ANALISI DEL GUADAGNO, DELLA RESISTENZA DI INGRESSO E DELLA RESISTENZA DI USCITA DI UN AMPLIFICATORE OPERAZIONALE, NELL'IPOTESI DI GUADAGNO FINITO, DI RESISTENZA DI INGRESSO FINITA E DI RESISTENZA DI USCITA NON NULLA

Si considereranno separatamente i casi di resistenza di ingresso finita con guadagno finito e quelli di resistenza di uscita non nulla con guadagno finito.

Effetti della resistenza di ingresso R_{ID} finita e dell'amplificazione A finita– configurazione invertente

Per determinare gli effetti di una resistenza di ingresso differenziale R_{ID} finita e di un guadagno differenziale A non infinito, per la configurazione invertente dell'amplificatore operazionale si considera lo schema di Fig.1.

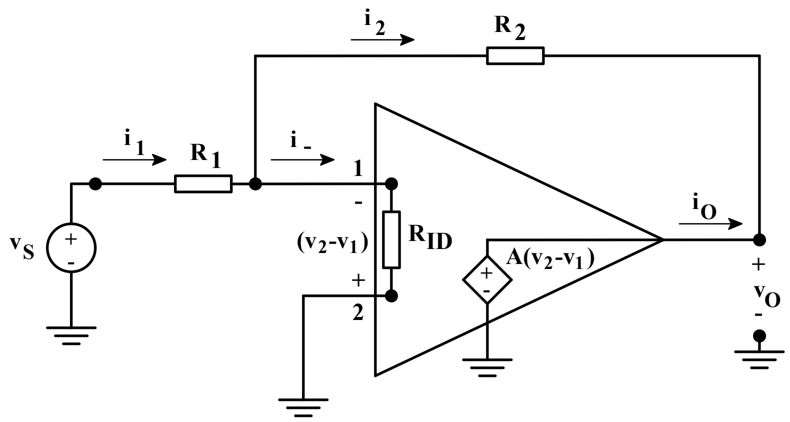

Fig.1. Amplificatore Operazionale con amplificazione A non infinita
e resistenza di ingresso differenziale R_{ID} finita,
in configurazione invertente

L'ingresso 2 è connesso a massa. Perciò la sua tensione è nulla

$$v_2 = 0 \tag{1}$$

La tensione v_1 dell'ingresso 1 è legata alla tensione di comando v_S dalla relazione

$$v_1 = v_S - R_1 i_1 \tag{2}$$

La corrente i_- che entra nel terminale di ingresso 1 percorre la resistenza R_{ID}. Essa è data da

$$i_- = \frac{v_1 - v_2}{R_{ID}} \tag{3}$$

La corrente i_2 vale

$$i_2 = \frac{v_1 - v_O}{R_2} \tag{4}$$

La tensione di uscita dall'amplificatore v_O è

$$v_O = A(v_2 - v_1) \tag{5}$$

La corrente i_1 si suddivide nella i_- e nella i_2

$$i_1 = i_- + i_2 \tag{6}$$

Le relazioni da (1) a (6) formano un sistema che consente di determinare tutte le grandezze del circuito.
In particolare, da (1), (5) e (4), eliminando v_2 e v_O, si ottiene

$$i_2 = v_1 \frac{1 + A}{R_2} \tag{7}$$

e, dalla (3) e dalla (1)

$$i_- = \frac{v_1}{R_{ID}} \tag{8}$$

Dalla (6), tenuto conto delle (7) e (8) si ricava

$$i_1 = v_1\left(\frac{1}{R_{ID}}+\frac{1+A}{R_2}\right) \tag{9}$$

che mostra che nel nodo dell'ingresso invertente si vede una resistenza data dal parallelo di R_{ID} e di una resistenza equivalente $R_2/(1+A)$.

Sostituendo l'espressione (2) di v_1 nella (9) e risolvendo rispetto a v_S si ottiene

$$v_S = i_1 \frac{1+R_1\left(\frac{1}{R_{ID}}+\frac{1+A}{R_2}\right)}{\left(\frac{1}{R_{ID}}+\frac{1+A}{R_2}\right)} = i_1\left[R_1+\frac{1}{\left(\frac{1}{R_{ID}}+\frac{1+A}{R_2}\right)}\right] \tag{10}$$

La resistenza di ingresso R_{IN} per definizione è data dal rapporto v_S/i_1. Perciò

$$R_{IN} = \frac{v_S}{i_1} = R_1+\frac{1}{\left(\frac{1}{R_{ID}}+\frac{1+A}{R_2}\right)} = R_1 + R_{ID} // [R_2/(1+A)] \tag{11}$$

Come si vede dalla (11), la resistenza di ingresso R_{IN} per la configurazione invertente è data dalla resistenza R_1 in serie con il parallelo di R_{ID} e $R_2/(1+A)$. Nel caso di $R_{ID}\to\infty$, R_{IN} si riduce alla serie di R_1 e di $R_2/(1+A)$. Invece, per $A\to\infty$, in ogni caso $R_{ID} = R_1$. Poichè normalmente è $R_{ID} >> R_2/(1+A)$, si può approssimare $R_{IN} \approx R_1 + R_2/(1+A)$.

Per ricavare il guadagno a catena chiusa G, sostituendo la (9) nella (10) si elimina i_1

$$v_S = v_1\left[R_1\left(\frac{1}{R_{ID}}+\frac{1+A}{R_2}\right)+1\right] \tag{12}$$

Dalla espressione (5) di v_O, tenuto conto della (1) ed eliminando v_1, si ottiene

$$v_O = -A\, v_S \frac{1}{R_1\left(\frac{1}{R_{ID}}+\frac{1+A}{R_2}\right)+1} \tag{13}$$

cioè

$$v_O = -v_S \frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+\frac{1}{A}\left(1+\frac{R_2}{R_{ID}}+\frac{R_2}{R_1}\right)} \tag{14}$$

Il rapporto delle tensioni v_O/v_S o anche delle loro variazioni v_o/v_s esprime il guadagno a catena chiusa G

$$G = \frac{v_O}{v_S} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+\frac{1}{A}\left(1+\frac{R_2}{R_{ID}}+\frac{R_2}{R_1}\right)} \tag{15}$$

La (15) mostra che una resistenza di ingresso R_{ID} differenziale finita, con amplificazione A finita, altera un poco il valore del guadagno a catena chiusa G. Per $R_{ID}\to\infty$, l'espressione (15) tende alla (2.1) del Sedra-Smith. Se $A\to\infty$, in ogni caso il guadagno G tende al valore ideale $G = -R_2/R_1$.

Per dare un'idea dell'influenza di R_O e di A, nel caso tipico di un amplificatore operazionale con ingresso a transistori bipolari con A=10000, R_{ID} =100 kΩ, R_2 =100 kΩ, R_1 =10 kΩ, si ottiene G= −9.988, con una diminuzione in modulo di 0.12% rispetto al valore di G= −10 che si avrebbe nel caso di amplificatore operazionale ideale, e R_{IN} =10.01 10 kΩ che supera del 0.1% il valore di R_1.

Effetti della resistenza di ingresso R_{ID} finita e dell'amplificazione A finita– configurazione non invertente

Per determinare gli effetti di una resistenza di ingresso differenziale R_{ID} finita e di un guadagno differenziale A non infinito, per la configurazione non invertente dell'amplificatore operazionale si considera lo schema di Fig.2.

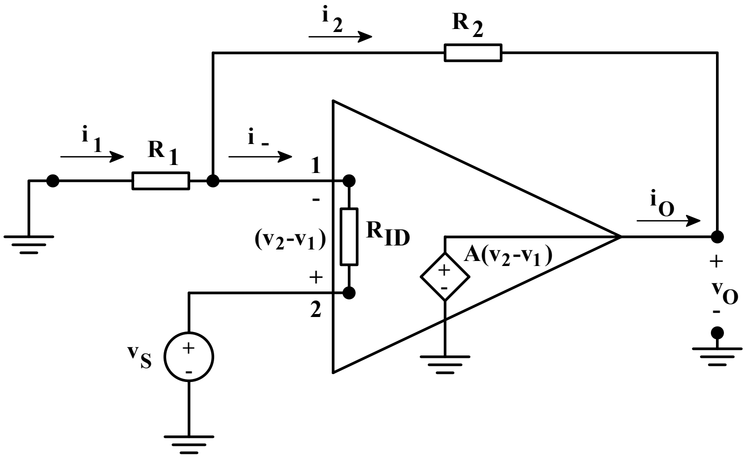

Fig.2. Amplificatore Operazionale con amplificazione A non infinita
e resistenza di ingresso differenziale R_{ID} finita,
in configurazione non invertente

L'ingresso 2 è connesso alla tensione di comando v_S. Perciò

$$v_2 = v_S \tag{16}$$

La tensione v_1 dell'ingresso 1 è determinata dalla corrente i_1 secondo la relazione

$$v_1 = -R_1 i_1 \tag{17}$$

La corrente i_+ che entra nel terminale di ingresso 2 percorre la resistenza R_{ID}. Essa è data da

$$i_+ = \frac{v_2 - v_1}{R_{ID}} \tag{18}$$

La corrente i_- che entra nel terminale di ingresso 1 è uguale e contraria alla i_+

$$i_- = -i_+ \tag{19}$$

La corrente i_2 vale

$$i_2 = \frac{v_1 - v_O}{R_2} \tag{20}$$

La tensione di uscita dall'amplificatore v_O è

$$v_O = A(v_2 - v_1) \tag{21}$$

La corrente i_1 si suddivide nella i_- e nella i_2

$$i_1 = i_- + i_2 \tag{22}$$

Le relazioni da (16) a (22) formano un sistema che consente di determinare tutte le grandezze del circuito. In particolare, da (20), (16) e (21), eliminando v_2 e v_O, si ottiene

$$i_2 = v_1 \frac{-v_S A + v_1 (1 + A)}{R_2} \tag{23}$$

e, dalla (17)

$$i_1 = -\frac{v_1}{R_1} \tag{24}$$

Si ricava la corrente i_+ entrante nel morsetto 2 eliminando i_1, i_2 e i_- dalle (19), (22), (23), (24)

$$i_+ = -v_S \frac{A}{R_2} + v_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1 + A}{R_2} \right) \tag{25}$$

Dalla (18), tenuto conto della (16) si ha

$$v_1 = v_S - R_{ID}\, i_+ \qquad (26)$$

Sostituendo la (26) nella (25) risulta

$$i_+\left[1 + R_{ID}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1+A}{R_2}\right)\right] = v_S\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (27)$$

Risolvendo rispetto a v_S risulta

$$v_S = i_+\left[\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_{ID}\left(1 + A\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)\right] \qquad (28)$$

La resistenza di ingresso R_{IN} per definizione è data dal rapporto v_S / i_+. Perciò

$$R_{IN} = \frac{v_S}{i_+} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_{ID}\left(1 + A\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) \qquad (29)$$

Come si vede, la resistenza di ingresso R_{ID} per la configurazione non invertente è data dalla somma del parallelo di R_1 e R_2 con la resistenza differenziale di ingresso R_{ID} moltiplicata per un fattore che usualmente è molto elevato. L'espressione (29) tende a ∞ se A oppure R_{ID} tendono a ∞. A differenza del caso invertente, la resistenza di ingresso nel caso non invertente tende dunque ad assumere valori elevati (anche se R_{ID} non è molto grande purchè sia grande A).

Per ricavare il guadagno a catena chiusa G, dalla (28) si ricava i_+

$$i_+ = v_S \frac{1}{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_{ID}\left(1 + A\dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\right)} \qquad (30)$$

Eliminando i_+, v_2 e v_1 da (18), (21) e (30) si ottiene

$$v_O = v_S \frac{A R_{ID}}{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_{ID}\left(1 + A\dfrac{R_1}{R_1 + R_2}\right)} \qquad (31)$$

e, con alcune trasformazioni

$$v_O = v_S \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{A}\left(1 + \dfrac{R_2}{R_{ID}} + \dfrac{R_2}{R_1}\right)} \qquad (32)$$

Il rapporto delle tensioni v_O / v_S o anche delle loro variazioni v_o / v_s esprime il guadagno a catena chiusa G

$$G = \frac{v_O}{v_S} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \dfrac{1}{A}\left(1 + \dfrac{R_2}{R_{ID}} + \dfrac{R_2}{R_1}\right)} \qquad (33)$$

La (33) mostra che una resistenza di ingresso R_{ID} differenziale finita, con amplificazione A finita, altera un poco il valore del guadagno a catena chiusa G. Per $R_{ID} \to \infty$, l'espressione (15) tende alla (2.11) del Sedra-Smith. Se $A \to \infty$, in ogni caso il guadagno G tende al valore ideale $G = (R_1 + R_2)/R_1$.

Per dare un'idea dell'influenza di R_O e di A, nel caso tipico di un amplificatore operazionale con ingresso a transistori bipolari con A=10000, R_{ID} =100 kΩ, R_2 =100 kΩ, R_1 =10 kΩ, si ottiene G= 10.987, con una diminuzione in modulo di 0.12% rispetto al valore di G= −10 che si avrebbe nel caso di amplificatore operazionale ideale, e R_{IN} =91.018 MΩ, che è molto maggiore del valore di R_{ID}.

Effetti della resistenza di uscita R_O non nulla e dell'amplificazione A finita– configurazione invertente

Per determinare gli effetti di una resistenza di uscita R_O non nulla e di un guadagno differenziale A non infinito, per la configurazione invertente dell'amplificatore operazionale si considera lo schema di Fig.1, dove l'uscita è chiusa su un generatore di corrente i_X.

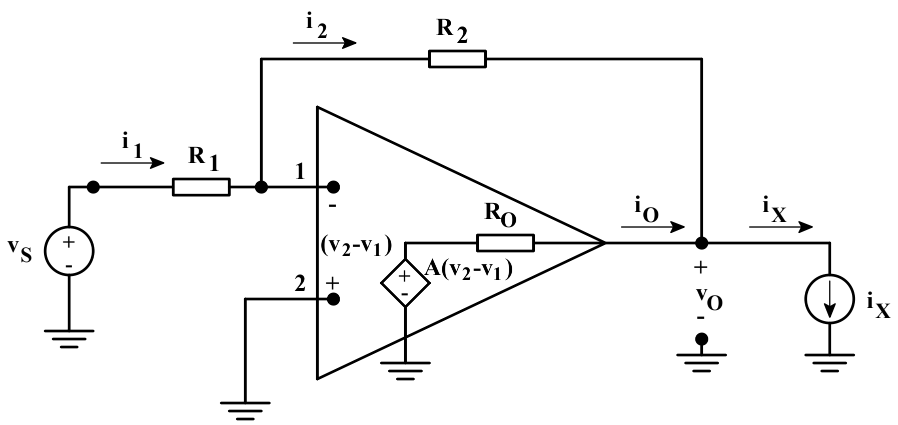

Fig.1. Amplificatore Operazionale con amplificazione A non infinita
e resistenza di uscita R_O non nulla,
in configurazione invertente

L'ingresso 2 è connesso a massa. Perciò la sua tensione è nulla

$$v_2 = 0 \qquad (34)$$

La tensione dell'ingresso 1 è legata alla tensione di comando v_S dalla relazione

$$v_1 = v_S - R_1\, i_1 \qquad (35)$$

La corrente i_2 è data da

$$i_2 = \frac{v_1 - v_O}{R_2} \qquad (36)$$

Se si suppone che le resistenze ai terminali di ingresso 1 e 2 siano infinite, la corrente entrante nel terminale 1 è nulla e le correnti i_1 e i_2 risultano uguali

$$i_1 = i_2 \qquad (37)$$

La corrente i_O uscente dall'amplificatore è data da

$$i_O = \frac{A(v_2 - v_1) - v_O}{R_O} \qquad (38)$$

e la corrente i_X è la somma di i_O e di i_2

$$i_X = i_O + i_2 \qquad (39)$$

Le relazioni da (34) a (39) formano un sistema che consente di determinare tutte le grandezze del circuito.

In particolare, da (35), (36) e (37), eliminando v_1, si ottiene

$$i_1 = i_2 = \frac{v_S - v_O}{R_1 + R_2} \qquad (40)$$

e, dalla (40) e dalla (35), si ha anche

$$v_1 = \frac{v_S\, R_2 + v_O\, R_1}{R_1 + R_2} \qquad (41)$$

Sostituendo l'espressione (41) di v_1 nella (38) e tenendo presente la (34) si ha

$$i_O = \frac{-\, v_S\, A\, R_2 - v_O\,(AR_1 + R_1 + R_2)}{R_O\,(R_1 + R_2)} \qquad (42)$$

Sostituendo la (40) e la (42) nelle (39) si ricava

$$i_X = \frac{-\, v_S\,(A\, R_2 - R_O) - v_O\,(AR_1 + R_1 + R_2 + R_O)}{R_O\,(R_1 + R_2)} \qquad (43)$$

e, risolvendo rispetto a v_O si ottiene

$$v_O = -v_S \frac{R_2}{R_1} \frac{1-\frac{R_O}{A R_2}}{1+\frac{1}{A}\left(1+\frac{R_2+R_O}{R_1}\right)} - i_X \frac{R_O}{1+\frac{(A R_1 + R_O)}{(R_1+R_2)}} \tag{44}$$

Nella (44), il coefficiente di v_S esprime il guadagno a catena chiusa G nelle condizioni considerate, cioè

$$G = \frac{v_o}{v_s} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1-\frac{R_O}{A R_2}}{1+\frac{1}{A}\left(1+\frac{R_2+R_O}{R_1}\right)} \tag{45}$$

dove con v_o e v_s si sono indicate le variazioni di v_O e v_S rispetto alle condizioni di lavoro V_O e V_S. Si noti che, per R_O=0 si ottiene la relazione (2.1) del Sedra-Smith. Per $A \rightarrow \infty$ la (12) tende all'espressione $G= -R_2 /R_1$ che vale per l'amplificatore ideale in connessione invertente, anche se R_O non è nulla . Grandi valori dell'amplificazione A riducono quindi l'effetto della resistenza di uscita R_O sul guadagno G.

Il coefficiente di i_X nella (44), cambiato di segno, si può interpretare come la resistenza di uscita R_{OUT} dell'amplificatore, cioè

$$R_{OUT} = -\frac{v_o}{i_x} = \frac{R_O}{1+\frac{(A R_1 + R_O)}{(R_1+R_2)}} \approx \frac{R_O}{1+\frac{A R_1}{(R_1+R_2)}} \tag{46}$$

Come mostra la (46), R_{OUT} si annulla sia se R_O=0 sia se $A \rightarrow \infty$. Normalmente il termine $AR_1 >> R_O$, e quest'ultimo può essere trascurato, come indicato nell'ultimo membro della (46).

Per dare un'idea dell'influenza di R_O e di A, nel caso tipico di A=10000, R_O =50 Ω, R_2 =100 kΩ, R_1 =10 kΩ, si ottiene $G= -9.989$ e R_{OUT} =55 mΩ, con una diminuzione in modulo di 0.11% rispetto al valore di $G= -10$ che si avrebbe nel caso di amplificatore operazionale ideale.

Effetti della resistenza di uscita R_O non nulla e dell'amplificazione A finita– configurazione non invertente

Per determinare gli effetti di una resistenza di uscita R_O non nulla e di un guadagno differenziale A non infinito, per la configurazione non invertente dell'amplificatore operazionale si considera lo schema di Fig.2, dove l'uscita è chiusa su un generatore di corrente i_X.

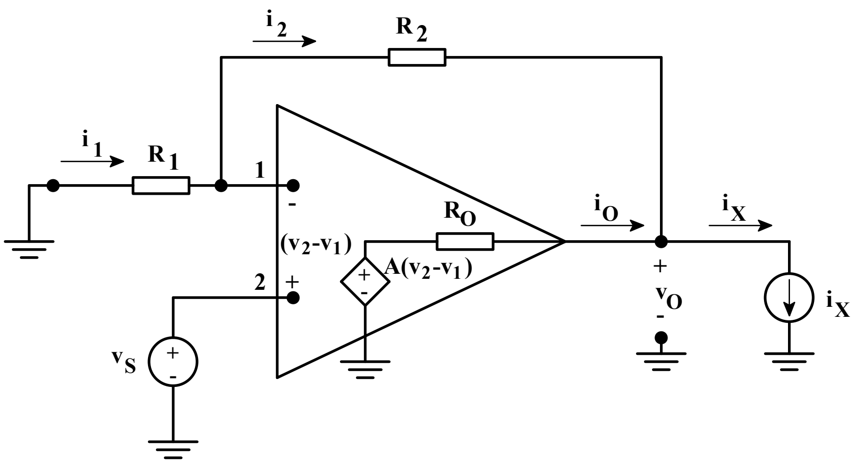

Fig.2. Amplificatore Operazionale con amplificazione A non infinita
e resistenza di uscita R_O non nulla,
in configurazione non invertente

In questo caso la tensione di comando è applicata all'ingresso 2 e quindi

$$v_2 = v_S \tag{47}$$

La tensione dell'ingresso 1 è determinata dalla corrente che percorre R_1

$$v_1 = -R_1 i_1 \tag{48}$$

La corrente i_2 è ancora data da

$$i_2 = \frac{v_1 - v_O}{R_2} \tag{49}$$

Se si suppone che le resistenze ai terminali di ingresso 1 e 2 siano infinite, la corrente entrante nel terminale 1 è nulla e le correnti i_1 e i_2 risultano uguali

$$i_1 = i_2 \tag{50}$$

La corrente i_O uscente dall'amplificatore è data da

$$i_O = \frac{A(v_2 - v_1) - v_O}{R_O} \tag{51}$$

e la corrente i_X è la somma di i_O e di i_2

$$i_X = i_O + i_2 \tag{52}$$

Le relazioni da (47) a (52) formano un sistema che consente di determinare tutte le grandezze del circuito.
In particolare, da (48), (49) e (50), eliminando v_1, si ottiene

$$i_1 = i_2 = \frac{-v_O}{R_1 + R_2} \tag{53}$$

e, dalla (53) e dalla (48), si ha anche

$$v_1 = v_O \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{54}$$

Sostituendo l'espressione (54) di v_1 nella (51) e tenendo presente la (47) si ha

$$i_O = \frac{v_S A(R_1 + R_2) - v_O (AR_1 + R_1 + R_2)}{R_O (R_1 + R_2)} \tag{55}$$

Sostituendo la (53) e la (55) nella (52) si ricava

$$i_X = \frac{v_S A\ (R_1 + R_2) - v_O (AR_1 + R_1 + R_2 + R_O)}{R_O (R_1 + R_2)} \tag{56}$$

e, risolvendo rispetto a v_O si ottiene

$$v_O = v_S \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{1}{A}\left(1 + \frac{R_2 + R_O}{R_1}\right)} - i_X \frac{R_O}{1 + \frac{(A R_1 + R_O)}{(R_1 + R_2)}} \tag{57}$$

Il guadagno a catena chiusa G, è espresso dal coefficiente di v_S

$$G = \frac{v_o}{v_i} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{1}{A}\left(1 + \frac{R_2 + R_O}{R_1}\right)} \tag{58}$$

dove con v_o e v_s si sono indicate le variazioni di v_O e v_S rispetto alle condizioni di lavoro V_O e V_S.. La (58) si riduce, per R_O=0, alla relazione (2.11) del Sedra-Smith. Per $A \rightarrow \infty$ la (58) tende all'espressione $G=1+R_2/R_1$ che è equivalente alla (2.10) del Sedra-Smith e che vale per l'amplificatore ideale in connessione invertente, anche se R_O non è nulla. Grandi valori dell'amplificazione A riducono quindi anche in questo caso l'effetto della resistenza di uscita R_O sul guadagno G.

Il coefficiente di i_X nella (57), cambiato di segno, si può ancora interpretare come la resistenza di uscita R_{OUT} dell'amplificatore, cioè

$$R_{OUT} = -\frac{v_o}{i_x} = \frac{R_O}{1 + \frac{(A R_1 + R_O)}{(R_1 + R_2)}} \approx \frac{R_O}{1 + \frac{A R_1}{(R_1 + R_2)}} \tag{59}$$

Si noti che l'espressione (59) è uguale alla (46) trovata per la connessione invertente. Quindi, anche in questo caso, R_{OUT} si annulla sia se R_O=0 sia se $A \rightarrow \infty$ e normalmente il termine R_O può essere trascurato.

Nel caso tipico di A=10000, R_O =50 Ω, R_2 =100 kΩ, R_1 =10 kΩ, si ottiene G=10.988 e R_{OUT} =55 mΩ, con una diminuzione di 0.11% rispetto al valore di G=11 che si avrebbe nel caso di amplificatore operazionale ideale.