ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 13.02.2017

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left| x^2 - 2x - 3 \right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
(iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Soluzione. i) Chiaramente $D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - 2x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. Per il segno abbiamo

$$f(x) \geq 0, \quad \Longleftrightarrow \quad |x^2 - 2x - 3| \geq 1, \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 \leq -1, \ \vee \ x^2 - 2x - 3 \geq +1.$$

Abbiamo che $x^2 - 2x - 2 \leq 0$ se e solo se $x_0 := 1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3} =: x_1$ e $x^2 - 2x - 4 \geq 0$ se e solo se $x \leq 1 - \sqrt{5} =: x_2$ oppure $x \geq 1 + \sqrt{5} =: x_3$. Quindi $f(x) \leq 0$ se e solo se x appartiene ad uno dei due intervalli $[x_2, x_0]$ e $[x_1, x_3]$. Per quanto riguarda i limiti, si ha:
è chiaro che $x^2 + 3x - 4 \longrightarrow +\infty$ per $x \longrightarrow \pm\infty$, cosicché $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$. Tuttavia non ci sono asintoti poiché, per $x \to \pm\infty$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\log(x^2 - 2x - 3)}{x} \sim \frac{\log x^2}{x} = \frac{2 \log |x|}{x} \longrightarrow 0,$$

essendo $\log |x| = o(x)$ per $x \to \pm\infty$. Per $x \longrightarrow -1, 3$ si ha sempre che $|x^2 + 3x - 4| \longrightarrow 0+$ quindi in ogni caso $f(x) \longrightarrow -\infty$ per cui si hanno gli asintoti verticali $x = -1, 3$.

ii) La funzione è composizione di funzioni continue ove definite, quindi è continua su tutto il proprio dominio. Inoltre è composizione di funzioni derivabili, eccetto quando $x^2 + 3x - 4 = 0$, che però sono punti che non appartengono al dominio di f: si conclude che f è derivabile nel proprio dominio. Ricordato che $(\log |y|)' = \frac{1}{y}$ si ha immediatamente che

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3}.$$

Studiamo il segno di f'. Il segno del denominatore è positivo per $x < -1$ oppure $x > 3$. Il numeratore è positivo per $x > 1$. Ne deduciamo la tabella seguente:

	$-\infty \quad -1$	$-1 \quad 1$	$1 \quad 3$	$3 \quad +\infty$
sgn $(2x-2)$	$-$	$-$	$+$	$+$
sgn (x^2-2x-3)	$+$	$-$	$-$	$+$
sgn f'	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

I punti $x = -1, 3$ non appartengono al dominio, mentre $x = 1$ è un massimo locale stretto. Non ci sono né massimi né minimi globali essendo f illimitata sia inferiormente che superiormente.

iii) Chiaramente f' è derivabile ove definita in quanto funzione razionale: abbiamo che

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 4x - 10}{(x^2 - 2x - 3)^2}.$$

Quindi $f'' \geq 0$ se e solo se $2x^2 - 4x - 10 \leq 0$, cioè mai. Si conclude che $f'' < 0$ ovunque (dove definita) per cui la funzione è concava in ciascuno degli intervalli che compongono il suo dominio.

iv) Il grafico di f è rappresentato figura 1.

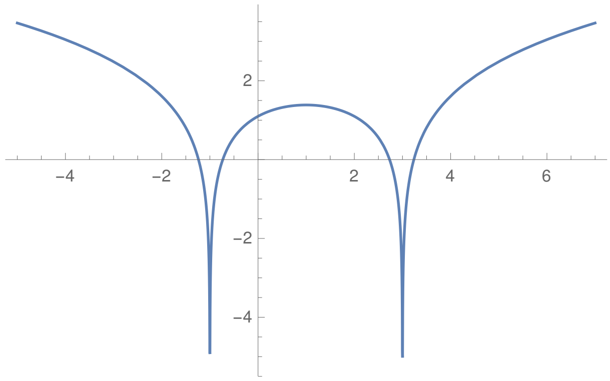

Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{n^n}{n!}.$$

Soluzione. La serie è evidentemente a termini di segno costante. Conviene applicare il criterio asintotico del rapporto. Detto a_n il termine generale, risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{2} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{2} e > 1.$$

Dunque la serie diverge.

Esercizio 3 Data

$$f(z) = \frac{2 + iz}{iz + 1},$$

determinarne il dominio e determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = z$. Esprimere tutte le soluzioni in forma algebrica.

Soluzione. Perché la frazione sia definita occorre che $iz + 1 \neq 0$, cioè che $z \neq \frac{-1}{i} = \frac{i}{-i \cdot i} = i$. Ora, per $z \neq i$,

$$f(z) = z \iff 2 + iz = z(iz + 1) \iff iz^2 + (1 - i)z - 2 = 0.$$

Questa è un'equazione di secondo grado a coefficienti complessi, e la formula risolutiva tradizionale funziona allo stesso modo (pur di intendere la radice come radice complessa). Si ha quindi

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{i-1+\sqrt{1-1-2i+8i}}{2i} = \frac{i-1+\sqrt{6i}}{2i} = \frac{i-1\pm\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2i} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{i}{2}\pm\frac{\frac{\sqrt{12}}{2}(1+i)}{2i} = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}+\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

Esercizio 4 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan x-\sin x+x^{\frac{10}{3}}\log x}{x^\alpha(1-\cos^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Soluzione. Osservato che, in virtù del limite notevole $\lim_{x\to 0+} x^\gamma \log x = 0$ per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$, si ha subito che si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Determiniamo i termini principali col metodo degli sviluppi asintotici. Abbiamo che, per $x \to 0^+$,

$$N(x) := x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\big(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\big)+x^{\frac{10}{3}}\log x = -\frac{x^3}{6}+o(x^3)+x^{\frac{10}{3}}\log x.$$

Osserviamo che $x^{\frac{10}{3}}\log x = o(x^3)$ per $x \to 0^+$: infatti

$$\frac{x^{\frac{10}{3}}\log x}{x^3} = x^{\frac{10}{3}-3}\log x \to 0, \quad \text{essendo } \frac{10}{3}-3>0,$$

sempre in virtù del limite notevole sopra richiamato. Pertanto $N(x) = \frac{x^3}{6}+o(x^3)$ per $x \to 0^+$. Quanto al denominatore, conviene osservare preliminarmente che

$$(1-\cos^2 x) = (1-\cos x)(1+\cos x) \sim \frac{x^2}{2}\cdot 2 = x^2,$$

per cui $D(x) := x^\alpha(1-\cos^2 x) \sim x^\alpha \cdot x^2 = x^{\alpha+2}$ per $x \to 0^+$. In conclusione, per $x \to 0^+$ si ha

$$\frac{N(x)}{D(x)} \sim \frac{\frac{x^3}{6}}{x^{\alpha+2}} \longrightarrow \begin{cases} 0, & 1-\alpha>0, \iff \alpha<1, \\ -\frac{1}{6}, & 1-\alpha=0, \iff \alpha=1, \\ -\infty, & 1-\alpha<0, \iff \alpha>1. \end{cases}$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha\sqrt{x-2}}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

Soluzione. Sia $f_\alpha(x) := \frac{1}{x^\alpha\sqrt{x-2}}$ la funzione integranda. Notiamo che essa è continua in $]2,+\infty[$ e dunque l'integrale è generalizzato sia in $x = 2$ che per $x \to +\infty$. Avendo evidentemente f_α anche segno costante, andiamo a studiarne il comportamento asintotico agli estremi dell'intervallo di integrazione. Per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^\alpha\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\alpha+1/2}},$$

per cui $\int^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx < +\infty$ se e solo se $\int^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1/2}}\,dx < +\infty$ cioè se e solo se $\alpha+1/2 > 1$, ovvero $\alpha > 1/2$. Per $x \to 2+$ si ha che

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2^\alpha\sqrt{x-2}},$$

che è integrabile in $x = 2+$. In conclusione, f_α è integrabile in senso generalizzato in $[2, +\infty[$ se e solo se $\alpha > 1/2$.

Calcoliamo l'integrale nel caso $\alpha = 1$. Siccome è generalizzato abbiamo che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{a\to 2+,\ b\to+\infty} \int_a^b \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,dx.$$

Sostituendo $x - 2 = y^2$ $(y > 0)$, risulta

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,dx = \int \frac{2y}{(y^2+2)y}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,dy.$$

Sostituendo ancora $y/\sqrt{2} = t$, risulta

$$\int \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,dy = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + c = \arctan\frac{y}{\sqrt{2}} + c.$$

Pertanto,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{a\to 2+,\ b\to+\infty} \left(\arctan\sqrt{\frac{b-2}{\sqrt{2}}} - \arctan\sqrt{\frac{a-2}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

TEMA 2

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left|x^2 + x - 6\right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
(iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. (i) Il dominio $\mathcal{D}$ è dato da $x^2 + x - 6 \neq 0$. Quindi

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \ : x \neq 2 \text{ and } x \neq -3\}.$$

La funzione risulta positiva se e solo se $|x^2 + x - 6| > 1$. Quindi $f(x) > 0$ se e solo se $x^2 + x - 7 > 0$ e $x^2 + x - 5 < 0$. Questo equivale a $f(x) > 0$ se e solo se

$$x \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{29}}{2}\right) \bigcup \left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right) \bigcup \left(\frac{-1+\sqrt{29}}{2}, +\infty\right).$$

I limiti notevoli seguenti sono immediati

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{f(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to -3} f(x) = -\infty.$$

Quindi non ci sono asintoti orizzontali né obliqui, ma ci sono due asintoti verticali: $x = 2$ e $x = -3$. La funzione è continua in $\mathcal{D}$

(ii) In $\mathcal{D}$ si possono applicare le regole di derivazione essendo la funzione ivi derivabile si ha quindi per ogni $x \in \mathcal{D}$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2 + x - 6},$$

Studiamo il segno di f'. Il segno del denominatore è positivo per $x < -3$ oppure $x > 2$. Il numeratore è positivo per $x > -\frac{1}{2}$. Ne deduciamo la tabella seguente:

	$-\infty \quad -3$	$-3 \quad -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \quad 2$	$2 \quad +\infty$
sgn $(2x+1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
sgn (x^2+x+6)	$+$	$-$	$-$	$+$
sgn f'	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Ricordando che la funzione non è definita in -3 e 2 si ha che $x = -\frac{1}{2}$ è un punto di max relativo. Poiché $\sup_{\mathcal{D}} f = +\infty$ e $\inf_{\mathcal{D}} f = -\infty$ non esistono punti di max e min assoluti.
iii) Un calcolo diretto mostra che per ogni $x \in \mathcal{D}$ si ha

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + x - 6) - (2x+1)^2}{(x^2 + x - 6)^2} = \frac{-2x^2 - 2x - 13}{(x^2 + x - 6)^2}.$$

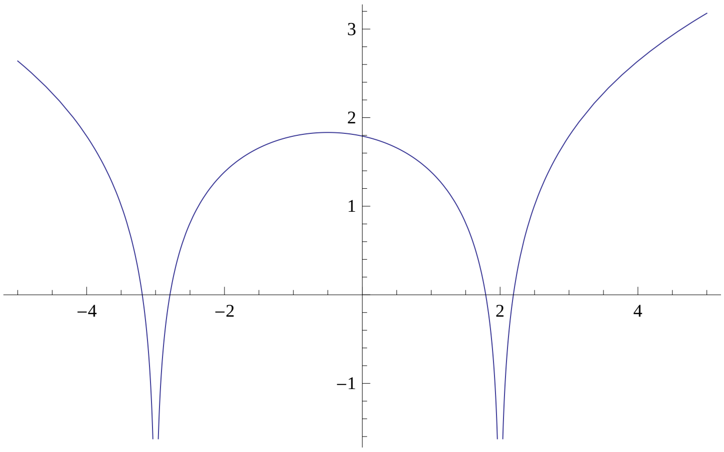

Figura 2: Il grafico di f (Tema 2).

Poiché $-2x^2 - 2x - 13 < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione è concava in ciascuno degli intervalli che formano il dominio.
iv) il grafico di f è rappresentato in figura 2.

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{n^n}{n!}.$$

Svolgimento. Essendo una serie a termini positivi, applichiamo il criterio del rapporto. Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{n!}{n^n} = \frac{2}{3} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}e$$

Poiché $\frac{2}{3}e > 1$ la serie diverge a $+\infty$.

Esercizio 3 [4 punti] Data

$$f(z) = \frac{-1-2iz}{iz-1},$$

determinarne il dominio e determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = 2z$. Esprimere tutte le soluzioni in forma algebrica.

Svolgimento. Perché la frazione sia definita occorre che $iz - 1 \neq 0$, cioè che $z \neq \frac{1}{i} = \frac{-i}{-i \cdot i} = -i$. Ora, per $z \neq -i$,

$$f(z) = 2z \iff -1 - 2iz = 2z(iz+1) \iff 2iz^2 - 2(1-i)z + 1 = 0.$$

Questa è un'equazione di secondo grado a coefficienti complessi, e la formula risolutiva tradizionale funziona allo stesso modo (pur di intendere la radice come radice complessa). Si ha quindi

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{1 - i + \sqrt{1 - 1 - 2i - 2i}}{2i} = \frac{1 - i + \sqrt{-4i}}{2i} = \frac{1 - i \pm 2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2i} \\ &= -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2} \pm \frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)}{2i} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}(1+i). \end{aligned}$$

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x - \sinh x + x^{\frac{11}{2}}\log x}{x^\alpha(1-\cosh^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Svolgimento. Dagli sviluppi di MacLaurin di $\arctan x$, $\sinh x$ e di $\cosh x$ risulta (essendo $x^{\frac{11}{2}}\log x = o(x^3)$), per $x \to 0^+$,

$$\arctan x - \sinh x - x^{\frac{11}{2}}\log x = x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} - x - \tfrac{x^3}{3!} - \tfrac{x^5}{5!} + o(x^5) = -\tfrac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$x^\alpha(1-\cosh^2 x) = x^\alpha(1+\cosh x)\left(-\tfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right)) = -x^{2+\alpha} + o(x^{2+\alpha})$$

per cui

$$\begin{cases} \text{se } 2+\alpha < 3 \text{ cioè } \alpha < 1 \text{ il limite vale } 0 \\ \text{se } 2+\alpha > 3 \text{ cioè } \alpha > 1 \text{ il limite vale } +\infty \\ \text{se } 2+\alpha = 3 \text{ cioè } \alpha = 1 \text{ il limite vale } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Esercizio 5 [8 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\sqrt{x-3}}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

Svolgimento. L'integranda $f(x)$ è continua in $]3,+\infty[$, per cui bisogna studiare la convergenza dell'integrale separatamente per $x \to 3^+$, e per $x \to +\infty$.
Per $x \to 3^+$,

$$f(x) \sim \frac{1}{3^\alpha(x-3)^{\frac{1}{2}}}$$

e quindi l'integrale converge in 3 poiché $\frac{1}{2} < 1$.
Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1/2}}.$$

e quindi l'integrale converge all'infinito se e solo se $1/2+\alpha > 1$ cioè $\alpha > 1/2$.
In sintesi, l'integrale converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$. Per calcolarlo con $\alpha = 1$ poniamo

$$\sqrt{x-3} = t \qquad \text{da cui} \quad x = t^2 + 3.$$

Abbiamo quindi

$$\frac{1}{\sqrt{x-3}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$$

cioè

$$\frac{1}{x\sqrt{x-3}}\mathrm{d}x = \frac{2}{t^2+3}\mathrm{d}t$$

L'integrale di partenza diventa quindi

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} = \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

TEMA 3

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left|x^2 - 2x - 8\right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
(iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Soluzione. i) Chiaramente $D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 - 2x - 8 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$. Per il segno abbiamo

$$f(x) \geq 0, \iff |x^2 - 2x - 8| \geq 1, \iff x^2 - 2x - 8 \leq -1, \vee\, x^2 - 2x - 8 \geq 1.$$

Abbiamo $x^2 - 2x - 7 \leq 0$ se e solo se $x_0 := 1 - \sqrt{8} \leq x \leq 1 + \sqrt{8} =: x_1$ e $x^2 - 2x - 9 \geq 0$ se e solo se $x \leq 1 - \sqrt{10} =: x_2$ oppure $x \geq 1 + \sqrt{10} =: x_3$. Quindi $f(x) \leq 0$ se e solo se $x \in [x_2, x_0] \cup [x_1, x_3]$.

Passiamo allo studio dei limiti; è chiaro che $x^2 - 2x - 8 \longrightarrow +\infty$ per $x \longrightarrow \pm\infty$, cosicché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Tuttavia non ci sono asintoti poiché, per $x \to \pm\infty$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\log(x^2 - 2x - 8)}{x} \sim \frac{\log x^2}{x} = \frac{2\log|x|}{x} \longrightarrow 0,$$

essendo $\log|x| = o(x)$ per $x \to \pm\infty$. Per $x \longrightarrow -2, 4$ si ha sempre che $|x^2 - 2x - 8| \longrightarrow 0^+$ quindi $\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to 4} f(x) = -\infty$ cioè si hanno asintoti verticali in $x = -2,\ 4$.

ii) La funzione è composizione di funzioni continue ove definite, quindi è continua su tutto il proprio dominio. Inoltre f è derivabile sul suo dominio naturale per il teorema sulla derivabilità della funzione composta e per la derivabilità di $g(y) = \log y$ su $(0, +\infty)$. Ricordato che $(\log|y|)' = \frac{1}{y}$ si ha immediatamente

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 8} \qquad \forall x \in D.$$

Studiamo il segno di f'. Il segno del denominatore è positivo su$(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$. Il numeratore è positivo per $x > 1$. Ne deduciamo la tabella seguente:

	$-\infty \quad -2$	$-2 \quad 1$	$1 \quad 4$	$4 \quad +\infty$
$\operatorname{sgn}(2x-2)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\operatorname{sgn}(x^2-2x-8)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

I punti $x = -2, 4$ non appartengono al dominio, mentre $x = 1$ è un massimo locale stretto. Non ci sono né massimi né minimi globali essendo f illimitata sia inferiormente che superiormente.

iii) Chiaramente f' è derivabile ove definita in quanto funzione razionale: abbiamo che

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 4x - 20}{(x^2 - 2x - 8)^2}.$$

Quindi $f'' \geq 0$ se e solo se $2x^2 - 4x - 20 \leq 0$, cioè mai. Si conclude che $f'' < 0$ ovunque (dove definita) per cui la funzione è concava in ciascuno degli intervalli che compongono il suo dominio.

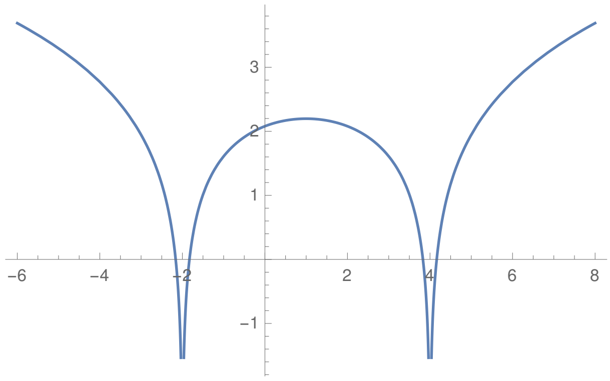

Figura 3: Il grafico di f (Tema 3).

iv) Il grafico di f è rappresentato figura 3.

Esercizio 2 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \frac{n^n}{n!}.$$

Soluzione. La serie è evidentemente a termini di segno costante. Conviene applicare il criterio asintotico del rapporto. Detto a_n il termine generale, risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{2} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{e}{3} < 1.$$

Dunque la serie converge.

Esercizio 3 Data

$$f(z) = \frac{-2+3iz}{2iz-3},$$

determinarne il dominio e determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = -z$. Esprimere tutte le soluzioni in forma algebrica.

Soluzione. Perché la frazione sia definita occorre che $2iz - 3 \neq 0$, cioè che $z \neq \frac{3}{2i} = \frac{3i}{2i \cdot i} = \frac{-3i}{2}$. Ora, per $z \neq \frac{-3i}{2}$, si ha

$$f(z) = -z \quad \Longleftrightarrow \quad -2+3iz = -z(2iz-3) \quad \Longleftrightarrow \quad 2iz^2 + (3i-3)z - 2 = 0.$$

Questa è un'equazione di secondo grado a coefficienti complessi, e la formula risolutiva tradizionale funziona allo stesso modo (pur di intendere la radice come radice complessa). Si ha quindi

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{3-3i+\sqrt{9-9-18i+16i}}{4i} = \frac{3-3i+\sqrt{-2i}}{4i} = \frac{3-3i \pm \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{4i} \\ &= -\frac{3}{4} - \frac{3i}{4} \pm \frac{\sqrt{2}}{4i}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\right] = \begin{cases} -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \\ -1-i. \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 4 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{9}{2}}\log x - \tan x + \sin x}{x^\alpha(1-\cosh^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Soluzione. Osservato che, in virtù del limite notevole $\lim_{x\to 0^+} x^\gamma \log x = 0$ per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$, si ha subito che si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Determiniamo i termini principali col metodo degli sviluppi asintotici. Abbiamo che, per $x \to 0^+$,

$$N(x) := x^{\frac{9}{2}}\log x - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x^{\frac{9}{2}}\log x - \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

Osserviamo che $x^{\frac{9}{2}}\log x = o(x^3)$ per $x \to 0^+$: infatti

$$\frac{x^{\frac{9}{2}}\log x}{x^3} = x^{\frac{9}{2}-3}\log x \to 0, \quad \text{essendo } \frac{9}{2} - 3 > 0,$$

sempre in virtù del limite notevole sopra richiamato. Pertanto $N(x) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$ per $x \to 0^+$. Quanto al denominatore, conviene osservare preliminarmente che

$$(1 - \cosh^2 x) = -\sinh^2 x \sim -x^2,$$

per cui $D(x) := x^\alpha(1-\cosh^2 x) \sim -x^\alpha \cdot x^2 = -x^{\alpha+2}$ per $x \to 0^+$. In conclusione, per $x \to 0^+$ si ha

$$\frac{N(x)}{D(x)} \sim \frac{-\frac{x^3}{2}}{-x^{\alpha+2}} \longrightarrow \begin{cases} 0, & 1-\alpha > 0, \iff \alpha < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1-\alpha = 0, \iff \alpha = 1, \\ +\infty, & 1-\alpha < 0, \iff \alpha > 1. \end{cases}$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\sqrt{x-4}}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

Soluzione. Sia $f_\alpha(x) := \frac{1}{x^\alpha\sqrt{x-4}}$ la funzione integranda. Notiamo che essa è continua in $]4, +\infty[$ e dunque l'integrale è generalizzato sia in $x = 4$ che per $x \to +\infty$. Avendo evidentemente f_α anche segno costante, andiamo a studiarne il comportamento asintotico agli estremi dell'intervallo di integrazione. Per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^\alpha\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\alpha+1/2}},$$

per cui $\int^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx < +\infty$ se e solo se $\int^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1/2}}\,dx < +\infty$ cioè se e solo se $\alpha + 1/2 > 1$, cioè $\alpha > \frac{1}{2}$. Per $x \to 4^+$ si ha che

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{4^\alpha\sqrt{x-4}},$$

che è integrabile in $x = 4^+$. In conclusione, f_α è integrabile in senso generalizzato in $[4, +\infty[$ se e solo se $\alpha > 0$.

Calcoliamo l'integrale nel caso $\alpha = 1$. Siccome è generalizzato abbiamo che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-4}}\, dx = \lim_{a\to 4^+} \int_a^9 \frac{1}{x\sqrt{x-4}}\, dx + \lim_{b\to+\infty} \int_9^b \frac{1}{x\sqrt{x-4}}\, dx.$$

Sostituendo $x - 4 = y^2$ $(y > 0)$, risulta

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-4}}\, dx = \int \frac{2y}{(y^2+4)y}\, dy = \frac{2}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1}\, dy.$$

Sostituendo ancora $y/2 = t$, risulta

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-4}}\, dx = \int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \arctan t + c = \arctan \frac{\sqrt{x-4}}{2} + c.$$

Pertanto,

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-4}}\, dx = -\lim_{a\to 4^+} \arctan \frac{\sqrt{a-4}}{2} + \lim_{b\to+\infty} \arctan \frac{\sqrt{b-4}}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

TEMA 4

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left|x^2 + 3x - 4\right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
(iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Soluzione. i) Chiaramente $D = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x^2 + 3x - 4| > 0\} \equiv \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 + 3x - 4 \neq 0\}$. Ora $x^2 + 3x - 4 = 0$ sse $x = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-3\pm5}{2} = -4, 1$. Quindi $D = \mathbb{R}\backslash\{-4, 1\}$. Per il segno abbiamo

$$f(x) \geq 0, \iff |x^2 + 3x - 4| \geq 1, \iff x^2 + 3x - 4 \leq -1, \vee\, x^2 + 3x - 4 \geq +1.$$

Abbiamo che $x^2 + 3x - 3 \leq 0$ sse $-4 < \frac{-3-\sqrt{21}}{2} \leq x \leq \frac{-3+\sqrt{21}}{2} < 1$ e $x^2 + 3x - 5 \geq 0$ sse $x \leq \frac{-3-\sqrt{29}}{2} < -4$ oppure $x \geq \frac{-3+\sqrt{29}}{2} > 1$. Per quanto riguarda i limiti occorre calcolare $f(\pm\infty)$, $f(-4\pm)$, $f(1\pm)$. La funzione non presenta particolari simmetrie per cui occorre valutare tutti i casi. Tuttavia ci sono delle similitudini: è chiaro che $x^2 + 3x - 4 \longrightarrow +\infty$ per $x \longrightarrow \pm\infty$. Tuttavia non ci sono asintoti poiché

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\log(x^2 + 3x - 4)}{x} \sim_{\pm\infty} \frac{\log x^2}{x} = \frac{2\log|x|}{x} \longrightarrow 0,$$

essendo $x \gg_{\pm\infty} \log|x|$. Per $x \longrightarrow -4\pm, 1\pm$ si ha sempre che $|x^2 + 3x - 4| \longrightarrow 0+$ quindi in ogni caso $f(x) \longrightarrow -\infty$ per cui si hanno asintoti verticali $x = -4, 1$.

ii) La funzione è composizione di funzioni continue ove definite, quindi è continua su tutto il proprio dominio. Inoltre è composizione di funzioni derivabili, eccetto quando $x^2+3x-4 = 0$, che però sono punti che non appartengono al dominio di f: si conclude che f è derivabile nel proprio dominio. Ricordato che $(\log|y|)' = \frac{1}{y}$ si ha immediatamente che

$$f'(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 4}.$$

Studiamo il segno di f'. Il segno del denominatore è praticamente già dato visto i discorsi fatti sopra ed è positivo per $x < -4$ oppure $x > 1$. Il numeratore è positivo per $x > -\frac{3}{2}$. Ne deduciamo la tabella seguente:

	$-\infty \quad -4$	$-4 \quad -\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2} \quad 1$	$1 \quad +\infty$
$\operatorname{sgn}(2x+3)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\operatorname{sgn}(x^2+3x-4)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\operatorname{sgn} f'$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

I punti $x = -4, 1$ non appartengono al dominio. In $x = -\frac{3}{2}$ la funzione è definita e continua, quindi tale punto è un massimo su $]-4, 1[$. Non ci sono né massimi né minimi globali essendo f illimitata inferiormente (in $x = -4, 1$) e superiormente ($x = \pm\infty$).

iii) Chiaramente f' è derivabile ove definita in quanto funzione razionale: abbiamo che

$$f''(x) = \frac{2(x^2+3x-4)-(2x+3)(2x+3)}{(x^2+3x-4)^2} = \frac{-4x^2-6x-17}{(x^2+3x-4)^2} = -\frac{2x^2+6x+17}{(x^2+3x-4)^2}.$$

Quindi $f'' \geq 0$ sse $2x^2+6x+17 \leq 0$. Ora essendo $\Delta = 36 - 2 \cdot 4 \cdot 17 < 0$ questo non accade mai. Si conclude che $f'' < 0$ ovunque (dove definita) per cui la funzione è concava in ciascuno degli intervalli che compongono il suo dominio.

iv) Il grafico di f è in rappresentato figura 4.

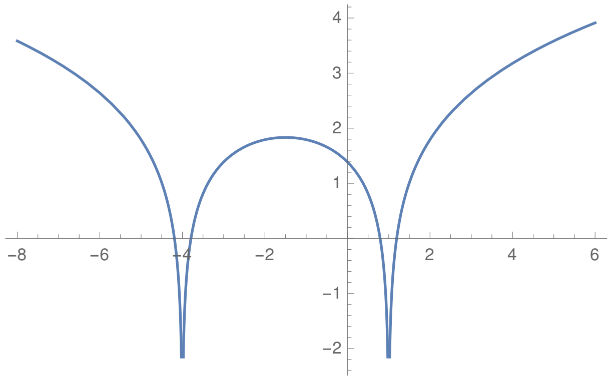

Figura 4: Il grafico di f (Tema 4).

Esercizio 2 [5 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n \frac{n^n}{n!}.$$

Soluzione. La serie è evidentemente a termini di segno costante. Conviene applicare il test del rapporto. Detto a_n il termine generale è

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{7}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \frac{2}{7}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{2}{7}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{2}{7}e < 1, \quad \Longleftrightarrow \quad e < \frac{7}{2},$$

che è vero essendo $e < 3 < \frac{7}{2}$. Dunque la serie converge.

Esercizio 3 Data

$$f(z) = \frac{1-4iz}{iz+4},$$

determinarne il dominio e determinare tutti gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $f(z) = z$. Esprimere tutte le soluzioni in forma algebrica.

Soluzione. Perché la frazione sia definita occorre che $iz + 4 \neq 0$. Ora $iz + 4 = 0$ sse $iz = -4$ cioè $z = -\frac{4}{i} = -\frac{4}{i}\frac{i}{i} = -\frac{4i}{-1} = 4i$. Ora,

$$f(z) = z, \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1-4iz}{iz+4} = z, \quad \Longleftrightarrow \quad 1-4iz = z(iz+4), \quad \Longleftrightarrow \quad iz^2 + 4(1+i)z - 1 = 0.$$

Questa è un'equazione di secondo grado a coefficienti complessi, la formula risolutiva tradizionale funziona allo stesso modo (pur di intendere la radice come radice complessa),

$$z_{1,2} = \frac{-4(1+i) \pm \sqrt{16(1-1+2i) - 4i(-1)}}{2i} = \frac{-4(1+i) \pm \sqrt{36i}}{2i} = \frac{-4(1+i) \pm 6\sqrt{i}}{2i}.$$

Basta una radice di $i = u\left(\frac{\pi}{2}\right)$ per cui $\sqrt{i} = u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ed essendo $\frac{1}{i} = -i$ abbiamo, infine

$$z_{1,2} = \frac{-4(1+i) \pm 3\sqrt{2}(1+i)}{2i} = (-2 \pm \frac{3}{\sqrt{2}})\frac{1+i}{i} = (-2 \pm \frac{3}{\sqrt{2}})(1-i).$$

Esercizio 4 Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sinh x - \tan x - x^{\frac{15}{4}} \log x}{x^\alpha (1 - \cos^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

Soluzione. Osservato che, in virtù del limite notevole $\lim_{x \to 0+} x^\gamma \log x = 0$ si ha subito che si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Determiniamo i termini principali col metodo degli sviluppi asintotici. Abbiamo che

$$N(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + x^{15/4} \log x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) + x^{15/4} \log x.$$

Ora facilmente $x^{15/4} \log x = o(x^3)$: infatti

$$\frac{x^{15/4} \log x}{x^3} = x^{\frac{15}{4} - 3} \log x \longrightarrow 0, \quad \text{essendo } \frac{15}{4} - 3 > 0,$$

sempre in virtù del limite notevole sopra richiamato. Pertanto $N(x) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) = -\frac{x^3}{6} 1_x$ dove $1_x \longrightarrow 1$ per $x \longrightarrow 0+$. Quanto al denominatore, conviene osservare preliminarmente che

$$(1 - \cos^2 x) = (1 - \cos x)(1 + \cos x) \sim \frac{x^2}{2} \cdot 2 = x^2,$$

per cui $D(x) = x^\alpha \cdot x^2 \, 1_x = x^{\alpha+2} 1_x$. In conclusione

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{-\frac{x^3}{6} 1_x}{x^{\alpha+2} 1_x} = -\frac{x^{1-\alpha}}{6} 1_x \longrightarrow \begin{cases} 0, & 1 - \alpha > 0, \iff \alpha < 1, \\ -\frac{1}{6}, & 1 - \alpha = 0, \iff \alpha = 1, \\ -\infty, & 1 - \alpha < 0, \iff \alpha > 1. \end{cases}$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x-5}} \, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

Soluzione. Sia $f_\alpha(x) := \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x-5}}$ la funzione integranda. Notiamo che essa è definita per $\{x - 5 > 0\} =]5, +\infty[$. Essendo composizione di funzioni elementari continue ove definite, $f_\alpha \in C(]5, +\infty[)$. Dunque l'integrale è generalizzato sia in $x = 5$ che per $x \longrightarrow +\infty$. Avendo evidentemente f_α anche segno costante, andiamo a studiarne il comportamento asintotico agli estremi dell'intervallo di integrazione. Per $x \longrightarrow +\infty$ abbiamo che

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\alpha+1/2}},$$

per cui esiste $\int^{+\infty} f_\alpha$ sse esiste $\int^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1/2}}\, dx$ cioè sse $\alpha + 1/2 > 1$, ovvero $\alpha > \frac{1}{2}$. Per $x \longrightarrow 5+$ si ha che

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{5^\alpha \sqrt{x-5}},$$

che è integrabile in $x = 5+$. Morale f_α è integrabile sse $\alpha > 0$.

Calcoliamo l'integrale nel caso $\alpha = 1$. Siccome è generalizzato abbiamo che

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-5}}\, dx = \lim_{a \to 5+,\ b \to +\infty} \int_a^b \frac{1}{x\sqrt{x-5}}\, dx.$$

Calcoliamo allora una primitiva della funzione integranda. Conviene procedere sostituendo $x - 5 = y^2$ $(y > 0)$. Dunque $dx = 2y\ dy$ e

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-5}}\, dx = \int \frac{2}{y^2+5}\, dy = \frac{2}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1}\, dy.$$

Sostituendo ancora $y/\sqrt{5} = t$, risulta

$$\frac{2}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1}\, dy = \frac{2}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{t^2+1}\, dt = \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan t + c = \frac{2}{\sqrt{5}} \arctan \frac{y}{\sqrt{5}} + c.$$

Pertanto, in virtù della formula fondamentale del calcolo integrale,

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-5}}\, dx = \lim_{a \to 5+,\ b \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\arctan \sqrt{\frac{b-5}{\sqrt{5}}} - \arctan \sqrt{\frac{a-5}{\sqrt{5}}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$