ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 10.07.2017

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione
$$f(x) := \log\left|e^{2x} - 4\right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) Il dominio è
$$D = \{x : e^{2x} \neq 4\} = \mathbb{R} \setminus \{\log 2\}.$$

SI ha $f(x) \geq 0$ se e solo se $|e^{2x} - 4| \geq 1$, cioè se e solo se $e^{2x} \geq 5$ oppure $e^{2x} \leq 3$, quindi
$$f\left(\frac{\log 5}{2}\right) = f\left(\frac{\log 3}{2}\right) = 0 \ \text{ e } f(x) > 0 \text{ se e solo se } x > \frac{\log 5}{2} \text{ oppure } x < \frac{\log 3}{2}.$$

Si ha inoltre
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \log 4, \ \lim_{x\to\log 2} f(x) = -\infty, \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Per quanto riguarda l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$, risulta
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(e^{2x} - 4\right)}{x} = 2, \ \lim_{x\to+\infty} (f(x)-2x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(e^{2x}-4\right)-2x = \lim_{x\to+\infty} \log\frac{e^{2x} - 4}{e^{2x}} = 0.$$

Quindi $y = 2x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, $y = 2\log 2$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e in $x = \log 2$ si ha un asintoto verticale.
ii) f è derivabile in tutto D, dove si ha
$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 4}.$$

f è perciò strettamente decrescente per $x < \log 2$ e strettamente crescente per $x > \log 2$. Non risultano quindi punti di estremo.
iii) Un calcolo diretto dà
$$f''(x) = \frac{-16e^{2x}}{(e^{2x} - 4)^2},$$

per cui f è concava in $]-\infty, \log 2[$ e in $]\log 2, +\infty[$.
iv) Il grafico è in figura 1.

Esercizio 2 Disegnare nel piano complesso l'insieme
$$S := \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\frac{z-1}{z-i} \geq 0, \ |z + 1 - i| \leq 1\right\}.$$

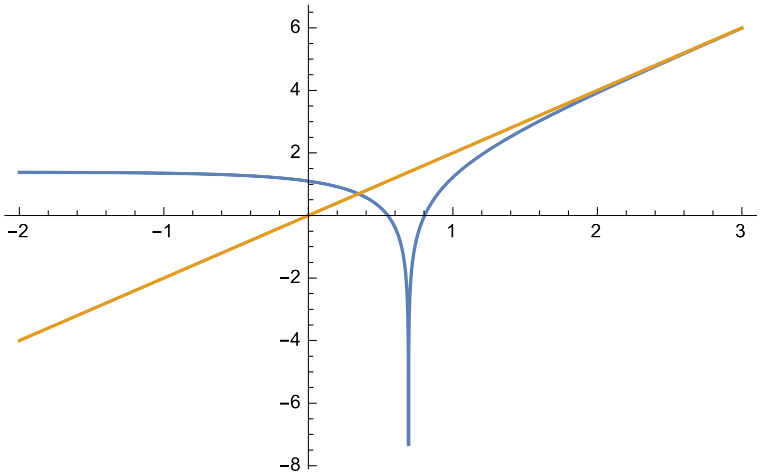

Figure 1: Il grafico di f con l'asintoto obliquo (Tema 1).

Svolgimento. Si tratta in primo luogo di determinare la parte reale di $\frac{z-1}{z+i}$. Si ha, ponendo $z = x + iy$,

$$\mathrm{Re}\,\frac{x-1+iy}{x+i(y-1)} = \mathrm{Re}\frac{(x-1+iy)(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x(x-1)+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}.$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - x + y^2 - y \geq 0, (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}, (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\right\}, \end{aligned}$$

cioè la parte esterna al cerchio di centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ed interna al cerchio di centro $(-1, 1)$ e raggio 1, rappresentata in figura 2.

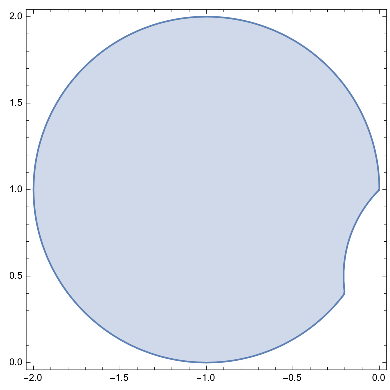

Figure 2: Le soluzioni dell'esercizio 2 (Tema 1).

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int e^{2x} \arctan(3e^x)dx.$$

Svolgimento. Eseguendo la sostituzione $x = \log t$ si ha

$$\begin{aligned}
\int e^{2x} \arctan(3e^x) dx &= \int t \arctan(3t)\, dt = \frac{t^2}{2} \arctan 3t - \frac{3}{2} \int \frac{t^2}{1+9t^2}\, dt \\
&= \frac{t^2}{2} \arctan 3t - \frac{3}{2} \Big[\frac{1}{9} \int \frac{1+9t^2}{1+9t^2}\, dt - \frac{1}{9} \int \frac{1}{1+(3t)^2}\, dt \Big] \\
&= \frac{t^2}{2} \arctan 3t - \frac{t}{6} + \frac{\arctan 3t}{18} + c \\
&= \frac{e^{2x}}{2} \arctan 3e^x - \frac{e^x}{6} + \frac{\arctan 3e^x}{18} + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan \sin x - \sinh x}{x^\alpha (1 - \cos^2 x)}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.
Svolgimento. Da $\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^3)$ per $y \to 0$ si deduce, per $x \to 0$,

$$\arctan \sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3),$$

per cui, per $x \to 0$,

$$\arctan \sin x - \sinh x = x - \frac{x^3}{2} - \Big(x + \frac{x^3}{6}\Big) + o(x^3) = -\frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

Perciò si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan \sin x - \sinh x}{x^\alpha (1 - \cos^2 x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2x^3/3 + o(x^3)}{x^{\alpha+2} + o(x^{2+\alpha})} = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha < 1 \\ -\frac{2}{3} & \text{per } \alpha = 1 \\ -\infty & \text{per } \alpha > 1. \end{cases}$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza semplice ed assoluta di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1-e^a)^n}{n + \sqrt{n}}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Per la convergenza assoluta si può usare il criterio della radice, che dà

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{|1-e^a|^n}{n + \sqrt{n}}} = |1 - e^a|.$$

La serie perciò converge assolutamente (e quindi semplicemente) se $|1 - e^a| < 1$ e diverge assolutamente e non converge semplicemente se $|1 - e^a| > 1$, in quanto il termine generale non è infinitesimo. Per $|1 - e^a| = 1$ il criterio della radice non dà informazioni. Risolvendo le disequazioni si ricava che la serie converge assolutamente per $a < \log 2$ e non converge per $a > \log 2$. Per $a = \log 2$ la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}}.$$

Per asintoticità con la serie armonica $\sum 1/n$ questa serie non converge assolutamente. Inoltre essa converge semplicemente per il criterio di Leibniz, essendo il termine generale a segno alterno e – in valore assoluto – infinitesimo e decrescente.

TEMA 2 – 10.07.2017

Esercizio 1 [8 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left|e^{-3x} - 9\right|.$$

i) Determinare il dominio D e studiare il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) Il dominio è

$$D = \{x : e^{-3x} \neq 9\} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\log 3\}.$$

Si ha $f(x) \geq 0$ se e solo se $|e^{-3x} - 9| \geq 1$, cioè se e solo se $e^{-3x} \geq 10$ oppure $e^{-3x} \leq 8$, quindi

$$f\left(-\frac{\log 10}{3}\right) = f\left(-\frac{2\log 3}{3}\right) = 0 \;\text{ e } f(x) > 0 \text{ se e solo se } x > -\log 2 \text{ oppure } x < -\frac{\log 10}{3}.$$

Si ha inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\frac{2}{3}\log 3} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2\log 3.$$

Per quanto riguarda l'asintoto obliquo per $x \to -\infty$, osserviamo che definitivamente per $x \to -\infty$ si ha

$$f(x) = \log\left[e^{-3x}\left(1 - 9e^{3x}\right)\right] = -3x + \log\left(1 - 9e^{3x}\right)$$

e quindi risulta

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x + \log\left(1 - 9e^{3x}\right)}{x} = -3, \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) + 3x) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(1 - 9e^{x}\right) = 0.$$

Quindi $y = -3x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$, $y = 2\log 3$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e in $x = -\frac{2\log 3}{3}$ si ha un asintoto verticale.
ii) f è derivabile in tutto D, dove si ha

$$f'(x) = \frac{-3e^{-3x}}{e^{-3x} - 9}.$$

f è perciò strettamente decrescente per $x < -\frac{2}{3}\log 3$ e strettamente crescente per $x > -\frac{2}{3}\log 3$. Non risultano quindi punti di estremo.
iii) Un calcolo diretto dà

$$f''(x) = -81\frac{e^{-3x}}{\left(e^{-3x} - 9\right)^2},$$

per cui f è concava in $]-\infty, -\frac{2}{3}\log 3[$ e in $]-\frac{2}{3}\log 3, +\infty[$.
iv) Il grafico è in figura 3.

Esercizio 2 [5 punti] Disegnare nel piano complesso l'insieme

$$S := \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\frac{z+1}{z-i} > 0,\; |z - 1 - i| \leq 1\right\}.$$

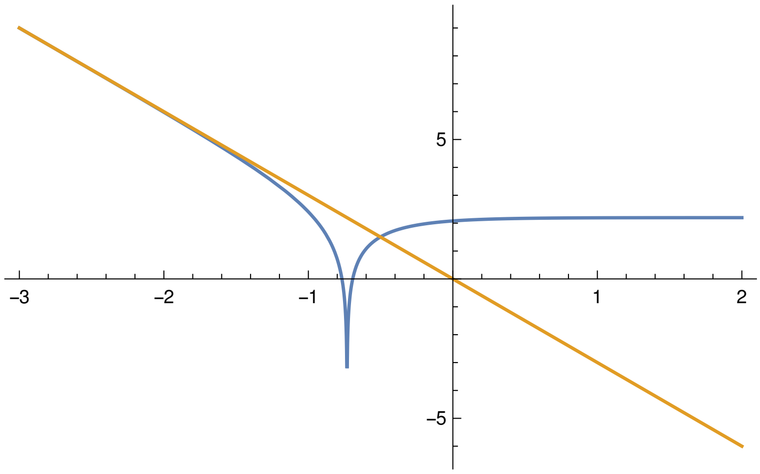

Figure 3: Il grafico di f con l'asintoto obliquo (Tema 2).

Svolgimento. Si tratta in primo luogo di determinare la parte reale di $\frac{z+1}{z-i}$. Si ha, ponendo $z = x + iy$,

$$\operatorname{Re} \frac{x+1+iy}{x+i(y-1)} = \operatorname{Re} \frac{(x+1+iy)(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x(x+1)+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}.$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+x+y^2-y \geq 0, (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 1\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}, (x-1)^2+(y-1)^2 \leq 1\right\}, \end{aligned}$$

cioè la parte esterna al cerchio di centro $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ed interna al cerchio di centro $(1,1)$ e raggio 1, rappresentata in figura 4.

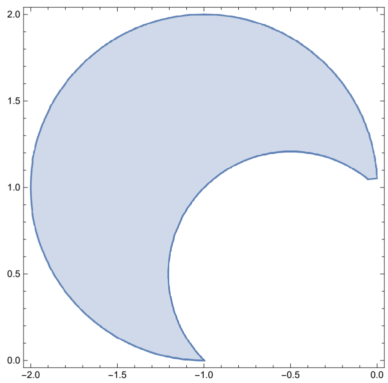

Figure 4: Le soluzioni dell'esercizio 2 (Tema 2).

Esercizio 3 [5 punti] Calcolare l'integrale

$$\int e^{2x} \arctan(2e^x)dx.$$

Svolgimento. Eseguendo la sostituzione $x = \log t$ e poi integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\arctan(2e^x)dx &= \int t\arctan(2t)\,dt = \frac{t^2}{2}\arctan(2t) - \int \frac{t^2}{1+4t^2}\,dt \\ &= \frac{t^2}{2}\arctan(2t) + \frac{1}{4}\Big[-\int\frac{1+4t^2}{1+4t^2}\,dt + \int\frac{1}{1+(2t)^2}\,dt\Big] \\ &= \frac{t^2}{2}\arctan(2t) - \frac{t}{4} + \frac{\arctan 2t}{8} + c \\ &= \frac{e^{2x}}{2}\arctan 2e^x - \frac{e^x}{4} + \frac{\arctan 2e^x}{8} + c, \quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\arctan x - \sinh x}{x^\alpha(1-\cosh^2 x)}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.
Svolgimento. Da $\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4)$ per $y \to 0$ e $\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4)$ per $y\to 0$ si deduce, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}\sin\arctan x &= \sin\Big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\Big) = \Big[x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\Big] - \frac{1}{6}\Big[x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\Big]^3 + o([x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)]^4) \\ &= x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3).\end{aligned}$$

Quindi, per $x\to 0$, vale

$$\sin\arctan x - \sinh x = x - \frac{x^3}{2} - \Big(x + \frac{x^3}{6}\Big) + o(x^3) = -\frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

Perciò si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\arctan\sin x - \sinh x}{x^\alpha(1-\cosh^2 x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2x^3/3 + o(x^3)}{-x^{\alpha+2} + o(x^{2+\alpha})} = \begin{cases}0 & \text{per } \alpha < 1\\ +\frac{2}{3} & \text{per } \alpha = 1\\ +\infty & \text{per } \alpha > 1.\end{cases}$$

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta di

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(1-2^a)^n}{n+\log n}$$

al variare di $a\in\mathbb{R}$.
Svolgimento. Per lo studio della condizione necessaria per la convergenza della serie osserviamo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|1-2^a|^n}{n+\log n} = \begin{cases}0 & \text{se } |1-2^a| \le 1\\ +\infty & \text{se } |1-2^a| > 1.\end{cases}$$

Quindi la condizione necessaria è verificata solo per $a \le 1$. Per $a > 1$ non vi può essere né convergenza semplice né assoluta. Studiamo $a \le 1$. Per la convergenza assoluta, per poter applicare il criterio della radice, studiamo il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|1-2^a|}{\big(n+\log n\big)^{1/n}} = |1-2^a|.$$

Il criterio della radice allora assicura che la serie è assolutamente convergente (e quindi anche semplicemente convergente) per $a < 1$ mentre non dà indicazioni per $a = 1$.

Studiamo separatamente il caso $a = 1$. In questo caso la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \log n}.$$

Osserviamo che per asintoticità con la serie armonica $\sum_{n=2}^{+\infty} 1/n$, non converge assolutamente. Osserviamo inoltre che $\frac{1}{n+\log n} \to 0$ per $n \to +\infty$ (v. studio della condizione necessaria) e che $\frac{1}{n+\log n}$ è definitivamente decrescente (in quanto inversa della somma di due crescenti). Il criterio di Leibniz allora assicura che la serie è semplicemente convergente.

In conclusione: si ha convergenza assoluta (e semplice) per $a < 1$, convergenza semplice e divergenza assoluta per $a = 1$. Per $a > 1$ non si ha convergenza.