili  $u_1''' = (u_1' + u_1'')$ ,  $u_2''' = (u_2' + u_2'')$ , ...,  $u_n''' = (u_n' + u_n'')$  è una soluzione, cioè soddisfa il sistema. In tal caso il sistema è detto *lineare*.

Da questa proprietà discende immediatamente che le soluzioni del sistema si possono calcolare trovando gli effetti di ciascuna causa separatamente dalle altre (cioè considerando successivamente una causa e ponendo a zero le altre) e sommando poi per ciascuna variabile gli effetti così calcolati. Naturalmente quanto detto è valido se le diverse cause sono realmente indipendenti, cioè non dipendono né dalle soluzioni né dalle altre cause. La soluzione del sistema (1) si fa seguendo le note tecniche di soluzione delle equazioni differenziali lineari (si veda l'esempio in Appendice).

Un'altra conseguenza del principio di sovrapposizione degli effetti è il *principio di proporzionalità*, che dice che se un insieme di variabili  $u_1', u_2', \dots, u_n'$  soddisfa il sistema (1), anche l'insieme di variabili  $u_1'' = K \cdot u_1'$ ,  $u_2'' = K \cdot u_2'$ , ...,  $u_n'' = K \cdot u_n'$ , dove  $K$  è costante ed uguale per tutte le variabili, è una soluzione del sistema. Ne discende che se una causa varia di ampiezza, anche tutti i suoi effetti variano in proporzione.

## 3 – Regime stazionario

La soluzione del sistema (1) può risultare assai laboriosa anche nel caso di sistemi semplici (nel nostro caso un semplice circuito).

Una notevole semplificazione si ha quando *tutte* le variabili  $u_i$  (sia quelle indipendenti sia quelle dipendenti) ed i coefficienti non dipendono dal tempo e non vi sono termini integrali (caso stazionario o "in continua"). In tale caso tutte le derivate sono nulle e le equazioni (1) diventano normali equazioni lineari di soluzione assai più agevole (non ci sono da integrare equazioni differenziali). Un esempio di regime stazionario e della corrispondente soluzione è data in Appendice, par.A.3.

## 4 – Regime periodico

Per un sistema lineare del tipo (1), a coefficienti costanti nel tempo, se le variabili indipendenti sono sinusoidi di pulsazione  $\omega$ , anche tutte le variabili dipendenti, cioè gli effetti, sono sinusoidi di pulsazione  $\omega$  e di ampiezza e fase opportune (regime alternato sinusoidale).

Più in generale, applicando la sovrapposizione degli effetti, ogni variabile indipendente  $g_i$  che sia sinusoidale con pulsazione  $\omega_i$  genera in tutte le variabili dipendenti termini della stessa pulsazione. Se vi sono più variabili indipendenti sinusoidali di pulsazione diversa, nelle variabili dipendenti compaiono termini sinusoidali con tutte e sole le pulsazioni delle variabili indipendenti (ad esempio, se vi sono solo due variabili indipendenti  $g_1$  di pulsazione  $\omega_1$  e  $g_2$  di pulsazione  $\omega_2$ , nelle variabili dipendenti compaiono solo due termini sinusoidali, l'uno di pulsazione  $\omega_1$  e l'altro di pulsazione  $\omega_2$ ).

Un caso importante si ha quando diverse variabili indipendenti, o anche una stessa variabile, contenga termini sinusoidali di pulsazione  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots, n \cdot \omega$ . Tali pulsazioni multiple della pulsazione fondamentale  $\omega$  vengono dette "*armoniche*". I relativi termini si propagano a tutte le variabili dipendenti, ma normalmente con variazioni di fase e di ampiezza diverse tra loro e rispetto alla fondamentale. La forma d'onda complessiva varia quindi da una variabile dipendente all'altra e rispetto alla fondamentale (*distorsione*).

E' bene ricordare che la risposta sinusoidale ad ingressi sinusoidali si ha nell'ipotesi che il sistema sia "*a regime*", il che equivale a supporre che le variabili indipendenti sinusoidali agiscano "*da sempre*" e che ogni conseguenza di transitori precedenti si sia esaurita.

La proprietà sopra enunciata ha una grande importanza pratica. Infatti, in un sistema elettrico anche molto esteso se i generatori producono tensioni sinusoidali, tali tensioni si propagano in tutta la rete con *forma inalterata*, anche se con ampiezza e fase variabili da punto a punto. E' questa la principale ragione dell'adozione di un andamento sinusoidale nelle reti di distribuzione dell'energia elettrica. Ragioni simili valgono, almeno in parte, anche per la trasmissioni di segnali radio e televisivi.

Come è noto dall'Elettrotecnica, nel caso che le variabili indipendenti, e quindi anche quelle dipendenti, abbiano andamento sinusoidale del tipo  $u_i = A_i \sin(\omega t + \gamma_i)$ , esse possono essere rappresentate da vettori rotanti con velocità angolare  $\omega$  e di ampiezza  $A_i$  e fase  $\gamma_i$ .

Considerando la situazione in un dato istante (usualmente  $t=0$ ), il vettore relativo ad una data variabile  $u_i$  può essere posto in corrispondenza ad un numero complesso  $U_i$ , la cui parte reale è data dalla proiezione del vettore sull'asse X (asse reale **Re**) e la parte immaginaria dalla proiezione sull'asse Y (asse immaginario **Im**). In tal modo il numero

complesso ha modulo  $A_i$ , fase  $\gamma_i$ , parte reale  $R_{ai} = A_i \cdot \cos(\gamma_i)$  e parte immaginaria  $I_{ai} = A_i \cdot \sin(\gamma_i)$ . Si ha quindi  $U_i = R_{ai} + j \cdot I_{ai}$  (**rappresentazione simbolica**)

Come è noto, la derivata di una funzione sinusoidale di ampiezza  $A_i$ , pulsazione  $\omega$  e fase  $\gamma_i$ , è una senoide di ampiezza  $\omega \cdot A_i$  e fase  $\gamma_i + \pi/2$ . In corrispondenza, il numero complesso  $U_i'$ , corrispondente alla derivata, si ottiene dal numero complesso  $U_i$ , che rappresenta la funzione originaria, moltiplicando per  $j\omega$  e ottenendo  $j\omega \cdot U_i$ . In modo simmetrico, all'operazione di integrazione corrisponde una divisione per  $j\omega$ , e quindi l'integrale è rappresentato da  $U_i/j\omega$ .

Perciò, si possono sostituire nelle (1) alle varie grandezze  $u_i$  i relativi numeri complessi  $U_i$ , moltiplicando per  $j\omega$  ad ogni operazione di derivata e dividendo per  $j\omega$  nel caso di operazioni di integrazione. Si ottiene così un sistema di equazioni lineari nelle variabili complesse  $U_i$ , i cui coefficienti sono anch'essi complessi e funzioni di  $j\omega$ . Tale sistema può essere risolto in modo molto più agevole del sistema originario. Infatti, la integrazione delle equazioni differenziali si riduce alla soluzione di semplici equazioni ordinarie (si veda ad esempio in Appendice il par.A4).

La soluzione dà per ciascuna variabile dipendente  $a_m$  un valore simbolico  $A_m$  espresso dalla somma di vari termini, del tipo

$$A_m = G_1 \frac{N_{1m}(j\omega)}{D_{1m}(j\omega)} + G_2 \frac{N_{2m}(j\omega)}{D_{2m}(j\omega)} + \dots + G_n \frac{N_{nm}(j\omega)}{D_{nm}(j\omega)} \quad (2)$$

Ogni addendo della  $A_m$  nella (2) è dato dalla moltiplicazione della rappresentazione simbolica  $G_k$  di una variabile indipendente  $g_k$  per un **rapporto di due polinomi** in  $j\omega$  (polinomio numeratore  $N_{km}(j\omega)$  e polinomio denominatore  $D_{km}(j\omega)$ ). Nel caso di grandezze elettriche, tale rapporto, che è un numero complesso **funzione solo di  $j\omega$** , assume il significato di fattore di trasferimento, o di trans-impedenza oppure di trans-ammettenza a seconda della natura di  $a_m$  e di  $g_k$  (tensioni o correnti). Estendendo una definizione che è più propriamente valida nel caso di regime transitorio, il rapporto può anche essere indicato come **"Funzione di Trasferimento"** tra la variabile indipendente  $g_k$  e la variabile dipendente  $a_m$ .

## 5 – Regime transitorio

Nel caso che le variabili  $u_i$  non abbiano andamento periodico, ma si possa supporre che siano tutte **nulle prima di un determinato istante** (assunto usualmente come  $t=0$ ) è possibile introdurre una trasformazione di dette variabili che facilita molto la soluzione del sistema, e inoltre si presta a molti altri sviluppi ed alla illustrazione di svariate proprietà fondamentali.

La definizione della trasformazione, detta **"Trasformata di Laplace"** o sinteticamente **"L-trasformata"**, è data come segue. Per una funzione del tempo  $f(t)$ , si ottiene una funzione trasformata  $F(s)$  secondo l'integrale

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (3)$$

La trasformazione inversa è data da

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s) \cdot e^{+st} ds \quad (4)$$

dove  $a$  è un valore reale maggiore della cosiddetta ascissa di convergenza  $\alpha_c$  (che dipende dalla struttura della  $F(s)$ ).

La variabile  $s$  può assumere un qualsiasi valore nel campo complesso, con la limitazione di rimanere entro i limiti di convergenza degli integrali delle (3) e (4).

Il significato della variabile  $s$  risulta dalle definizioni (3) e (4) e non è di immediata comprensione. Qui ci si può limitare a dire che la dipendenza di  $F(s)$  da  $s$  nell'intero campo di validità esprime l'intero andamento di  $f(t)$  nel tempo.

Le dimensioni fisiche di  $s$  sono l'inverso di un tempo, cioè  $t^{-1}$ , e perciò essa è omogenea ad una frequenza o ad una pulsazione.

Per le funzioni  $f(t)$  più comuni, i risultati delle trasformazioni (3) e (4) sono raccolti in tabelle (si veda ad esempio Tab.A.1), e perciò raramente si deve fare esplicitamente il calcolo secondo la (3) o la (4).

Similmente al caso della rappresentazione simbolica (cioè con numeri complessi), le operazioni di derivazione o di integrazione delle variabili  $u_i(t)$  corrispondono alla moltiplicazione o divisione per  $s$  della relativa trasformata  $U_i(s)$ . Si ha cioè per la derivata  $s \cdot U_i(s)$  e per l'integrale  $U_i(s)/s$ . Inoltre, la moltiplicazione di una  $u_i(t)$  per una costante  $K$  corrisponde a  $K \cdot U_i(s)$ .

In base a ciò, nella (1) si possono sostituire alle  $u_i$  le  $U_i(s)$ , alle derivate  $du_i/dt$  i prodotto  $s \cdot U_i(s)$ , ed agli integrali  $\int u_i dt$  i rapporti  $U_i(s)/s$ . Si ottiene così un sistema di equazioni lineari nelle trasformate  $U_i(s)$  delle diverse variabili, con coefficienti funzione di  $s$ .

Indicando con  $a_m$  le variabili  $u_i$  che si considerano variabili dipendenti (o effetti) e con  $g_k$  quelle che si considerano variabili indipendenti (o cause), il sistema può essere risolto rispetto alle trasformate  $A_m(s)$  delle  $a_m$  mediante i comuni metodi di risoluzione delle equazioni lineari (si veda ad esempio in Appendice il par.A.5).

La soluzione dà, per ogni  $A_m(s)$ , una espressione contenente la somma di termini del tipo

$$A_m(s) = G_1(s) \frac{N_{1m}(s)}{D_{1m}(s)} + G_2(s) \frac{N_{2m}(s)}{D_{2m}(s)} + \dots + G_n(s) \frac{N_{nm}(s)}{D_{nm}(s)} \quad (5)$$

Ciascuno degli addendi della  $A_m(s)$  nella (5) contiene la trasformata  $G_k(s)$  di una variabile indipendente  $g_k$  moltiplicata per il rapporto di due polinomi in  $s$  (che si possono indicare come polinomio numeratore  $N_{km}(s)$  e polinomio denominatore  $D_{km}(s)$ ). Tali rapporti, che costituiscono i coefficienti delle  $G_k(s)$ , sono detti “**Funzioni di Trasferimento**” tra  $g_k$  ed  $a_m$ .

Le funzioni di trasferimento sono, come detto, **funzioni di  $s$**  ed esprimono il fattore di proporzionalità tra le trasformate  $G_k(s)$  e  $A_m(s)$ . In particolare esse indicano **il legame** tra una data  $G_k(s)$  ed una certa  $A_m(s)$  quando, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, si valutino gli effetti della  $g_k$  considerata, immaginando che agisca da sola.

Antitrasformando le espressioni delle  $A_m(s)$  ottenute, si determinano gli andamenti nel tempo delle variabili dipendenti  $a_m$  in funzione delle variabili indipendenti  $g_k$ .

Spesso questo procedimento risulta assai più agevole della soluzione diretta e della integrazione delle equazioni integro differenziali (1). Infatti, oltre alla semplificazione della risoluzione del sistema di partenza, per l’antitrasformazione dei diversi termini che danno la soluzione delle  $A_m(s)$  è applicabile generalmente una tecnica che facilita la soluzione e riveste, come si vedrà, anche un notevole interesse teorico.

Per descrivere brevemente tale tecnica di antitrasformazione, si ricorda che, come detto, le funzioni di trasferimento, e di solito anche il loro prodotto con le relative  $G_k(s)$ , possono essere espresse come rapporto di due polinomi in  $s$ . E’ noto che, nel caso (che si verifica normalmente in pratica) che il grado  $n$  del polinomio numeratore sia minore di quello  $p$  del polinomio denominatore, **ogni rapporto di polinomi** può essere posto nella forma

$$\frac{B_1}{s - s_{p1}} + \frac{B_2}{s - s_{p2}} + \dots + \frac{B_i}{s - s_{pi}} + \dots + \frac{B_n}{s - s_{pP}} \quad (6)$$

dove  $s_{pi}$  è una delle  $P$  radici del polinomio denominatore ed  $i$  i cui coefficienti  $B_i$  si determinano in funzione dei coefficienti del numeratore e denominatore secondo semplici procedure. Ognuno degli addendi della (6) ha come antitrasformata una **funzione esponenziale**  $B_i \cdot \exp(s_{pi} \cdot t)$  per cui l’antitrasformazione delle soluzioni si riduce alla determinazione delle radici del polinomio denominatore di ciascuna Funzione di Trasferimento (si veda l’esempio di par.A.5). L’espressione (6) vale nel caso le  $s_{pi}$  siano radici semplici del polinomio denominatore. Con radici multiple, l’espressione risulta più complicata e la sua antitrasformata contiene anche termini esponenziali moltiplicati per il tempo  $t$  o per potenze di  $t$ .

Si può osservare che, se la radice  $s_{pi}$  è complessa, la sua parte immaginaria dà luogo ad una risposta oscillatoria, il cui smorzamento dipende dalla parte reale di  $s_{pi}$ . Se tale parte reale è **negativa**, la risposta è smorzata e diminuisce nel tempo e la risposta è **stabile**. Se, viceversa, la parte reale è **positiva**, si ha una risposta crescente nel tempo che si può classificare come **instabile**.

E’ immediato constatare che il procedimento indicato per la soluzione alle L-trasformate delle variabili del sistema (1) ha una stretta analogia con quello indicato per la rappresentazione simbolica.

In particolare i rapporti dei polinomi che costituiscono le funzioni di trasferimento per le L-trasformate hanno uno stretto legame formale con quelli che si ottengono dalla soluzione col metodo simbolico. **Si può passare dalle espressioni delle funzioni di trasferimento a quelle dei rapporti di polinomi dati dal metodo simbolico semplicemente sostituendo ad  $s$  il numero complesso  $j\omega$ , e viceversa.**

L’analogia tra le due rappresentazioni e la trasformazione tra l’una e l’altra sono molto utili e molto usate in pratica. Tuttavia **si tratta di una analogia solo formale**, perché le due rappresentazioni, anche se riguardano lo stesso sistema, si riferiscono a variabili di natura diversa, l’una relativa al regime periodico (quindi valido da un tempo  $-\infty$  ad un tempo  $+\infty$ ), l’altra relativa ad andamenti transitori, con valori nulli prima dell’istante iniziale. Questa distinzione (senza menzionare qui le analogie con altri regimi ed altre trasformazioni come ad es. l’integrale di Fourier) **spesso non è ben percepita** e può portare a conclusioni e risultati errati. In particolare, sono probabili errori quando si tratta di tener conto, nei fenomeni transitori, delle condizioni iniziali.

Molte volte la rappresentazione simbolica delle variabili di un sistema, o la loro trasformazione di Laplace, hanno un proprio significato ed utilità indipendentemente dalla effettiva risoluzione del sistema e dalla determinazione degli andamenti delle variabili dipendenti.

## 6 – Rappresentazione grafica delle Funzioni di Trasferimento – Diagrammi di Bode

Una Funzione di Trasferimento tra una variabile indipendente (causa) ed una variabile dipendente, che corrisponde al legame tra l'una e l'altra variabile, può essere espressa in funzione di  $s$  o di  $j\omega$ , come indicato in par.6, con le precisazioni date per la validità dell'equivalenza tra le due formulazioni. L'espressione può essere del tipo di rapporto di polinomi in  $s$  o in  $j\omega$ , come quelli delle eq. (2) o (5), o qualsiasi sua trasformazione. In tale espressione sono contenute tutte le informazioni relative alla Funzione di trasferimento stessa, anche se non in forma esplicita (ad esempio le radici del numeratore e del denominatore devono essere determinate risolvendo i rispettivi polinomi).

E' possibile rappresentare in *forma grafica* una Funzione di Trasferimento, a partire dalla sua espressione simbolica, in funzione di  $j\omega$ , tracciando i diagrammi del suo *modulo* e della sua *fase* in funzione della pulsazione  $\omega$ .

Tale rappresentazione è fatta di solito riportando *in scala logaritmica il modulo* ed in *scala lineare la fase* ed usando per entrambi i diagrammi una *scala logaritmica per la pulsazione  $\omega$* . Questa rappresentazione viene indicata come "*Diagramma di Bode*". Due esempi di diagrammi di Bode sono mostrati in Appendice, al par.A.6, Fig.A.5

I diagrammi di Bode sono molto usati, perché mettono in evidenza alcune caratteristiche importanti delle Funzioni di trasferimento che rappresentano.

Ad esempio l'andamento del modulo mostra entro che campo (o campi) di frequenza l'effetto di una data causa è rilevante o trascurabile (tali campi vengono spesso chiamati "*Bande Passanti*"). Le caratteristiche di "*Passa Basso*", "*Passa Banda*", "*Passa Alto*", "*Elimina Banda*" ecc. di un sistema risultano immediatamente evidenti.

Gli andamenti del modulo e/o della fase consentono di individuare con maggiore o minore precisione le locazioni delle radici del numeratore (dette "*zeri*") e di quelle del denominatore (dette "*poli*") e, in caso di radici complesse, di valutarne lo smorzamento (si veda l'esempio di par.A.6). Queste e altre caratteristiche, nel caso di sistemi a catena chiusa (controreazione), consentono inoltre di predire la maggiore o minore stabilità del sistema.

Il diagramma di Bode ha una grande utilità nel lavoro di *progettazione*. Infatti, per le caratteristiche sopra ricordate, e per l'evidenza intuitiva della rappresentazione grafica, esso è di considerevole aiuto ad individuare le modificazioni da introdurre in un dato sistema per avvicinarsi al comportamento voluto.

Normalmente il diagramma di Bode si estende su tutto il campo di interesse della pulsazione  $\omega$ . Spesso (ma non sempre) tale campo comprende tutti i poli e gli zeri, ma in molti casi ci si limita ad intorni più ristretti.

Si ricorda comunque che, per determinare univocamente la Funzione di Trasferimento, basta in generale la conoscenza di un numero di punti  $Z+P$ , dove  $Z$  è il numero degli zeri (radici del numeratore) e  $P$  è il numero dei poli (radici del denominatore). Un diagramma di Bode, per quanto limitato ad un ristretto ambito di pulsazione, contiene quindi una ridondanza di informazioni, che facilitano le applicazioni.

In molti casi in ascissa, al posto della pulsazione  $\omega$ , si indica la *frequenza  $f$*  ad essa proporzionale (si ricorda che  $\omega=2\pi f$ ).

Può essere non inutile ricordare che l'ascissa  $\omega$ , o la corrispondente frequenza  $f$ , rappresenta una *variabile* che consente di valutare le caratteristiche della Funzione di Trasferimento considerata. Tale variabile non ha normalmente *nessuna relazione* con le variabili effettivamente presenti nel sistema (grandezze alternate periodiche o transitori) e con le frequenze degli eventuali segnali periodici applicati al sistema.

Si usa spesso una rappresentazione *semplificata* del diagramma di Bode, detta "*Diagramma di Bode Asintotico*".

Per spiegare tale semplificazione si pone l'espressione della Funzione di Trasferimento nella forma

$$FDT(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = K_p \frac{(j\omega - s_{z1}) \cdot (j\omega - s_{z2}) \cdot \dots \cdot (j\omega - s_{zZ})}{(j\omega - s_{p1}) \cdot (j\omega - s_{p2}) \cdot \dots \cdot (j\omega - s_{pP})} \quad (7)$$

dove  $s_{zk}$  è una delle  $Z$  radici del numeratore, cioè uno zero, e  $s_{pj}$  è una delle  $P$  radici del denominatore, cioè un polo.

Considerando un certo valore di  $\omega$ , *si approssimano* i termini dei prodotti del numeratore con  $(j\omega - s_{zk}) \approx -s_{zk}$  se  $\omega < |s_{zk}|$ , e con  $(j\omega - s_{zk}) \approx j\omega$  se  $\omega > |s_{zk}|$ . Analogamente, *si approssimano* i termini dei prodotti del denominatore con  $(j\omega - s_{pj}) \approx -s_{pj}$  se  $\omega < |s_{pj}|$ , e con  $(j\omega - s_{pj}) \approx j\omega$  se  $\omega > |s_{pj}|$ . Ordinando le radici (zeri e/o poli) in ordine di modulo crescente, con tali approssimazioni la (7) diventa

$$FDT_a(j\omega) = K_p \cdot \frac{(j\omega)^{n-1} \cdot (-s_{zn}) \cdot (-s_{z2}) \cdot \dots \cdot (-s_{zZ})}{(j\omega)^{m-1} \cdot (-s_{pm}) \cdot (-s_{p2}) \cdot \dots \cdot (-s_{pP})} = \\ = K_p \cdot \frac{(-s_{zn}) \cdot (-s_{z2}) \cdot \dots \cdot (-s_{zZ})}{(-s_{pm}) \cdot (-s_{p2}) \cdot \dots \cdot (-s_{pP})} \cdot (j)^{n-m} \cdot (\omega)^{n-m} \quad (8)$$

dove  $s_{zn}$  è la più piccola radice del numeratore il cui modulo è maggiore di  $\omega$  e  $s_{pm}$  è la più piccola radice del denominatore con modulo maggiore di  $\omega$ .

L'espressione (8) rimane inalterata finché  $\omega$ , crescendo, non supera il modulo di una radice. Se, ad esempio,  $|s_{zn}| < |s_{pm}|$ ,  $\omega$  crescendo incontra prima  $s_{zn}$ . Appena questa viene superata, nella (8)  $n$  aumenta di una unità e l'esponente di  $j\omega$  al numeratore viene incrementato di 1. Analogamente per il denominatore se  $|s_{zn}| > |s_{pm}|$ .

Si hanno così intervalli successivi tra i "**punti di spezzamento**", che sono quelli in cui  $\omega$  eguaglia il modulo di una radice. In tali intervalli l'espressione (8) rimane inalterata e, come mostra l'ultimo membro della (8), il modulo di  $FDT_a(\omega)$  varia **secondo una potenza intera della  $\omega$**  mentre la fase rimane **costante**.

In corrispondenza, il diagramma del modulo  $FDT_a(\omega)$ , in coordinate logaritmiche, descrive una retta di pendenza dipendente da  $(n-m)$ . La fase invece rimane costante e varia a gradino nei punti di spezzamento. Si può mostrare che il diagramma del modulo non presenta discontinuità, perché i tratti rettilinei **si incontrano** nei punti di spezzamento.

Il diagramma asintotico rappresenta una buona approssimazione del diagramma esatto, almeno nelle zone lontane dalle radici. Poiché il suo andamento, usando coordinate logaritmiche per il modulo, è composto da **segmenti** (inclinati per i moduli, orizzontali per le fasi), esso può essere tracciato facilmente a mano. In molti calcoli si usa perciò il diagramma asintotico, invece di quello esatto, con accettabili risultati.

In Appendice, par.A.6, Fig.A.5, sono mostrati due esempi di diagrammi di Bode con i loro corrispondenti diagrammi asintotici.

## **Bibliografia**

- [1] A.Chiffi: "Analisi Matematica"; Ed. Alceo, 1982.
- [2] C.Minnaja: "Metodi Matematici per l'Ingegneria"; Ed. Libreria Progetto, Padova, 1997.
- [3] C.Minnaja: "Argomenti di Matematica per l'Ingegneria"; III Edizione, Ed. Libreria Progetto, Padova, 1991.
- [4] V.I.Smironov: "Corso di Matematica Superiore"; Ed. Editori Riuniti, Roma, 1978.
- [5] G.Someda: "Elementi di Elettrotecnica Generale"; Ed. Patron, Bologna, 1977.
- [6] M.Fauri, F.Gnesotto, G.Marchesi e A.Maschio: "Lezioni di Elettrotecnica"; Ed. Progetto Leonardo, Bologna, 1998.
- [7] C.A.Desoer e E.S.Kuh: "Basic Circuit Theory"; Ed. McGraw Hill, New York, 1969.
- [8] A.Lepschy e U.Viaro: "Guida allo Studio dei Controlli Automatici"; Ed. Patron, Bologna, 1983.
- [9] A.Oppenheim e R.W.Schafer: "Elaborazione Numerica dei Segnali"; Ed. Franco Angeli, Milano, 1990.
- [10] A.Papoulis: "Fourier Integral"; Ed. McGraw Hill, New York, 1962.
- [11] G.Cariolaro, G.Pierobon e G.Calvagno: "Segnali e Sistemi"; Ed. McGraw Hill Libri, Milano, 2003.
- [12] M.R.Spiegel: "Theory and Problems of Laplace Transforms"; Ed.Schaum's Outline Series, McGraw Hill, New York, 1965.

## Appendice

### A.1 – Esempio di circuito ed equazioni fondamentali

Per illustrare il significato dei concetti relativi ai sistemi rappresentati da equazioni integro-differenziali del tipo delle (1), e mostrare i metodi di soluzione descritti, può essere utile riferirsi ad un semplice esempio relativo al circuito elettrico di Fig.A.1.

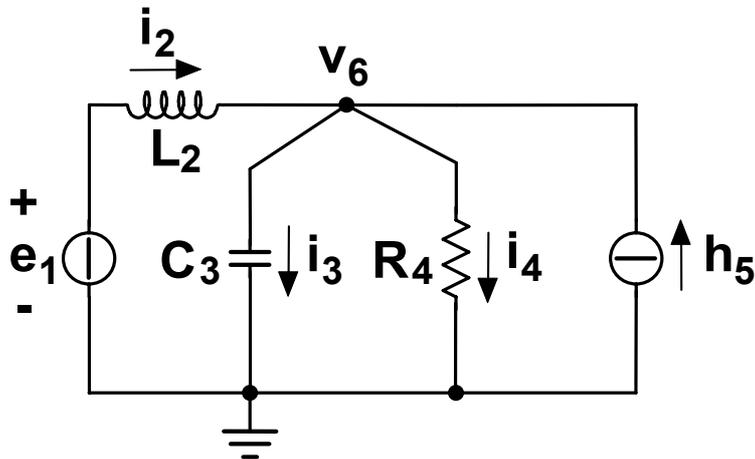


Fig.A.1.Circuito di esempio

In tale circuito costituiscono grandezze di interesse le tensioni dei nodi e le correnti dei rami. Si può porre  $u_1 = e_1$ ,  $u_2 = i_2$ ,  $u_3 = i_3$ ,  $u_4 = i_4$ ,  $u_5 = i_5$ ,  $u_6 = i_6$ ,  $u_7 = h_7$ ,  $u_8 = v_8$ ,  $u_9 = v_9$ .

Per il circuito si possono scrivere le seguenti equazioni, che sono equazioni di Kirchhoff ai lati ed ai nodi della rete

$$\begin{aligned} e_1 - v_6 - L_2 \frac{di_2}{dt} &= 0 \\ v_6 - \frac{1}{C_3} \int i_3 dt &= 0 \\ v_6 - R_4 i_4 &= 0 \\ i_2 - i_3 - i_4 + h_5 &= 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Come si vede, le 5 equazioni (2) hanno la forma delle (1), dove  $A_{11} = 1$ ,  $A_{16} = -1$ ,  $B_{12} = -L_2$ ,  $A_{26} = 1$ ,  $C_{23} = -1/C_3$ ,  $A_{36} = 1$ ,  $A_{34} = -R_4$ ,  $A_{42} = 1$ ,  $A_{43} = -1$ ,  $A_{44} = -1$ ,  $A_{45} = 1$ , e tutti gli altri coefficienti sono nulli. Le variabili e le loro derivate ed i loro integrali compaiono tutti al primo grado, senza prodotti tra le variabili. Inoltre i coefficienti sono costanti. Perciò il sistema è lineare e a coefficienti costanti.

Come si ricava dalla struttura del circuito (ma non dalle equazioni (A.1)), è ovvio considerare variabili indipendenti la tensione impressa dal generatore  $e_1$  e la corrente impressa dal generatore  $h_5$ .

## A.2 – Sovrapposizione degli effetti

Per il circuito di Fig.A.1 si possono considerare separatamente gli effetti del generatore di tensione  $e_1$  e del generatore di corrente  $h_5$ . Considerando  $e_1$ , annullando  $h_5$  (che equivale a sostituire il generatore di corrente  $h_5$  con un circuito aperto) e risolvendo rispetto alle singole variabili dipendenti, si ricava dalle (A.1)

$$\begin{aligned}
 L_2 C_3 \frac{d^2 i_2'}{dt^2} + \frac{L_2}{R_4} \frac{di_2'}{dt} + i_2' &= C_3 \frac{de_1}{dt} + \frac{1}{R_4} e_1 \\
 L_2 C_3 \frac{d^2 i_3'}{dt^2} + \frac{L_2}{R_4} \frac{di_3'}{dt} + i_3' &= C_3 \frac{de_1}{dt} \\
 L_2 C_3 \frac{d^2 i_4'}{dt^2} + \frac{L_2}{R_4} \frac{di_4'}{dt} + i_4' &= \frac{1}{R_4} e_1 \\
 L_2 C_3 \frac{d^2 v_6'}{dt^2} + \frac{L_2}{R_4} \frac{dv_6'}{dt} + v_6' &= e_1
 \end{aligned}
 \tag{A.2}$$

Considerando invece  $h_5$ , annullando  $e_1$  (che equivale a sostituire il generatore di tensione  $e_1$  con un corto circuito) e risolvendo rispetto alle singole variabili dipendenti, si ricava dalle (A.1)

$$\begin{aligned}
 L_2 C_3 \frac{d^2 i_2''}{dt^2} + \frac{L_2}{R_4} \frac{di_2''}{dt} + i_2'' &= -h_5 \\
 L_2 C_3 \frac{d^2 i_3''}{dt^2} + \frac{L_2}{R_4} \frac{di_3''}{dt} + i_3'' &= L_2 C_3 \frac{d^2 h_5}{dt^2} \\
 L_2 C_3 \frac{d^2 i_4''}{dt^2} + \frac{L_2}{R_4} \frac{di_4''}{dt} + i_4'' &= L_2 \frac{dh_5}{dt} \\
 L_2 C_3 \frac{d^2 v_6''}{dt^2} + \frac{L_2}{R_4} \frac{dv_6''}{dt} + v_6'' &= L_2 \frac{dh_5}{dt}
 \end{aligned}
 \tag{A.3}$$

Per ricavare le (A.2) e le (A.3) si è derivata la seconda delle (A.1) per trasformarla in una equazione differenziale, senza integrali.

Le (A.2) e le (A.3) sono equazioni differenziali in una delle variabili dipendenti (effetti) ed in una delle variabili indipendenti (cause). Ciascuna di queste equazioni, se è nota la variabile indipendente relativa, può essere integrata, determinando la variabile dipendente corrispondente. Sommando poi le soluzioni ottenute dalle (A.2) e dalle (A.3) si ottengono le soluzioni complessive.

Ad esempio, per la  $i_2$ , se è nota la  $e_1$ , dalla prima delle (A.2) si determina la  $i_2'$  e, se è nota la  $h_5$ , dalla prima delle (A.3) si determina la  $i_2''$ . Per tale variabile la soluzione complessiva è quindi  $i_2''' = i_2' + i_2''$ .

(Non si dà qui un esempio di integrazione diretta perché questa, come si vedrà, è molto più agevole con i metodi seguenti).

## A.3 – Regime stazionario

Si supponga che i generatori di tensione e di corrente abbiano valori costanti  $e_1 = E_1$  e  $h_5 = H_5$ .

Ad esempio sia  $E_1 = 100$  V,  $H_5 = 2$  A,  $L_2 = 120$  mH,  $C_3 = 50$   $\mu$ F,  $R_4 = 75$   $\Omega$ .

Si supponga inoltre che tutte le variabili dipendenti abbiano valori costanti. Ciò equivale ad ammettere che tutti i transitori, corrispondenti alle soluzioni delle equazioni omogenee delle (A.1), si siano smorzati fino ad annullarsi.

Applicando la sovrapposizione degli effetti, nelle (A.2) si annullano tutte le derivate. Ponendo  $e_1 = E_1$  si ricava dunque

$$\begin{aligned}
i_2' &= \frac{1}{R_4} E_1 \\
i_3' &= 0 \\
i_4' &= \frac{1}{R_4} E_1 \\
v_6' &= E_1
\end{aligned}
\tag{A.4}$$

Similmente, nelle (A.3) si annullano tutte le derivate. Ponendo  $h_5 = H_5$  si ricava dunque

$$\begin{aligned}
i_2'' &= -H_5 \\
i_3'' &= 0 \\
i_4'' &= 0 \\
v_6'' &= 0
\end{aligned}
\tag{A.5}$$

Sommando si ottiene la soluzione complessiva

$$\begin{aligned}
i_2''' &= i_2' + i_2'' = \frac{1}{R_4} E_1 - H_5 \\
i_3''' &= i_3' + i_3'' = 0 \\
i_4''' &= i_4' + i_4'' = \frac{1}{R_4} E_1 \\
v_6''' &= v_6' + v_6'' = E_1
\end{aligned}
\tag{A.6}$$

Con i valori supposti sopra, si ha  $i_2''' = -0.667$  A,  $i_3''' = 0$  A,  $i_4''' = 1.333$  A,  $v_6''' = 100$  V.

#### A.4 – Regime periodico

Si supponga che il generatore di tensione fornisca una tensione sinusoidale di frequenza  $f$ , pulsazione  $\omega = 2\pi \cdot f$  e di valore efficace  $E_1$  (ampiezza massima  $\sqrt{2} \cdot E_1$ ) e di fase  $\gamma_1$ . La rappresentazione simbolica di  $e_1$  è data quindi dal numero complesso  $E_1 = E_1 \cdot \cos(\gamma_1) + j E_1 \cdot \sin(\gamma_1)$ .

Ad esempio sia  $f = 50$  Hz,  $\omega = 314$  rad/s,  $E_1 = 80$  V<sub>eff</sub>,  $\gamma_1 = 0$  (si assume come origine dei tempi l'istante in cui  $e_1$  è nulla). La rappresentazione simbolica di  $e_1$  è data quindi dal numero complesso con parte immaginaria nulla  $E_1 = 80 \cdot \cos(0) + j 80 \cdot \sin(0) = 80 + j0$ . I valori dei componenti passivi siano ancora  $L_2 = 120$  mH,  $C_3 = 50$   $\mu$ F,  $R_4 = 75$   $\Omega$ .

Si supponga poi che il generatore di corrente  $h_5$  imprima una corrente sinusoidale della stessa frequenza  $f$  del generatore  $e_1$ , e quindi con la stessa pulsazione  $\omega = 2\pi \cdot f$ . Allora  $h_5$  può essere rappresentato con un vettore ruotante alla stessa velocità angolare di  $e_1$ , e la sua rappresentazione simbolica può essere data da un numero complesso nella stessa rappresentazione simbolica (se le due frequenze fossero state diverse, nelle variabili dipendenti si sarebbero avuti termini sinusoidali di frequenze differenti, indipendenti tra loro).

L'ampiezza efficace di  $h_5$  sia  $H_5$ , la sua fase sia in ritardo di un angolo  $\varphi$  rispetto alla  $e_1$ . Perciò la fase di  $h_5$  vale  $\gamma_5 = \gamma_1 - \varphi$  e la rappresentazione simbolica di  $h_5$  è data dal numero complesso  $H_5 = H_5 \cos(\gamma_5) + j \cdot H_5 \sin(\gamma_5)$ .

Ad esempio sia  $H_5 = 1.2$  A<sub>eff</sub>,  $\varphi = 60^\circ = \pi/3$  rad. La rappresentazione simbolica di  $h_5$  è quindi  $H_5 = 1.2 \cdot \cos(0 - \pi/3) + j \cdot 1.2 \cdot \sin(0 - \pi/3) = 0.6 - j \cdot 1.039$

Ammettendo anche in questo caso che i termini transitori si siano completamente smorzati, si ha che tutte le variabili dipendenti sono funzioni sinusoidali nel tempo di pulsazione  $\omega$  e possono essere rappresentate con numeri complessi, secondo la rappresentazione simbolica. Con queste premesse, tenendo conto che, come detto, le derivate delle variabili si esprimono moltiplicando per  $j\omega$  e gli integrali dividendo per  $j\omega$ , dalla (A.1) si ricava.

$$\begin{aligned}
E_1 - V_6 - j\omega L_2 I_2 &= 0 \\
V_6 - \frac{1}{j\omega C_3} I_3 &= 0 \\
V_6 - R_4 I_4 &= 0 \\
I_2 - I_3 - I_4 + H_5 &= 0
\end{aligned}
\tag{A.7}$$

dove con  $I_2, I_3, I_4, V_6$  si sono indicati i numeri complessi che rappresentano  $i_2, i_3, i_4, v_6$ . Si noti che, seguendo un uso comune, i moduli dei numeri complessi delle variabili sia indipendenti sia dipendenti sono pari ai valori efficaci delle rispettive grandezze e non ai valori massimi, come sarebbe più corretto considerando la rappresentazione delle grandezze sinusoidali mediante vettori rotanti.

Risolvendo le (A.7) rispetto alle diverse variabili dipendenti si ottiene

$$\begin{aligned}
I_2 &= E_1 \frac{1 + j\omega C_3 R_4}{(j\omega)^2 L_2 C_3 R_4 + j\omega L_2 + R_4} - H_5 \frac{R_4}{(j\omega)^2 L_2 C_3 R_4 + j\omega L_2 + R_4} \\
I_3 &= E_1 \frac{j\omega C_3 R_4}{(j\omega)^2 L_2 C_3 R_4 + j\omega L_2 + R_4} + H_5 \frac{(j\omega)^2 L_2 C_3 R_4}{(j\omega)^2 L_2 C_3 R_4 + j\omega L_2 + R_4} \\
I_4 &= E_1 \frac{1}{(j\omega)^2 L_2 C_3 R_4 + j\omega L_2 + R_4} + H_5 \frac{j\omega L_2}{(j\omega)^2 L_2 C_3 R_4 + j\omega L_2 + R_4} \\
V_6 &= E_1 \frac{R_4}{(j\omega)^2 L_2 C_3 R_4 + j\omega L_2 + R_4} + H_5 \frac{j\omega L_2 R_4}{(j\omega)^2 L_2 C_3 R_4 + j\omega L_2 + R_4}
\end{aligned}
\tag{A.8}$$

Nelle prime tre equazioni delle (A.8) i fattori che moltiplicano  $E_1$  hanno le dimensioni di una ammettenza mentre quelli che moltiplicano  $H_5$  sono numeri puri, cioè sono coefficienti di proporzionalità. Invece nell'ultima delle (A.8) il fattore che moltiplica  $E_1$  è un coefficiente di proporzionalità mentre quello che moltiplica  $H_5$  ha le dimensioni di una impedenza. Come detto, a questi fattori si può estendere la denominazione di Funzioni di Trasferimento.

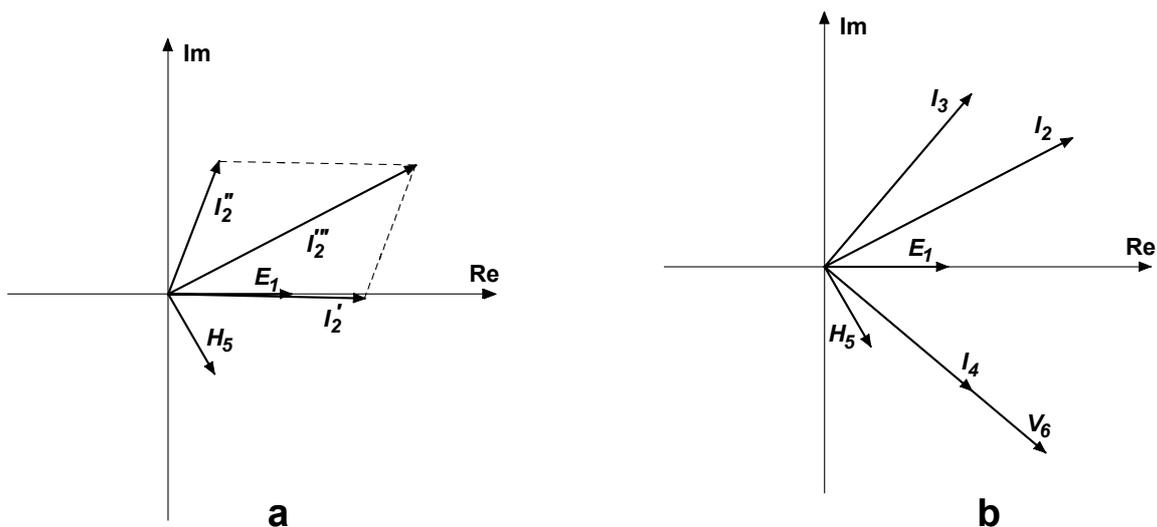


Fig.A.2.Rappresentazione vettoriale delle grandezze periodiche sinusoidali dell'esempio  
a – Vettori  $E_1, H_5$  dei generatori, vettori delle componenti  $I_2'$  e  $I_2''$  e risultante  $I_2'''$ .  
b – Vettori  $E_1, H_5$  dei generatori e vettori  $I_2, I_3, I_4, V_6$ , delle grandezze dipendenti.

Sostituendo i valori supposti inizialmente, si possono calcolare i valori di tali fattori. Ad esempio il coefficiente di  $E_1$  nella prima equazione vale  $Y_{21} = 31.823 \cdot 10^{-3} - j \cdot 0.706 \cdot 10^{-3}$ . Moltiplicando per  $E_1 = 80 + j0$  si ricava il primo addendo  $I_2' = E_1 \cdot Y_{21} = 2.546 - j \cdot 0.0565 \text{ A}_{\text{eff}}$ . Il coefficiente di  $H_5$ , ancora nella prima equazione, vale  $K_{25} = 0.973 + j \cdot 1.200$ . Moltiplicando per  $H_5 = 0.6 - j \cdot 1.039$  si ricava il secondo addendo  $I_2'' = -H_5 \cdot K_{25} = 0.662 + j \cdot 1.731 \text{ A}_{\text{eff}}$ . Sommando si ottiene la corrente totale  $I_2''' = I_2' + I_2'' = 3.209 + j \cdot 1.675 \text{ A}_{\text{eff}}$ . La  $I_2'''$  ha dunque un modulo  $|I_2'''| = 3.620 \text{ A}_{\text{eff}}$  ed uno sfasamento  $\gamma_2 = 0.481 \text{ rad} = 27.56^\circ$ .

In Fig.A.2a è mostrate la rappresentazione vettoriale  $E_1$  del generatore di tensione ed  $H_5$  del generatore di corrente, delle componenti  $I_2'$  e  $I_2''$  e della risultante  $I_2'''$ , calcolate sopra. Invece in Fig.A.2.b. sono riportati i vettori di tutte le grandezze nello stesso circuito, con gli stessi generatori. Infine, per confronto, in Fig.A.3 sono mostrati gli andamenti nel tempo delle grandezze rappresentate in Fig.A.2.b.

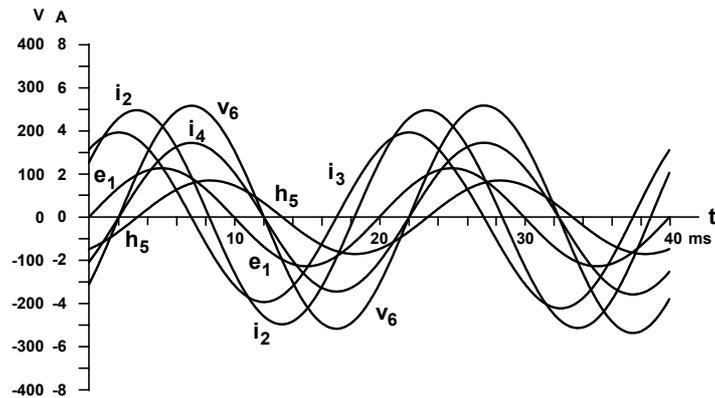


Fig.A.3. Andamento nel tempo delle tensioni e correnti nel circuito di Fig.A.1 nel caso dell'esempio considerato di grandezze periodiche sinusoidali.

### A.5 – Regime transitorio

Si supponga che all'istante  $t=0$  nel circuito di Fig.A.1 le variabili siano tutte nulle (ciò equivale a dire che non vi sono condizioni iniziali).

Si supponga che, a partire da tale istante, il generatore  $e_1$  produca una tensione variabile di andamento da precisare, la cui L-trasformata verrà indicata con  $E_1(s)$ . Analogamente avvenga per il generatore di corrente  $h_5$  che genererà una corrente di andamento variabile avente una L-trasformata  $H_5(s)$ .

Ad esempio, l'andamento di  $e_1$  sia "a gradino", cioè assuma un valore  $E_1 = 100 \text{ V}$  all'istante  $t=0$  che si mantiene costante per tutto il tempo successivo. Come è noto (e si può ricavare da tabelle, come tab.A.1)), la L-trasformata di una funzione a gradino di ampiezza  $E_1$  con inizio al tempo  $t=0$  è espressa da  $E_1(s) = E_1/s$ . Analogamente, anche l'andamento di  $h_5$  sia a gradino, con ampiezza  $1.5 \text{ A}$  ed inizio al tempo  $t=0$ . Dunque, la L-trasformata di  $h_5$  è  $H_5(s) = H_5/s$ .

I valori dei componenti passivi siano ancora  $L_2 = 120 \text{ mH}$ ,  $C_3 = 50 \mu\text{F}$ ,  $R_4 = 75 \Omega$ .

Sostituendo nella (A.1) alle variabili le loro L-trasformate e tenendo conto che, come detto, le derivate si esprimono moltiplicando per  $s$  e gli integrali dividendo per  $s$ , si ricava.

$$\begin{aligned}
 E_1(s) - V_6(s) - sL_2 I_2(s) &= 0 \\
 V_6(s) - \frac{1}{sC_3} I_3(s) &= 0 \\
 V_6(s) - R_4 I_4(s) &= 0 \\
 I_2(s) - I_3(s) - I_4(s) + H_5(s) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{A.9}$$

dove con  $I_2(s)$ ,  $I_3(s)$ ,  $I_4(s)$ ,  $V_6(s)$  si sono indicate le L-trasformate delle variabili dipendenti  $i_2$ ,  $i_3$ ,  $i_4$ ,  $v_6$ .

| Operazioni sulle Trasformate  |  |   |  |
|---|--|---|--|
| $f(t)^{(1)}$  | $F(s)$   | $f(t)^{(1)}$  | $F(s)$   |
| $A \cdot f(t)$<br>(A = costante)  | $A \cdot F(s)$   | $A \cdot f_1(t) + B \cdot f_2(t)$<br>(A e B costanti)   | $A \cdot F_1(s) + B \cdot F_2(s)$  |
| $\frac{d}{dt} f(t)$   | $s \cdot F(s) - f(0)$  | $\int_0^t f(\tau) d\tau$  | $\frac{1}{s} F(s)$   |
| $-t \cdot f(t)$   | $\frac{d}{ds} F(s)$  | $\frac{f(t)}{t}$  | $\int_s^\infty F(s) ds$  |
| $(-t)^n \cdot f(t)$   | $\frac{d^n}{ds^n} F(s)$  | $\int_0^t \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau$   | $\frac{1}{s} \int_s^\infty F(s) ds$  |
| $\int_t^\infty \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau$  | $\frac{1}{s} \cdot \int_0^s F(s) ds$   | $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau =$<br>$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$<br>(integrale di convoluzione)   | $F_1(s) \cdot F_2(s)$  |
| Trasformate <sup>(1)</sup> e Antitrasformate  |  |   |  |
| $f(t)^{(1)}$  | $F(s)$   | $f(t)^{(1)}$  | $F(s)$   |
| $1(t)$<br>(gradino unitario a t=0)  | $\frac{1}{s}$  | $U(t)$<br>(impulso unitario a t=0)  | 1  |
| $1(t-a)$<br>(gradino unitario a t=a)  | $\frac{1}{s} e^{-as}$  | $U(t-a)$<br>(impulso unitario a t=a)  | $e^{-as}$  |
| $e^{at}$<br>(nullo per t<0)   | $\frac{1}{s-a}$  | $a \cdot t$<br>(rampa)  | $\frac{a}{s^2}$  |
| $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (n=1, 2, 3, ...)   | $\frac{1}{s^n}$  | $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$  | $\frac{1}{\sqrt{s}}$   |
| $\sin(\omega_0 t)$  | $\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$  | $\cos(\omega_0 t)$  | $\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$   |
| $\sin(\omega_0 t + \varphi)$  | $\frac{\omega_0 \cos \varphi + s \sin \varphi}{s^2 + \omega_0^2}$                | $\cos(\omega_0 t + \varphi)$  | $\frac{-\omega_0 \sin \varphi + s \cos \varphi}{s^2 + \omega_0^2}$               |
| $\sinh(\omega_0 t) = \frac{e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}}{2}$  | $\frac{\omega_0}{s^2 - \omega_0^2}$  | $\cosh(\omega_0 t) = \frac{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}}{2}$  | $\frac{s}{s^2 - \omega_0^2}$   |
| $\frac{1/\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \cdot t)$  | $\frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_0 + \omega_0^2}$ ( $\xi < 1$ )                        | $\frac{1/\omega_0}{2\sqrt{\xi^2-1}} \left( e^{-\omega_0(\xi-\sqrt{\xi^2-1})t} - e^{-\omega_0(\xi+\sqrt{\xi^2-1})t} \right)$   | $\frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_0 + \omega_0^2}$ ( $\xi > 1$ )                        |
| $t \cdot e^{-\omega_0 t}$   | $\frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_0 + \omega_0^2}$ ( $\xi=1$ )                          | $1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}$  | $\frac{1}{s} \frac{\omega_0^2}{(s^2 + 2\xi\omega_0 + \omega_0^2)}$ ( $\xi=1$ )   |
| $1 - \frac{1/\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \cdot \sin\left(\sqrt{1-\xi^2} \cdot \omega_0 t + \arcsin\sqrt{1-\xi^2}\right)$ | $\frac{1}{s} \frac{\omega_0^2}{(s^2 + 2\xi\omega_0 + \omega_0^2)}$ ( $\xi < 1$ ) | $1 - \frac{\xi + \sqrt{\xi^2-1}}{2\sqrt{\xi^2-1}} e^{-\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_0 t} + \frac{\xi - \sqrt{\xi^2-1}}{2\sqrt{\xi^2-1}} e^{-\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_0 t}$ | $\frac{1}{s} \frac{\omega_0^2}{(s^2 + 2\xi\omega_0 + \omega_0^2)}$ ( $\xi > 1$ ) |

(1) – Nota: Le espressioni delle funzioni del tempo f(t) valgono per t ≥ 0. Per t < 0 il valore delle f(t) è nullo.

Tab.A.1. Trasformate e Antitrasformate di Laplace e relative Operazioni

Risolvendo le (A.9) rispetto alle diverse variabili dipendenti si ottiene

$$\begin{aligned}
 I_2(s) &= E_1(s) \frac{1 + s C_3 R_4}{s^2 L_2 C_3 R_4 + s L_2 + R_4} - H_5(s) \frac{R_4}{s^2 L_2 C_3 R_4 + s L_2 + R_4} \\
 I_3(s) &= E_1(s) \frac{s C_3 R_4}{s^2 L_2 C_3 R_4 + s L_2 + R_4} + H_5(s) \frac{s^2 L_2 C_3 R_4}{s^2 L_2 C_3 R_4 + s L_2 + R_4} \\
 I_4(s) &= E_1(s) \frac{1}{s^2 L_2 C_3 R_4 + s L_2 + R_4} + H_5(s) \frac{s L_2}{s^2 L_2 C_3 R_4 + s L_2 + R_4} \\
 V_6(s) &= E_1(s) \frac{R_4}{s^2 L_2 C_3 R_4 + s L_2 + R_4} + H_5(s) \frac{s L_2 R_4}{s^2 L_2 C_3 R_4 + s L_2 + R_4}
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

Nelle prime tre equazioni delle (A.10) i fattori che moltiplicano  $E_1(s)$  hanno le dimensioni di una ammettenza mentre quelli che moltiplicano  $H_5(s)$  sono numeri puri, cioè sono coefficienti di proporzionalità. Invece nell'ultima delle (A.10) il fattore che moltiplica  $E_1(s)$  è un coefficiente di proporzionalità mentre quello che moltiplica  $H_5(s)$  ha le dimensioni di una impedenza. Come detto, a questi fattori sono detti **Funzioni di Trasferimento**.

Come detto in par.5, antitrasformando le espressioni (A.10) si possono determinare gli andamenti transitori nel tempo delle variabili dipendenti.

Come esempio dell'applicazione del metodo descritto sommariamente in par.5, ed in particolare con riferimento all'equazione (6), si riporta qui il procedimento di determinazione della  $i_2(t)$  a partire dalla prima delle (A.10). Tale equazione può essere messa nella forma

$$I_2(s) = I_{21}(s) + I_{25}(s) = E_1(s) \cdot FDT_{12}(s) + H_5(s) \cdot FDT_{52}(s) \tag{A.11}$$

che mette in evidenza che la  $I_2(s)$  è data dalla somma di due termini,  $I_{21}(s)$  e  $I_{25}(s)$ , il primo che è il prodotto della  $E_1$  per la  $FDT_{12}$  (Funzione di trasferimento tra  $e_1$  ed  $i_2$ ), il secondo che è il prodotto della  $H_5$  per la  $FDT_{52}$  (Funzione di trasferimento tra  $h_5$  ed  $i_2$ ). Per ricavare  $i_2(t)$  si calcolano separatamente le antitrasformate  $i_{21}(t)$  di  $I_{21}(s)$  e  $i_{25}(t)$  di  $I_{25}(s)$  e poi si sommano.

Per determinare  $i_{21}(t)$  si trovano anzitutto le radici del denominatore  $D(s)$  della  $FDT_{12}$ . In questo caso, trattandosi di un polinomio di secondo grado, le radici sono due e si determinano con la comune formula di soluzione dell'equazione di secondo grado corrispondente.

$$s_{p1} = \frac{-L_2 + \sqrt{L_2^2 - 4L_2 C_3 R_4^2}}{2L_2 C_3 R_4} \tag{A.12}$$

$$s_{p2} = \frac{-L_2 - \sqrt{L_2^2 - 4L_2 C_3 R_4^2}}{2L_2 C_3 R_4} \tag{A.13}$$

Con i valori dei componenti assunti prima,  $L_2=120$  mH,  $C_3=50$   $\mu$ F,  $R_4=75$   $\Omega$ , si ha

$$s_{p1} = -133.33 + j385.86 \tag{A.14}$$

$$s_{p2} = -133.33 - j385.86 \tag{A.15}$$

I due poli  $s_{p1}$  e  $s_{p2}$  sono complessi coniugati, come deve essere, perché le radici di un polinomio a coefficienti reali, come è il denominatore  $D(s)$ , o sono reali o sono a due a due coniugate.

Introducendo l'espressione della L-trasformata di  $e_1$ , data sopra, cioè  $E_1(s)=E_1/s$ , ed esprimendo il denominatore della  $FDT_{12}$  in funzione delle sue radici, il primo addendo  $I_{21}(s)$  della  $I_2(s)$  risulta

$$I_{21}(s) = \frac{E_1}{s} \cdot \frac{1 + s C_3 R_4}{L_2 C_3 R_4 (s - s_{p1})(s - s_{p2})} = \frac{E_1}{L_2 C_3 R_4} \cdot \frac{1 + s C_3 R_4}{s (s - s_{p1})(s - s_{p2})} \tag{A.16}$$

La (A.16), oltre a  $s_{p1}$  e  $s_{p2}$ , ha anche il polo (cioè la radice del denominatore)  $s_{p3}=0$ .

Perciò, secondo la (6), la (A.16) può essere espressa come somma di tre termini

$$I_{21}(s) = \frac{B_{11}}{s - s_{p1}} + \frac{B_{12}}{s - s_{p2}} + \frac{B_{13}}{s - s_{p3}} \quad (A.17)$$

dove, purchè le radici siano distinte, il generico coefficiente  $B_i$  relativo alla radice  $i$ -esima è dato dal rapporto del numeratore  $N(s_{pi})$ , calcolato per  $s = s_{pi}$ , e della derivata del denominatore  $D'(s_{pi})$ , calcolata per  $s = s_{pi}$ . Si ha dunque  $B_i = N(s_{pi}) / D'(s_{pi})$ . Nel caso in esame risulta perciò

$$B_{11} = \frac{E_1}{L_2 C_3 R_4} \frac{1 + s_{p1} C_3 R_4}{s_{p1}(s_{p1} - s_{p2})}; \quad B_{12} = \frac{E_1}{L_2 C_3 R_4} \frac{1 + s_{p2} C_3 R_4}{s_{p2}(s_{p2} - s_{p1})}; \quad B_{13} = \frac{E_1}{L_2 C_3 R_4} \frac{1}{s_{p1} s_{p2}} \quad (A.18)$$

introducendo i valori numerici dell'esempio e quelli dei poli  $s_{p1}$ ,  $s_{p2}$ ,  $s_{p3}$  si ricava

$$B_{11} = -0.666 - j0.849; \quad B_{12} = -0.666 + j0.849; \quad B_{13} = 1.333 \quad (A.19)$$

È importante notare che  $B_1$  e  $B_2$ , che corrispondono a radici complesse coniugate, sono anch'essi complessi coniugati. Come è noto e si ricava da tabelle (ad es. da Tab.A.1), l'antitrasformata di  $F(s) = B/(s - s_{p1})$  vale  $f(t) = B \cdot \exp(s_{p1} \cdot t)$ . Quindi, l'antitrasformata  $f_1(t)$  del primo termine della (A.17) è dato da

$$f_1(t) = L^{-1} \left[ \frac{B_1}{s - s_{p1}} \right] = B_1 e^{s_{p1} t} \quad (A.20)$$

e, indicando con  $\text{Re}_{s_{p1}}$  la parte reale di  $s_{p1}$  e con  $\text{Im}_{s_{p1}}$  la parte immaginaria di  $s_{p1}$  (date dalla (A.14)), e ricordando la formula di Eulero, si può scrivere

$$f_1(t) = B_1 e^{s_{p1} t} = B_1 e^{(\text{Re}_{s_{p1}} + j \text{Im}_{s_{p1}}) t} = B_1 e^{\text{Re}_{s_{p1}} t} [\cos(\text{Im}_{s_{p1}} \cdot t) + j \sin(\text{Im}_{s_{p1}} \cdot t)] \quad (A.21)$$

o anche

$$f_1(t) = B_1 e^{t/T_1} [\cos(\omega_1 t) + j \sin(\omega_1 \cdot t)] \quad (A.22)$$

avendo indicato con  $T_1 = -1/\text{Re}_{s_{p1}}$  la costante di tempo e con  $\omega_1 = \text{Im}_{s_{p1}}$  la pulsazione, relative a  $s_{p1}$ . Introducendo dalle (A.14) e (A.19) i valori numerici si ottiene

$$f_1(t) = (-0.666 - j0.849) e^{-t/(7.5 \cdot 10^{-3})} [\cos(386 \cdot t) + j \sin(386 \cdot t)] \quad (A.23)$$

risultando da (A.10)  $T_1 = 1/\text{Re}_{s_{p1}} = -1/(-133.33) = 7.5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  e  $\omega_1 = \text{Im}_{s_{p1}} = 385.86 \text{ rad/s}$ .

La  $f_1(t)$  rappresenta una oscillazione smorzata con costante di tempo di smorzamento  $T_1$  e pulsazione  $\omega_1$ .

Procedendo in modo analogo, tenendo conto della (A.20), (A.22) e dei valori numerici si calcola l'andamento della funzione  $f_2(t)$  che è l'antitrasformata del secondo addendo della (A.17)

$$f_2(t) = (-0.666 + j0.849) e^{-t/(7.5 \cdot 10^{-3})} [\cos(386 \cdot t) - j \sin(386 \cdot t)] \quad (A.24)$$

dove si è tenuto conto che  $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$  e  $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ , e risulta  $T_2 = -1/\text{Re}_{s_{p2}} = -1/(-133.33) = 7.5 \cdot 10^{-3} = T_1$  e  $\omega_2 = \text{Im}_{s_{p2}} = -385.86 \text{ rad/s} = \omega_1$ . Le due soluzioni  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  hanno la stessa costante di tempo di smorzamento, pulsazioni uguali in modulo ma opposte in segno e sono moltiplicati per fattori complessi coniugati.

L'antitrasformata  $f_3(t)$  del terzo termine della (A.17), poiché  $s_{p3} = 0$ , si riduce ad una costante (si veda ta.A.1)

$$f_3(t) = L^{-1} \left[ \frac{B_3}{s} \right] = B_3 \quad (A.25)$$

Tenuto conto della (A.19) e della (A.25) si ricava

$$f_3(t) = 1.333 \quad (A.26)$$

Infine, sommando le  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  e  $f_3(t)$ , date dalle (A.23), (A.24), (A.26), si ottiene l'andamento nel tempo della corrente  $i_{21}(t)$

$$i_{21}(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) = 1.333 + e^{-t/(7.5 \cdot 10^{-3})} [-1.333 \cos(386 \cdot t) + 1.699 \sin(386 \cdot t)] \quad (A.27)$$

In Fig.A.2.a sono mostrati gli andamenti di  $e_1(t)$  e di  $i_{21}(t)$

È da notare che, pur essendo complessi i coefficienti  $B_1$  e  $B_2$  delle due soluzioni esponenziali  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ , la  $i_{21}(t)$  risulta reale, come deve essere, perché sia  $B_1$  e  $B_2$  sia  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  sono complessi coniugati. Ciò è conseguenza del fatto che il denominatore  $D(s)$  della FDT<sub>12</sub> è un polinomio in  $s$  a **coefficienti reali**.

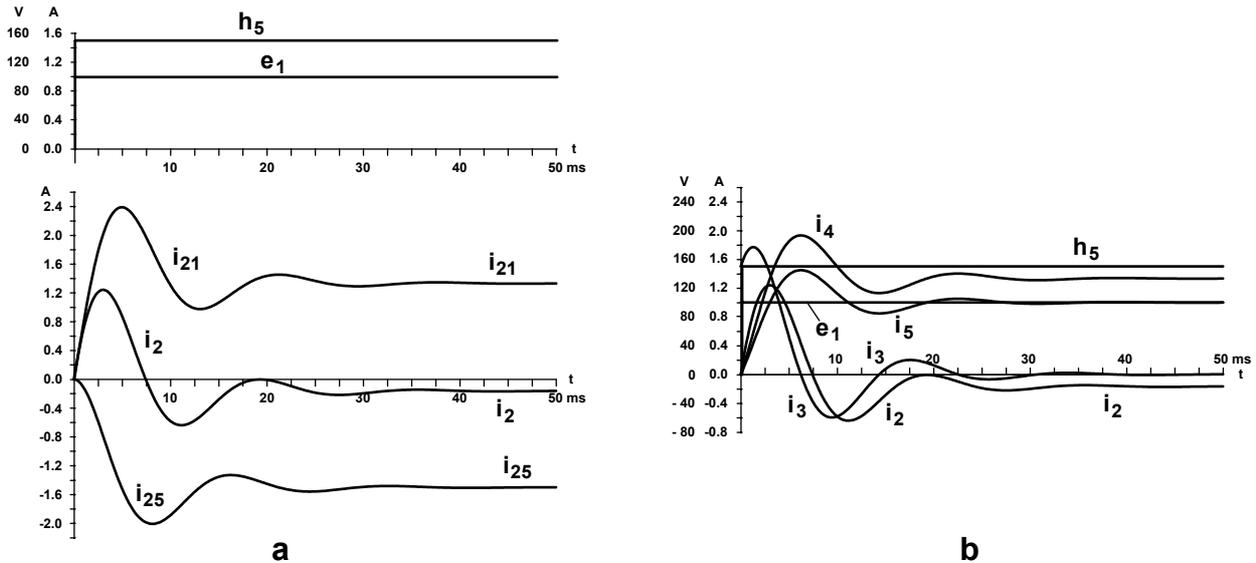


Fig.A.4. Andamenti delle tensioni e delle correnti nel circuito di Fig.A.1 in transitorio  
 a – Corrente  $i_2(t)$  e sue componenti  
 b – Tensioni e correnti (cause ed effetti) nelle varie parti del circuito

La determinazione di  $i_{25}(t)$  si fa con lo stesso procedimento seguito per  $i_{21}(t)$ .

Dalla prima delle (A.10) si può constatare che la FDT<sub>52</sub>, definita dalla (A.11), ha denominatore uguale a quello della FDT<sub>12</sub>. Questo fatto non è casuale. Si può infatti dimostrare che, per un dato sistema di partenza (A.1), e in particolare per un dato circuito, tutte le FDT hanno denominatori con le stesse radici, cioè hanno gli stessi poli (al più, in qualcuna di esse qualche polo manca). Nel caso di circuiti elettrici, il numero massimo di tali poli **non può superare il numero di elementi reattivi della rete**.

Nel sistema (A.10), che corrisponde al circuito di Fig.A.1 ed al sistema (A.1), gli elementi reattivi sono due (l'induttanza  $L_2$  ed il condensatore  $C_3$ ) e ad essi corrispondono due poli. Essi compaiono in tutti i denominatori delle (A.10), per cui tutti i denominatori delle FDT sono uguali.

Poiché, come detto, il denominatore della FDT<sub>52</sub> è uguale a quello della FDT<sub>12</sub>, anche le relative radici sono le stesse. Esse sono espresse dalle relazioni (A.12), (A.13) ed assumono i valori dati dalle (A.14), (A.15).

Introducendo l'espressione della L-trasformata di  $h_5$  data sopra, cioè  $H_5(s)=H_5/s$ , ed esprimendo il denominatore della FDT<sub>52</sub> in funzione delle sue radici, il secondo addendo  $I_{25}(s)$  della espressione (A.11) della  $I_2(s)$  risulta, in base alla prima delle (A.10)

$$I_{25}(s) = -\frac{H_5}{s} \cdot \frac{R_4}{L_2 C_3 R_4 (s-s_{p1})(s-s_{p2})} = \frac{-H_5}{L_2 C_3} \cdot \frac{1}{s(s-s_{p1})(s-s_{p2})} \quad (A.28)$$

La (A.28), oltre a  $s_{p1}$  e  $s_{p2}$ , ha anche il polo (cioè la radice del denominatore)  $s_{p3}=0$ .

Perciò anche in questo caso, secondo la (6), la (A.28) può essere espressa come somma di tre termini

$$I_{25}(s) = \frac{B_{51}}{s-s_{p1}} + \frac{B_{52}}{s-s_{p2}} + \frac{B_{53}}{s-s_{p3}} \quad (A.29)$$

Procedendo come nel caso precedente, si determinano i coefficienti  $B_{51}$ ,  $B_{52}$ ,  $B_{53}$

$$B_{51} = \frac{-H_5}{L_2 C_3} \frac{1}{s_{p1}(s_{p1}-s_{p2})}; \quad B_{52} = \frac{-H_5}{L_2 C_3} \frac{1}{s_{p2}(s_{p2}-s_{p1})}; \quad B_{53} = \frac{-H_5}{L_2 C_3} \frac{1}{s_{p1}s_{p2}} \quad (A.30)$$

introducendo i valori numerici dell'esempio e quelli dei poli  $s_{p1}$ ,  $s_{p2}$ ,  $s_{p3}$  si ricava

$$B_{51} = +0.750 + j0.259; \quad B_{52} = +0.750 - j0.259; \quad B_{53} = -1.500 \quad (A.31)$$

Da questi valori e dalla (A.29), in base ai valori  $\text{Re}_{s_{p1}}$  della parte reale di  $s_{p1}$  e  $\text{Im}_{s_{p1}}$  della parte immaginaria di  $s_{p1}$  (dati dalla (A.14)), antitrasformando analogamente a quanto fatto per la (A.27), si ottiene l'espressione di  $i_{25}(t)$

$$i_{25}(t) = -1.500 + e^{-t/(7.5 \cdot 10^{-3})} [ +1.500 \cos(386 \cdot t) - 0.518 \sin(386 \cdot t) ] \quad (A.32)$$

dove la costante di tempo di smorzamento  $T_1 = 1/\text{Re}_{s_{p1}} = -1/(-133.33) = 7.5 \cdot 10^{-3}$  s e la pulsazione  $\omega_1 = \text{Im}_{s_{p1}} = 385.86$  rad/s sono le stesse di  $i_{21}(t)$ .

Sommando la  $i_{s1}(t)$ , data dalla (A.25), e la  $i_{25}(t)$ , data dalla (A.32), si ottiene la totale corrente  $i_2(t)$

$$i_2(t) = i_{21}(t) + i_{25}(t) = -0.167 + e^{-t/(7.5 \cdot 10^{-3})} [ +0.167 \cos(386 \cdot t) + 1.181 \sin(386 \cdot t) ] \quad (A.33)$$

In Fig.A.4.a, insieme agli andamenti di  $e_1(t)$  e di  $i_{21}(t)$ , sono mostrati anche gli andamenti di  $h_5(t)$ , di  $i_{25}(t)$  e della corrente risultante  $i_2(t)$ .

In Fig.A.4.b sono mostrati invece gli andamenti totali di tutte le variabili, indipendenti e dipendenti, che si hanno nel circuito di Fig.A.1 nel caso del transitorio considerato come esempio.

Come si è potuto constatare, la risoluzione dei transitori con le L-Trasformate, anche se semplifica l'integrazione delle equazioni differenziali, è comunque abbastanza laboriosa. Inoltre, se le variabili indipendenti non hanno andamenti semplici e di cui siano note le L-trasformate, le funzioni che si ottengono sono di difficile trasformazione sia diretta sia inversa. Perciò risulta quasi sempre preferibile per lo studio dei transitori l'impiego di programmi di simulazione. L'importanza dell'approccio alle L-trasformate sta soprattutto nella definizione di importanti concetti, quali le Funzioni di Trasferimento e le loro radici, le relazioni tra lo studio in frequenza e quello alle L-Trasformate, i diagrammi di Bode ecc. e nello studio della stabilità dei sistemi a controreazione.

## A.6 – Rappresentazione grafica delle Funzioni di Trasferimento – Diagrammi di Bode

L'espressione della Funzione di Trasferimento  $FDT_{12}$  tra  $E_1$  e la componente  $I_{21}$ , definita nella (A.11), si ricava dalla prima delle (A.10) e, analogamente a quanto fatto per la (A.1 6), può essere messa in una forma che pone in evidenza i poli e gli zeri

$$FDT_{12}(s) = \frac{1 + s C_3 R_4}{s^2 L_2 C_3 R_4 + s L_2 + R_4} = \frac{1}{L_2} \frac{(s - s_{z1})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2})} \quad (A.34)$$

dove i poli  $s_{p1}$  e  $s_{p2}$  hanno i valori  $-133.33 \pm 385.86$  dati dalle (A.14) e (A.15) e dove lo zero vale  $s_{z1} = -1/(C_3 R_4) = -1/\tau_1 = -1/(3.75 \cdot 10^{-3}) = -266$  rad/s.

Sostituendo  $j\omega$  a  $s$  nella (A.34) e tracciando gli andamenti del modulo e della fase in funzione di  $\omega$ , si ottiene il diagramma di Bode esatto mostrato in Fig.A.5.a (scale logaritmiche).

Il diagramma ha inizialmente un andamento quasi costante, inizia a crescere quando  $\omega$  si avvicina al modulo dello zero, cioè  $\omega \approx |s_{z1}|$ , e torna a calare quando  $\omega$  ha superato il modulo dei poli, cioè per  $\omega > |s_{p1}| = |s_{p2}| = \sqrt{(133.33^2 + 385.86^2)} = 408.24$  rad/s.

Si può notare una sovralongazione (overshoot) del modulo della  $FDT_{12}$  in corrispondenza della pulsazione dei due poli complessi coniugati. Tale sovralongazione si verifica in generale quando si incontrano di radici complesse coniugate ed è tanto più grande quanto maggiore è il rapporto tra la parte immaginaria e quella reale della radice stessa.

Il diagramma esatto delle fasi è prossimo a fase nulla nel tratto prima dello zero. Esso tende ad aumentare in prossimità del polo, per poi diminuire e tendere a  $-90^\circ$  dopo i poli. Si può in generale affermare che il diagramma esatto delle fasi tende a seguire, con andamento addolcito, quello del diagramma asintotico delle fasi stesse.

Per il tracciamento del diagramma asintotico della stessa  $FDT_{12}$ , si osserva che il terzo membro della (A.34) ha una forma del tipo indicato dalla (7) di par.6. Ordinando le radici in ordine di modulo crescente, si vede che lo zero precede, di poco, i due poli complessi coniugati. Prima dello zero, il diagramma asintotico ha andamento orizzontale, perché l'approssimazione ponendo  $s=0$  in tutti i fattori, secondo il criterio indicato in par.6, dà per la  $FDT_{12}$  un valore del modulo costante  $|s_{z1}/(L_2 s_{p1} s_{p2})| = 1/R_4 = 13.33 \cdot 10^{-3}$ .

Dopo lo zero, a 266 rad/s, il fattore al numeratore è approssimato con  $s=j\omega$ , e quindi si ha un corto tratto crescente, proporzionale ad  $\omega$ , rilevabile in figura.

I due poli complessi coniugati hanno modulo uguale 408.24 rad/s. Dopo tale pulsazione, i due fattori al denominatore si approssimano con  $(j\omega j\omega)$  e nel complesso la  $FDT_{12}$  si approssima con  $j\omega/(L_2 j\omega j\omega) = 1/(L_2 j\omega)$ . Il diagramma scende quindi con legge iperbolica.

E' opportuno ricordare che, nel diagramma del modulo  $M$  in funzione della pulsazione  $\omega$ , con scale logaritmiche le ascisse sono del tipo  $X=A_o \log(\omega)$  e le ordinate del tipo  $Y=A_v \log(M)$ , con  $A_o$  e  $A_v$  fattori di scala opportuni.

Se il modulo è proporzionale a  $\omega$ , cioè  $M=K \omega$ , considerando due valori  $\omega_1$  e  $\omega_2$  di  $\omega$ , ed i corrispondenti valori  $M_1$  e  $M_2$  di  $M$ , i rapporti di incremento sono uguali, si ha cioè  $\omega_2 / \omega_1 = M_2 / M_1$ . Ad esempio se  $\omega$  cresce di 10 volte (una decade), anche  $M$  aumenta di 10 volte. Se si esprime il rapporto dei moduli in Decibel (dB), definiti come  $M(\text{dB}) = 20 \log_{10}(M_2 / M_1)$ , un rapporto 10 equivale a 20 dB. Si può dunque dire che, se il modulo è proporzionale a  $\omega$ , il rapporto di incremento è 20 dB/decade. Facendo riferimento ad un incremento  $\omega_2 / \omega_1 = 2$  (ottava), si parla invece di

6 dB/ottava (attualmente meno usato). Nel caso di proporzionalità tra  $M$  e  $\omega$  considerato, la relazione tra ascissa ed ordinata è del tipo  $Y=A_v \log(M)= A_v \log(K \omega )= A_v [\log(K)+\log(\omega)]= A_v [\log(K)+(1/A_o)X]= =A_v \log(K)+(A_v/A_o)X$ . Gli incrementi di  $Y$  risultano dunque proporzionali a quelli di  $X$  con andamento rettilineo e pendenza  $(A_v/A_o)$ , che diventa  $45^\circ$  se  $A_v=A_o$ .

Se il modulo è invece proporzionale a  $\omega^2$ , cioè  $M=K \omega^2$ , la relazione tra i rapporti di incremento diventa  $M_2/M_1 = (\omega_2/\omega_1)^2$ . Ad una crescita di  $\omega$  10 volte (una decade) corrisponde un aumento di  $m$  di 100 volte, cioè 40 dB. Si ha quindi un rapporto di incremento di 40 dB/decade (o 12 dB/ottava). Nel grafico, la relazione tra ascissa ed ordinata diventa  $Y=A_v \log(M)= A_v \log(K \omega^2)= A_v [\log(K)+2 \log(\omega)]= A_v [\log(K)+2 (1/A_o)X]= =A_v \log(K)+(2A_v/A_o)X$ . Gli incrementi di  $Y$  sono dunque ancora rettilinei, ma con pendenza  $(2A_v/A_o)$ , che diventa  $63.43^\circ$  se  $A_v=A_o$ . Si ha dunque pendenza (trigonometrica) doppia rispetto al caso proporzionale.

Analogamente si ha pendenza di 60 dB/decade per  $M$  proporzionale a  $\omega^3$ , e così via. In tutti i casi i grafici risultano rettilinei con pendenze che possono avere solo valori definiti.

Nel caso di proporzionalità inversa, del tipo  $M=K/\omega^n$ , i rapporti di incremento hanno esponente negativo e la misura in dB, che è logaritmica, cambia semplicemente segno. Si hanno così decrementi di  $-20$  dB/decade,  $-40$  dB/decade ecc, ed i grafici risultano ancora rettilinei, decrescenti e con pendenze  $(-A_v/A_o)$ ,  $(-2A_v/A_o)$ , ecc.

Per quanto riguarda il diagramma delle fasi, esso ha valori costanti corrispondenti alle diverse pendenze del diagramma asintotico:  $0^\circ$  se la pendenza è nulla,  $\pm 90^\circ$  per pendenze  $\pm 20$  dB/decade,  $\pm 180^\circ$  per pendenze  $\pm 40$  dB/decade e così via.

Nel caso sopra considerato, di discesa con legge iperbolica, cioè con proporzionalità inversa, l'ultima parte del grafico asintotico è dunque rettilinea decrescente con pendenza  $-20$  dB/decade e fase  $-90^\circ$ , come mostrato in Fig.A.5.a.

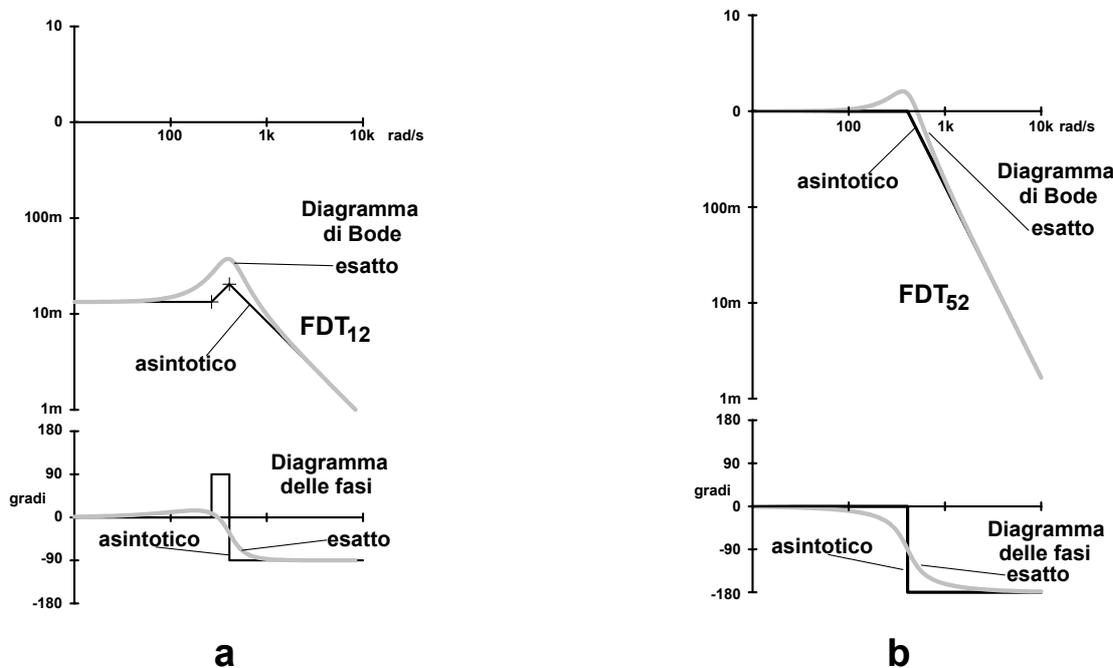


Fig.A.5. Diagrammi di Bode relativi alle Funzioni di Trasferimento di  $I_2(s)$

Ricavate dalle eq. (A.8), (A.10), (A.11)

a – Diagrammi esatti e asintotici della Funzione di trasferimento  $FDT_{12}$  tra  $E_1$  e  $I_{21}$

b – Diagrammi esatti e asintotici della Funzione di trasferimento  $FDT_{52}$  tra  $E_1$  e  $I_{25}$

L'espressione della Funzione di Trasferimento  $FDT_{52}$  tra  $H_5$  e la componente  $I_{25}$ , definita nella (A.11), si ricava dalla prima delle (A.10) e, analogamente a quanto fatto per la  $FDT_{12}$ , può essere messa nella forma

$$FDT_{52}(s) = \frac{R_4}{s^2 L_2 C_3 R_4 + s L_2 + R_4} = \frac{1}{L_2 C_3} \frac{1}{(s - s_{p1})(s - s_{p2})} \quad (A.35)$$

dove i poli  $s_{p1}$  e  $s_{p2}$  hanno ancora i valori  $-133.33 \pm 385.86$  dati dalle (A.14) e (A.15) e dove il numeratore non ha radici, cioè non vi sono zeri.

Il diagramma di Bode esatto che si ottiene sostituendo  $j\omega$  a  $s$  nella (A.35) è mostrato in Fig.A.5.b.

Il diagramma ha inizialmente un andamento quasi costante, inizia a crescere quando  $\omega$  si avvicina al modulo dei poli, cioè  $\omega \approx |s_{p1}| = |s_{p2}| = \sqrt{(133.33^2 + 385.86^2)} = 408.24$  rad/s. Superato tale valore, esso inizia un tratto discendente più ripido di quello della FDT<sub>12</sub>. Ciò è dovuto all'assenza dello zero, per cui il tratto discendente approssima un andamento asintotico proporzionale a  $1/\omega^2$ .

Anche in questo caso si ha una sovralongazione in corrispondenza della pulsazione dei due poli, dovuta alla parte immaginaria dei poli stessi.

Con considerazioni analoghe a quelle fatte per FDT<sub>12</sub>, si vede che prima dei poli il diagramma asintotico ha andamento orizzontale di valore  $1/(L_2 C_3 s_{p1} s_{p2}) = 1$  e perciò la sua fase asintotica in tale intervallo è nulla.

Dopo i due poli complessi coniugati, che hanno modulo uguale 408.24 rad/s, nel complesso la FDT<sub>52</sub> si approssima con  $1/(L_2 j\omega j\omega) = -1/(L_2 \omega^2)$ . Il diagramma scende quindi con pendenza  $-40$  dB/decade e quindi con fase asintotica pari a  $-180^\circ$ .