ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 23.01.2017

TEMA 1

Esercizio 1 Calcolare l'integrale

$$\int_{\log(3)}^{2} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx$$

Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\log(3)}^{2} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx &= (\text{ponendo } e^x = t, \text{ per cui } dx = dt/t) \int_{3}^{e^2} \frac{1}{t^2-4}\,dt\\ &= -\frac{1}{4}\int_3^{e^2} \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t-2}\,dt = \frac{1}{4}\ln\frac{|t-2|}{|t+2|}\Big|_3^{e^2}\\ &= \frac{1}{4}\left[\log 5\frac{e^4-2}{e^4+2}\right] = \frac{1}{2}\left(\operatorname{settanh}\frac{3}{2} - \operatorname{settanh}\frac{e^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Esercizio 2 Risolvere la disequazione

$$\left|2\bar{z}^2 - 2z^2\right| < 3$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Svolgimento. Si ha

$$2\bar{z}^2 - 2z^2 = 4(\bar{z}-z)(\bar{z}+z) = (\text{ponendo } z = x+iy)\ 8ixy,$$

da cui

$$\left|2\bar{z}^2 - 2z^2\right| = 8|xy|.$$

La soluzione è quindi

$$\{z = x+iy \in \mathbb{C} : |xy| < \frac{3}{8}\},$$

rappresentata in figura 1.

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\big(\cos(1/n) - 1 + \sin(1/2n^\alpha)\big)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Dagli sviluppi di MacLaurin di $\cos x$ e di $\sin x$ risulta, per $n \to +\infty$,

$$\cos(1/n) - 1 + \sin(1/2n) = -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4!\cdot n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) + \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{1}{3!8n^{3\alpha}} + \frac{1}{5!32n^{5\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{5\alpha}}\right),$$

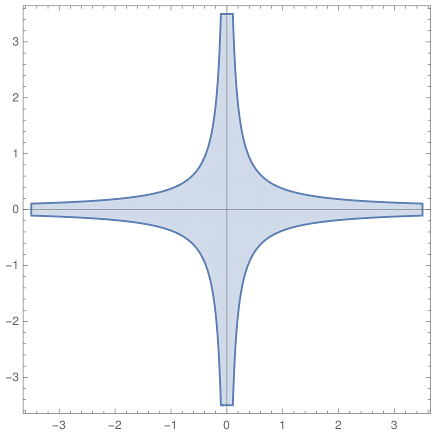

Figura 1: Le soluzioni dell'esercizio 2 (Tema 1).

per cui il termine generale della serie, per $n \to +\infty$, è asintotico a

$$\begin{cases} (\text{se } \alpha < 2) & \frac{n^2}{2n^\alpha} \\ (\text{se } \alpha = 2) & 1/24n^2 \\ (\text{se } \alpha > 2) & -1/2 \end{cases}$$

e quindi ha segno definitivamente costante per $n \to +\infty$. Se $\alpha \neq 2$ il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie diverge (a $-\infty$). Per $\alpha = 2$ la serie converge.

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin \frac{|x| - 4}{2 + x^2}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. (i) La funzione è pari. $D = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{|x|-4}{2+x^2} \leq 1\}$. La disequazione $\frac{|x|-4}{2+x^2} \leq 1$ equivale a $|x| - 6 - x^2 \leq 0$, che è sempre verificata, mentre $\frac{|x|-4}{2+x^2} \geq -1$ equivale a $x^2 + |x| - 2 \geq 0$, che è verificata per $x \leq -1$ e $x \geq 1$. Pertanto $D = [1, +\infty[\ (\cup] - \infty, -1])$. D'ora in poi assumeremo sempre $x \geq 0$. La funzione è continua in D, $f(1) = \arcsin(-1) = -\pi/2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin 0 = 0$, asintoto orizzontale. Il segno di f è dato dal segno dell'argomento dell'arcoseno, per cui $f(x) \geq 0$ se e solo se $x - 4 \geq 0$ e quindi $x \geq 4$.
(ii) In D si possono applicare le regole di derivazione se l'argomento dell'arcoseno è diverso da ± 1, cioè per $x > 1$. Per tali x si ha

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2 - 2x(x-4)}{(2+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-4}{2+x^2}\right)^2}} = \frac{-x^2 + 8x + 2}{(1 + 2x^2)\sqrt{2x^2 + x - 3}},$$

da cui si ricava che $f'(x) \leq 0$ se e solo se $-x^2 + 8x + 2 \leq 0$, per $x > 1$, cioè per $1 < x < 4 + 3\sqrt{2}$, che pertanto è il punto di massimo assoluto, mentre $x = 1$ è il punto di minimo assoluto. Si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty,$$

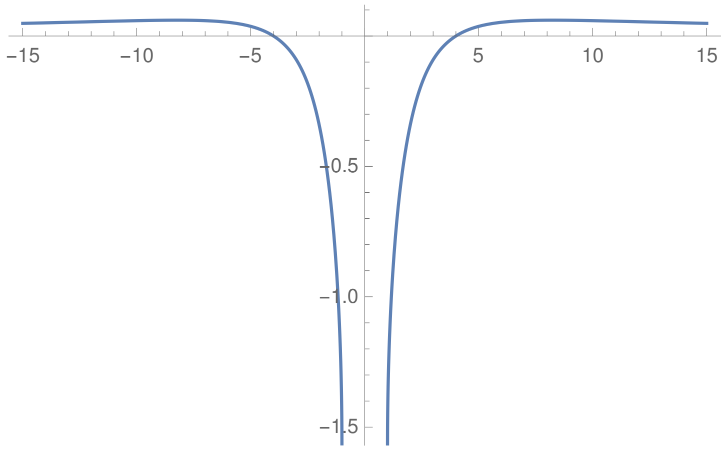

Figura 2: Il grafico di f (Tema 1).

per cui il grafico di f, rappresentato nella figura 2, ha tangente verticale in $(1, \pi/2)$.

Esercizio 5 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\arctan(x-1)| \arctan x}{|1-x^2|^\alpha \, (\sinh\sqrt{x})^\beta} \, dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. L'integranda $f(x)$ è continua in $]0,1[\cup]1,+\infty[$, per cui bisogna studiare la convergenza dell'integrale separatamente per $x \to 0^+$, per $x \to 1$ e per $x \to +\infty$.
Per $x \to 0$,

$$f(x) \sim \frac{x \arctan 1}{x^{\beta/2}} = \arctan 1 \frac{1}{x^{\frac{\beta}{2}-1}},$$

e quindi l'integrale converge in 0 se e solo se $\beta < 4$.
Per $x \to 1$,

$$f(x) \sim \frac{\arctan 1 \, |x-1|}{|x-1|^\alpha |x+1|^\alpha (\sinh\sqrt{2})^\beta} = \frac{\arctan 1}{2^\alpha (\sinh\sqrt{2})^\beta} \frac{1}{|x-1|^{\alpha-1}},$$

e quindi l'integrale converge in 1 se e solo se $\alpha < 2$.
Per $x \to +\infty$, se $\beta > 0$

$$f(x) \leq \frac{\pi^2}{4\,(\sinh\sqrt{x})^\beta} \leq \frac{\pi^2}{2^{(2-\beta)}\, e^{(\beta\sqrt{x})}}.$$

Quest'ultima espressione è $o(1/x^2)$ per $x \to +\infty$ e quindi converge.
Se $\beta = 0$,

$$f(x) \sim \pi^2/4x^{2\alpha},$$

quindi converge se $\alpha > 1/2$. Se $\beta < 0$,

$$f(x) \sim \pi^2 e^{-\beta/2}/2^{2-\beta} > 1/x$$

per $x \to +\infty$ e quindi l'integrale diverge. In sintesi, l'integrale converge se $\alpha < 2$ e $0 < \beta < 4$ o se $\beta = 0$ e $1/2 < \alpha < 2$.

Esercizio facoltativo. Sia I un intervallo chiuso e limitato e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $f(x) \in I$ per ogni $x \in I$. Dimostrare che esiste almeno un $x \in I$ tale che $f(x) = x$.

Svolgimento. Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - x$, che vogliamo dimostrare che si annulla in almeno un punto di $I := [a, b]$. Se $g(a), g(b) \neq 0$ allora necessariamente $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$, per cui per il teorema degli zeri esiste $\bar{x} \in]a, b[$ tale che $g(\bar{x}) = 0$.

TEMA 2

Esercizio 1 Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 4e^x + 5}\, dx$$

Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 4e^x + 5}\, dx &= (\text{ponendo } e^x = t, \text{ per cui } dx = dt/t) \int_1^e \frac{t}{t(t^2 + 4t + 5)}\, dt \\ &= \int_1^e \frac{1}{(t+2)^2 + 1}\, dt = \arctan(t+2)\big|_1^e = \arctan(e+2) - \arctan 3.\end{aligned}$$

Esercizio 2 Risolvere la disequazione

$$\left|4\bar{z}^2 - 4z^2\right| < 5$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Svolgimento. Si ha

$$4\bar{z}^2 - 4z^2 = 4(\bar{z} - z)(\bar{z} + z) = (\text{ponendo } z = x + iy)\ -16ixy,$$

da cui

$$\left|4\bar{z}^2 - 4z^2\right| = 16|xy|.$$

La soluzione è quindi

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} : |xy| < \frac{5}{16}\},$$

rappresentata in figura 3.

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\bigl(2 - e^{1/2n^\alpha} - \cos(1/n)\bigr)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Dagli sviluppi di MacLaurin di e^x e di $\cos x$ risulta, per $n \to +\infty$,

$$e^{1/2n^\alpha} + \cos\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2n^\alpha} + \frac{1}{2 \cdot 4n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) + 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

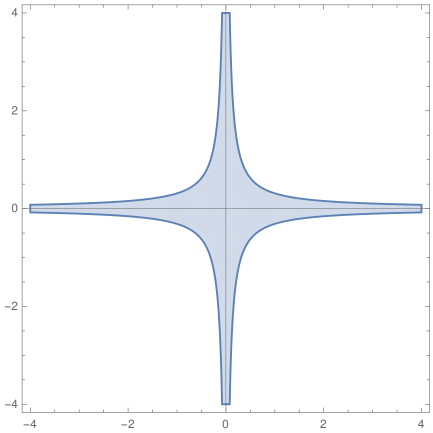

Figura 3: Le soluzioni dell'esercizio 2 (Tema 2).

per cui il termine generale della serie, per $n \to +\infty$, è asintotico a

$$\begin{cases} (\text{se } \alpha < 2) & \frac{-n^2}{2n^\alpha} \\ (\text{se } \alpha = 2) & \frac{-n^2}{6n^4} \\ (\text{se } \alpha > 2) & \frac{-n^2}{2n^2} \end{cases}$$

e quindi ha segno definitivamente costante per $n \to +\infty$. Se $\alpha \neq 2$, il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie diverge (a $-\infty$). Se $\alpha = 2$ la serie converge assolutamente e quindi converge.

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin \frac{4 - |x|}{1 + 2x^2}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. (i) La funzione è pari, per cui la studiamo per $x \geq 0$. Per tali x, $D = \{x > 0 : |4-x| \leq 1+2x^2\}$. La disequazione $|4 - x| \leq 1 + 2x^2$ per $x \geq 4$ equivale a $2x^2 - x + 5 \geq 0$, che è sempre verificata, mentre per $0 \leq x < 4$ equivale a $2x^2 + x - 3 \geq 0$, che è verificata per $x \geq 1$. Pertanto $D = [2, +\infty[\ (\cup] - \infty, -2])$. La funzione è continua in D, $f(2) = \arcsin(1) = \pi/2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin 0 = 0$, asintoto orizzontale. Il segno di f è dato dal segno dell'argomento dell'arcoseno, per cui $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \leq 4$.
(ii) In D si possono applicare le regole di derivazione se l'argomento dell'arcoseno è diverso da ± 1, cioè per $x > 2$. Per tali x si ha

$$f'(x) = \frac{-(1 + 2x^2) - (4 - x)4x}{(1 + 2x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{4-x}{1+2x^2}\right)^2}} = \frac{2x^2 - 16x - 1}{(1 + 2x^2)\sqrt{2x^2 + x - 3}},$$

da cui si ricava che $f'(x) \leq 0$ se e solo se $2x^2 - 16x - 1$, per $x > 2$, cioè per $2 < x < 4 + \sqrt{66}/2$, che pertanto è il punto di minimo assoluto, mentre $x = 2$ è il punto di massimo assoluto. Si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty,$$

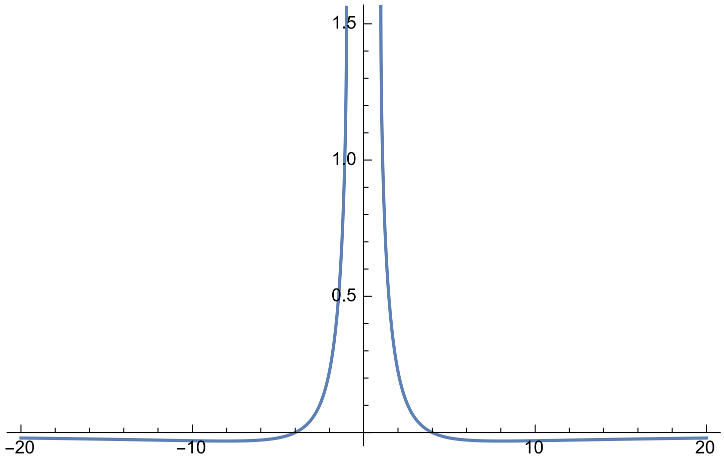

Figura 4: Il grafico di f (Tema 2).

per cui il grafico di f, rappresentato in figura 4, ha tangente verticale in $(1, \pi/2)$.

Esercizio 5 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\arctan(x-2)|\,\arctan x}{|x^2-4|^\alpha\,(\sinh\sqrt[3]{x})^\beta}\,dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. L'integranda $f(x)$ è continua in $]0,2[\cup]2,+\infty[$, per cui bisogna studiare la convergenza dell'integrale separatamente per $x \to 0^+$, per $x \to 2$ e per $x \to +\infty$.
Per $x \to 0$,

$$f(x) \sim \frac{x \arctan 2}{4^\alpha x^{\beta/3}} = \frac{\arctan 2}{4^\alpha} \frac{1}{x^{\frac{\beta}{3}-1}},$$

e quindi l'integrale converge in 0 se e solo se $\beta < 6$.
Per $x \to 2$,

$$f(x) \sim \frac{\arctan 2\,|x-2|}{|x-2|^\alpha |x+2|^\alpha (\sinh\sqrt[3]{2})^\beta} = \frac{\arctan 2}{4^\alpha (\sinh\sqrt[3]{2})^\beta} \frac{1}{|x-2|^{\alpha-1}},$$

e quindi l'integrale converge in 2 se e solo se $\alpha < 2$.
Per $x \to +\infty$, se $\beta > 0$

$$f(x) \le \frac{\pi^2}{4\,(\sinh\sqrt[3]{x})^\beta} \le \frac{\pi^2}{2^{(2-\beta)}\,e^{(\beta\sqrt[3]{x})}}.$$

Quest'ultima espressione è $o(1/x^2)$ per $x \to +\infty$, per cui l'integrale converge. Se $\beta = 0$,

$$f(x) \sim \pi^2/4x^{2\alpha},$$

quindi converge se $\alpha > 1/2$. Se $\beta < 0$, f è illimitata per $x \to +\infty$ e quindi l'integrale diverge.

In sintesi, l'integrale converge se $\alpha < 2$ e $0 < \beta < 6$ o se $\beta = 0$ e $1/2 < \alpha < 2$.

TEMA 3

Esercizio 1 [6 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 4}^{3} \frac{e^x}{e^{2x}-9}\,dx$$

Svolgimento. Si ha

$$\int_{\log 4}^{3} \frac{e^x}{e^{2x}-9}\,dx = (\text{ponendo } e^x = t, \text{ per cui } dx = dt/t) \int_{4}^{e^3} \frac{1}{t^2-9}\,dt$$
$$= \int_4^{e^3} \frac{1}{6}\left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3}\right), dt = \frac{1}{6}\log\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\Big|_4^{e^3} = \frac{1}{6}\log\left(7\frac{e^3-3}{e^3+3}\right)$$

Esercizio 2 Risolvere la disequazione

$$\left|3z^2 - 3\bar{z}^2\right| < 2$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Svolgimento. Si ha

$$3z^2 - 3\bar{z}^2 = 3(z-\bar{z})(z+\bar{z}) = (\text{ponendo } z = x+iy)\ 12ixy,$$

da cui

$$3\left|z^2 - \bar{z}^2\right| = 12|xy|.$$

La soluzione è quindi

$$\{z = x+iy \in \mathbb{C} : |xy| < \frac{1}{6}\},$$

rappresentata in figura 5.

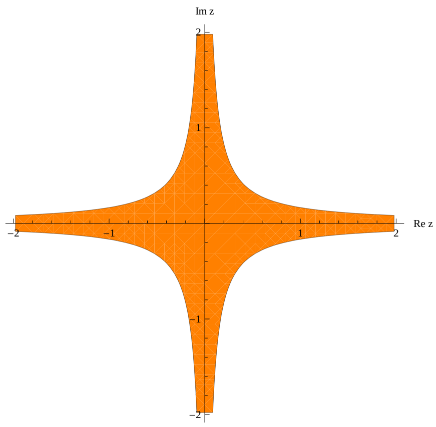

Figura 5: Le soluzioni dell'esercizio 2 (Tema 3).

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\big(\cosh(1/n^\alpha) + \cos(1/n) - 2\big)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Dagli sviluppi di MacLaurin di $\cosh x$ e di $\cos x$ risulta, per $n \to +\infty$,

$$\cosh 1/n^\alpha + \cos\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \frac{1}{24n^{4\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right) + 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

per cui il termine generale della serie, per $n \to +\infty$, è asintotico a

$$\begin{cases} (\text{se } \alpha < 1) & \frac{n^2}{2n^{2\alpha}} \\ (\text{se } \alpha = 1) & \frac{n^2}{12n^4} \\ (\text{se } \alpha > 1) & \frac{-n^2}{2n^2} \end{cases}$$

e quindi ha segno definitivamente costante per $n \to +\infty$. Se $\alpha \neq 1$, il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie diverge (a $\pm\infty$ rispettivamente). Se $\alpha = 1$ la serie converge assolutamente e quindi converge (essendo asintotica alla serie $\frac{1}{12n^2}$).

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin\frac{|x| - 4}{2x^2 + 3}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. (i) La funzione è pari, per cui la studiamo per $x \geq 0$. Per tali x, $D = \{x > 0 : |x-4| \leq 2x^2+3\}$. La disequazione $|x - 4| \leq 2x^2 + 3$ equivale al sistema

$$\begin{cases} x - 4 \leq 2x^2 + 3 \\ x - 4 \geq -2x^2 - 3 \end{cases}$$

la prima equazione è sempre verificata, mentre la seconda ammette come soluzione (in $\mathbb{R}_o^+$) $x \geq \frac{1}{2}$. Pertanto $D = \left((-\infty, -\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2}, +\infty)\right)$. La funzione è continua in D, $f(1/2) = \arcsin(-1) = -\pi/2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin 0 = 0$, e quindi $y = 0$ é un asintoto orizzontale e $x = 1/2$ punto di minimo assoluto. Il segno di f è dato dal segno dell'argomento dell'arcoseno, per cui $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 4$.
(ii) In D si possono applicare le regole di derivazione se l'argomento dell'arcoseno è diverso da ±1, cioè per $x > \frac{1}{2}$. Per tali x si ha

$$f'(x) = \frac{(2x^2 + 3) - (x - 4)4x}{(2x^2 + 3)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-4}{2x^2+3}\right)^2}} = \frac{-2x^2 + 16x + 3}{(2x^2 + 3)\sqrt{(2x^2 + 3)^2 - (x - 4)^2}},$$

da cui si ricava che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $2x^2 - 16x - 3 \leq 0$, per $x > 1/2$, cioè per $1/2 < x < (8 + \sqrt{70})/2$, che pertanto è il punto di massimo assoluto, mentre $x = 1/2$ è il punto di minimo assoluto. Si ha

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f'(x) = \infty,$$

per cui il grafico di f, rappresentato in figura 6, ha tangente verticale in $(1/2, -\pi/2)$.

Esercizio 5 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\arctan(3 - x)|\, \arctan x}{|9 - x^2|^\alpha\, (\cosh\sqrt{x} - 1)^\beta}\, dx$$

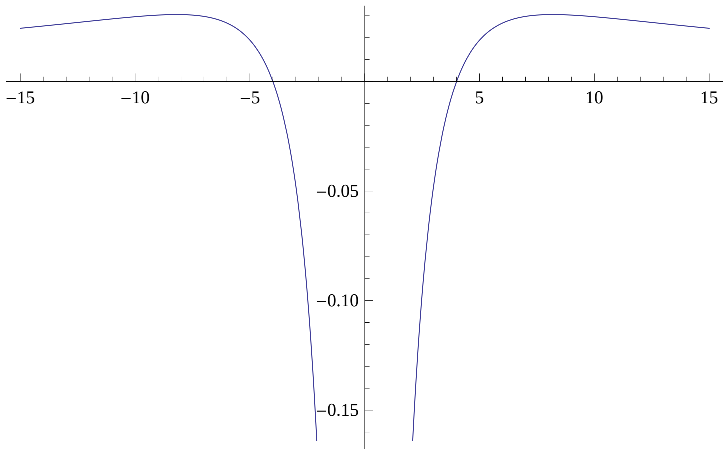

Figura 6: Il grafico di f (Tema 3).

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. L'integranda $f(x)$ è continua in $(0,3) \cup (3,+\infty)$, per cui bisogna studiare la convergenza dell'integrale separatamente per $x \to 0^+$, per $x \to 3$ e per $x \to +\infty$.
Per $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{x \arctan 3}{9^\alpha \left(\frac{x}{2}\right)^\beta} = \frac{2^\beta \arctan 3}{9^\alpha} \frac{1}{x^{\beta-1}},$$

e quindi l'integrale converge in 0 se e solo se $\beta < 2$.
Per $x \to 3$,

$$f(x) \sim \frac{|3-x| \arctan 3}{|3-x|^\alpha |6|^\alpha (\cosh \sqrt{3} - 1)^\beta} = \frac{\arctan 3}{|6|^\alpha (\cosh \sqrt{3} - 1)^\beta} \frac{1}{|3-x|^{\alpha-1}},$$

e quindi l'integrale converge in 3 se e solo se $\alpha < 2$.
Per $x \to +\infty$, se $\beta > 0$,

$$f(x) \sim \frac{2^\beta \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{x^{2\alpha} e^{\beta\sqrt{x}}}.$$

Quest'ultima espressione è $o(1/x^2)$ per $x \to +\infty$, per cui l'integrale converge per $x \to +\infty$ (per ogni valore di α). Se $\beta = 0$,

$$f(x) \sim \pi^2/4x^{2\alpha},$$

quindi converge se $\alpha > 1/2$. Se $\beta < 0$, f è illimitata per $x \to +\infty$ e quindi l'integrale diverge.

In sintesi, l'integrale converge se $\alpha < 2$ e $0 < \beta < 4$ o se $\beta = 0$ e $1/2 < \alpha < 2$.

TEMA 4

Esercizio 1. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 5}\, dx$$

Svolgimento. Operando la sostituzione $t = e^x$, si ottiene

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 5}\, dx = \int_1^e \frac{1}{t^2 - 4t + 5}\, dt = \int_1^e \frac{1}{(t-2)^2 + 1}\, dt.$$

Sostituendo $t-2=s$, si ottiene

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}-4e^x+5}\,dx = \int_{-1}^{e-2} \frac{1}{s^2+1}\,ds = [\arctan s]_{-1}^{e-2} = \arctan(e-2)+\frac{\pi}{4}.$$

Esercizio 2. Risolvere la disequazione

$$\left|9\bar{z}^2 - 9z^2\right| < 2$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

Svolgimento. Si deve risolvere

$$|\bar{z}-z||\bar{z}+z| < \frac{2}{9}.$$

Per $z = x+iy$, si ottiene

$$|xy| < \frac{1}{18},$$

rappresentato in figura 7.

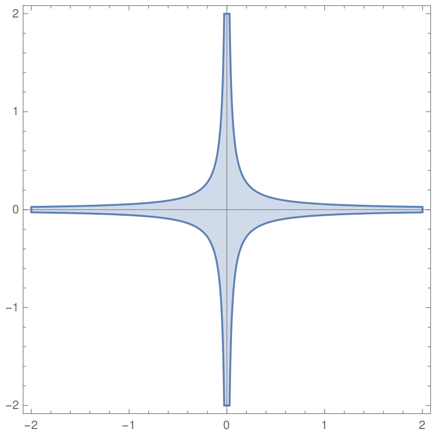

Figura 7: Le soluzioni dell'esercizio 2 (Tema 4).

Esercizio 3. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(e^{1/n^2} - \tan 1/n^\alpha - 1\right)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Usando gli sviluppi di Mc Laurin

$$\begin{aligned} e^y &= 1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2) \qquad \text{per } y\to 0 \\ \tan y &= y+\frac{y^3}{3}+o(y^4) \qquad \text{per } y\to 0, \end{aligned}$$

otteniamo

$$e^{1/n^2} - \tan\frac{1}{n^\alpha} - 1 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^4} + o(\frac{1}{n^4}) - \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{3}\frac{1}{n^{3\alpha}} + o(\frac{1}{n^{4\alpha}}).$$

Osserviamo che per ogni valore di α la serie è a termini di segno definitivamente costante. Inoltre si ha

$$n^2\big(e^{1/n^\alpha} - \tan 1/n - 1\big) \sim \begin{cases} n^{2-\alpha} & \text{se } \alpha \in (0,2) \\ \frac{1}{2n^2} & \text{se } \alpha = 2 \\ 1 & \text{se } \alpha \in (2,+\infty). \end{cases}$$

Per il teorema del confronto asintotico, concludiamo che la serie è convergente per $\alpha = 2$ e divergente per tutti gli altri valori di $\alpha > 0$.

Esercizio 4. Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin \frac{4-4|x|}{5x^2+3}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di f';
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che f è una funzione continua sul suo dominio naturale (per i teoremi sulla continuità della funzione composta, del modulo e delle funzioni elementari) ed è pari; infatti si ha

$$f(-x) = \arcsin \frac{4-4|-x|}{5(-x)^2+3} = \arcsin \frac{4-4|x|}{5x^2+3} = f(x).$$

Possiamo pertanto studiare la funzione su $[0,+\infty)$ e poi ottenere il suo comportamento su $(-\infty,0)$ per simmetria.

`Dominio.` Per $x \in [0,+\infty)$, il suo dominio è dato da

$$-1 \le \frac{4-4x}{5x^2+3} \le 1$$

cioè (visto che $5x^2+3 > 0$ sempre)

$$-5x^2 - 3 \le 4 - 4x \le 5x^2 + 3$$

cioè

$$5x^2 - 4x + 7 \ge 0 \qquad e \qquad 5x^2 + 4x - 1 \ge 0.$$

La prima disuguaglianza è sempre verificata mentre la seconda è vera per $x \in (-\infty,-1] \cup [1/5,+\infty)$. Quindi sull'intervallo $[0,+\infty)$, il dominio è $[1/5,\infty)$. (Per simmetria: $dom(f) = (-\infty,-1/5] \cup [1/5,\infty)$.)

`Segno.` Per $x \in [0,+\infty)$, $f \ge 0$ quando

$$\frac{4-4x}{5x^2+3} \ge 0$$

cioè $4-4x \ge 0$, cioè $x \le 1$. Quindi $f \ge 0$ su $[-1,-1/5] \cup [1/5,1]$ e $f \le 0$ su $(-\infty,-1] \cup [1+\infty)$.

`Limiti agli estremi del dominio.` Con un cambio di variabile, abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to 0} \arcsin y = 0$$

Inoltre, in $x = 1/5$, per continuità di f, si ha $\lim_{x\to 1/5^+} f(x) = f(1/5) = \pi/2$. Quindi, f ha $y = 0$ come asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

`Derivabilità.` Per i teoremi sulla derivabilità della funzione composta e poiché $g(y) = \arcsin y$ è derivabile su $(-1,1)$, abbiamo che $f \in C^1((-\infty,-1/5) \cup (1/5,+\infty))$. Rimane da studiare la derivabilità di f nei punti $-1/5$ e $1/5$.

`Calcolo` f'. Su $[1/5, +\infty)$ abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{(5x^2+3)\sqrt{(5x^2+3)^2-(4-4x)^2}}\left[20x^2-40x-12\right]$$

`Segno di` f'`, monotonia e punti di estremo relativo ed assoluto.` Per $x \in [0, +\infty)$, $f' \geq 0$ quando

$$20x^2 - 40x - 12 \geq 0$$

che è vera solo per $x \geq \frac{5+\sqrt{40}}{5}$. Possiamo quindi dedurre che

- f è decrescente su $(-\infty, -\frac{5+\sqrt{40}}{5}]$ e su $[\frac{1}{5}, \frac{5+\sqrt{40}}{5}]$,
- f è crescente su $[-\frac{5+\sqrt{40}}{5}, -\frac{1}{5}]$ e su $[\frac{5+\sqrt{40}}{5}, +\infty)$,
- f presenta punti di minimo assoluto in $x = \pm\frac{5+\sqrt{40}}{5}$ (sono ovviamente punti di minimo relativo, hanno uguale valore per simmetria di f, e sono di minimo assoluto per il teorema di Lagrange),
- f presenta punti di massimo assoluto in $x = \pm\frac{1}{5}$ (perché l'immagine di arcsin è inclusa in $[-\pi/2, \pi/2]$).

`limiti di` f' `e derivabilita' in` $x = \pm 1/5$`.` Osserviamo che si ha

$$\lim_{x \to 1/5^+} f'(x) = -\infty;$$

quindi la funzione non è derivabile nei punti $x = 1/5$ e $x = -1/5$.

`grafico di` f in figura 8

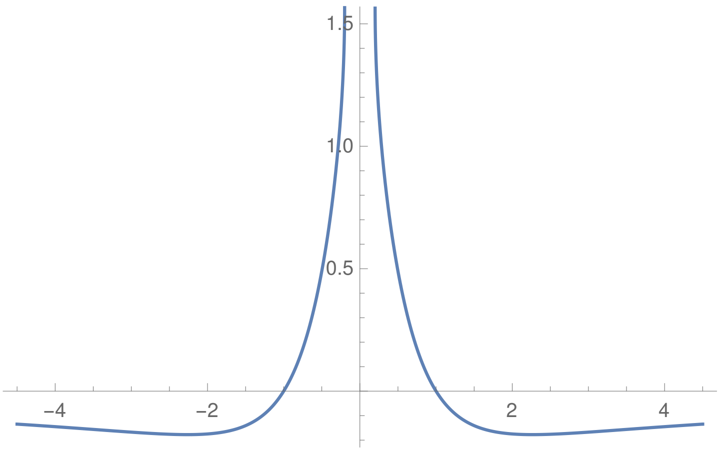

Figura 8: Il grafico di f (Tema 4).

Esercizio 5. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x\ |\arctan(1-2x)|}{|1-4x^2|^\alpha\ (\cosh x - 1)^\beta}\, dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Innanzitutto osserviamo che la funzione integranda f può essere scritta come

$$f(x) = \frac{\arctan x\ |\arctan(1-2x)|}{|1-2x|^\alpha\ |1+2x|^\alpha\ (\cosh x - 1)^\beta}\, dx$$

da cui si vede facilmente che f appartiene a $C^0\left((0,1/2)\cup(1/2,+\infty)\right)$. I punti di integrazione impropria sono tre: $x=0$, $x=1/2$ e $+\infty$. L'integrale va risolto come

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to0^+}\int_a^{1/4} f(x)\,dx + \lim_{b\to1/2^-}\int_{1/4}^{b} f(x)\,dx + \lim_{c\to1/2^+}\int_c^{1} f(x)\,dx + \lim_{d\to+\infty}\int_1^{d} f(x)\,dx.$$

Studiamo separatamente il comportamento asintotico della f nei vari punti.

`Per` $x\to0^+$. Abbiamo

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}\frac{x}{(x^2/2)^\beta} = \left(\pi 2^{\beta-2}\right)\, x^{1-2\beta};$$

per il teorema del confronto, abbiamo che il primo integrale è convergente se e solo se $\beta<1$.

`Per` $x\to\frac{1}{2}$. Abbiamo $\arctan(1-2x)\sim(1-2x)$ e quindi otteniamo

$$|f(x)|\sim\frac{\arctan(1/2)}{2^{1+\alpha}\,(\cosh(1/2)-1)^\beta}|1-2x|^{1-\alpha};$$

per il teorema del confronto, abbiamo che il secondo ed il terzo integrale sono convergenti se e solo se $\alpha<2$.

`Per` $x\to+\infty$. Abbiamo

$$|f(x)|\sim\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{x^{2\alpha}\cosh^\beta x}\sim\frac{\pi^2}{4}\frac{1}{x^{2\alpha}e^{\beta x}};$$

per il teorema del confronto, abbiamo che il quarto integrale diverge se $\beta<0$ e $\forall\alpha$ o se $\beta=0$ ed $\alpha\le1/2$ mentre converge per $\beta=0$ ed $\alpha>1/2$ e per $\beta>0$ e $\forall\alpha$.

In conclusione, l'integrale iniziale converge se e solo se $\beta\in(0,1)$ e $\alpha<2$ o $\beta=0$ e $1/2<\alpha<2$.