ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 18.09.2017

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione
$$f(x) := \frac{3x}{\log|2x|}.$$
i) Determinare il dominio D e studiare le eventuali simmetrie ed il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D, l'eventuale prolungabilità di f e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata ed i suoi limiti significativi, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) Il dominio è $D = \{x : x \neq 0, \log|2x| \neq 0\} = \{x : x \neq 0, x \neq \pm\frac{1}{2}\}$. La funzione è visibilmente dispari, per cui la studiamo in $[0, +\infty[$. Per $x > 0$, $f(x) > 0$ se e solo se $x > \frac{1}{2}$. Si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \qquad \text{(per cui } f \text{ è prolungabile con continuità in } x = 0\text{)}\\
&\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty\\
&\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty\\
&\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\\
&\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \qquad \text{(per cui non c'è asintoto obliquo per } x \to +\infty\text{)}.
\end{aligned}$$

ii) Per $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$ si ha
$$f'(x) = \frac{3\log 2x - 3}{\log^2 2x}.$$
Essendo f prolungabile con continuità in $x = 0$, vediamo se il prolungamento di f è derivabile in 0. A tale scopo calcoliamo
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0,$$
per cui la prolungata di f è derivabile anche in $x = 0$, con derivata nulla. Il segno di f' dipende solo dal segno di $\log 2x - 1$, che è positivo se e solo se $x > e/2$. Pertanto $e/2$ è un punto di minimo locale stretto. Non ci sono estremi assoluti.
iii) Per $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$ si ha
$$f''(x) = 3\frac{\frac{\log^2 2x}{x} - 2(\log 2x - 1)\frac{log 2x}{x}}{\log^4 2x} = 3\frac{2 - \log 2x}{x\log^3 2x},$$
che risulta > 0 se e solo se $\frac{1}{2} < x < \frac{e^2}{2}$, cioè f è convessa nell'intervallo $]\frac{1}{2}, \frac{e^2}{2}[$ e concava negli intervalli $]0, \frac{1}{2}[$ e $[\frac{1}{2}, +\infty[$.
iv) Il grafico di f è riportato nella figura 1.

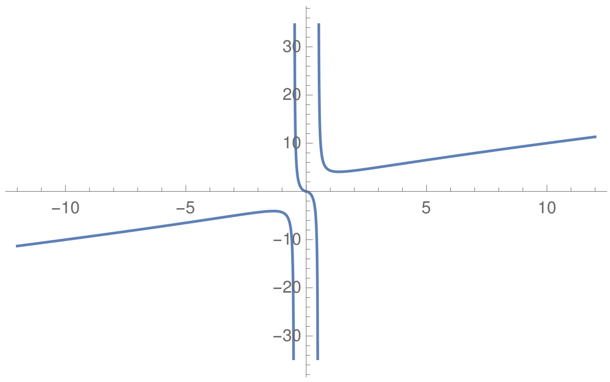

Figure 1: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Dato il polinomio

$$z^4 + z^3 + 8iz + 8i$$

determinarne prima una radice intera e poi le altre radici, esprimendole in forma algebrica.
Svolgimento. Per tentativi, una radice intera è $z = -1$: infatti

$$(-1)^4 + (-1)^3 - 8i + 8i = 0.$$

Eseguendo la divisione di polinomi, oppure, più semplicemente, raccogliendo z^3 nei primi due addendi e $8i$ negli ultimi due, risulta

$$z^4 + z^3 + 8iz + 8i = (z + 1)\big(z^3 + 8i\big),$$

per cui le restanti tre radici sono le radici cubiche di $-8i = 8e^{\frac{3}{2}\pi i}$, cioè sono

$$2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i,\ 2e^{(\frac{1}{2}+\frac{2}{3})\pi i} = 2e^{\frac{7}{6}\pi i} = -\sqrt{3} - i,\ 2e^{(\frac{1}{2}+\frac{4}{3})\pi i} = 2e^{\frac{11}{6}\pi i} = \sqrt{3} - i.$$

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3x}{n}\right)^{n^2}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. La serie è a termini definitivamente positivi per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il criterio della radice dà

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{3x}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{3x}{n}\right)^{n} = e^{3x}.$$

La serie pertanto converge per ogni $x < 0$ e diverge per ogni $x > 0$. Per $x = 0$ il criterio della radice non dà informazioni, ma per tale x la serie ha per termine generale 1 e quindi diverge.

Esercizio 4 Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x\log(\cos x)}{x - \sin x + e^{-1/x^2}}.$$

Svolgimento. Il numeratore, per $x \to 0$, si sviluppa come

$$\begin{aligned} \cosh \alpha x &= 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \frac{1}{24}\alpha^4 x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + o(x^3) \\ -e^{x^2} &= -1 - x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = -1 - x^2 + o(x^3) \\ x \log \cos x &= x \log\Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\Big) = x\Big(\frac{-x^2}{2} + o(x^2)\Big) = \frac{-x^3}{2} + o(x^3), \end{aligned}$$

per cui

$$\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x\log(\cos x) = x^2\Big(\frac{\alpha^2}{2} - 1\Big) - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = \begin{cases} x^2\Big(\frac{\alpha^2}{2} - 1\Big) + o(x^2) & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{2} \\ -\frac{x^3}{2} + o(x^3) & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Il denominatore, per $x \to 0$, si sviluppa come

$$x - \sin x + e^{-1/x^2} = \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

in quanto $e^{-1/x^2} = o(x^\beta)$ per ogni β reale. Il limite quindi vale

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x\log(\cos x)}{x - \sin x + e^{-1/x^2}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\Big(\frac{\alpha^2}{2} - 1\Big) - \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \begin{cases} \dfrac{x^2\Big(\frac{\alpha^2}{2}-1\Big)+o(x^2)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{2} \\ \\ \dfrac{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{2}. \end{cases} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{se } |\alpha| < \sqrt{2} \\ -\infty & \text{se } |\alpha| > \sqrt{2} \\ -3 & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} x e^{ax}(2 + \cos x)\, dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Calcolare poi

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} \cos x\, dx$$

(sugg.: calcolare preliminarmente una primitiva di $e^{-x}\cos x$).
Svolgimento. Una primitiva dell'integranda può essere calcolata per ogni a, per cui la discussione della convergenza può essere fatta sia direttamente dalla definizione, sia mediante criteri di convergenza. Usando il criterio del confronto si ha, per $a \geq 0$,

$$x e^{ax}(2 + \cos x) \geq x \text{ per ogni } x \geq 0$$

e quindi l'integrale diverge. Per $a < 0$ il confronto asintotico dà, ad esempio,

$$x e^{ax}(2 + \cos x) = o(e^{ax/2}),$$

perché

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{ax}(2+\cos x)}{e^{ax/2}}\le\lim_{x\to+\infty}\frac{3xe^{ax}}{e^{ax/2}}=\lim_{x\to+\infty}3xe^{\frac{ax}{2}}=0.$$

Siccome $\int_0^{+\infty}e^{ax/2}\,dx<+\infty$, l'integrale converge.
Per la primitiva, calcoliamo preliminarmente

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\cos x\,dx&=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx\\&=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x-\int e^{-x}\cos x\,dx,\end{aligned}$$

per cui

$$\int e^{-x}\cos x\,dx=\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)+c.$$

Ora integriamo per parti prendendo x come fattore finito e $e^{-x}\cos x$ come fattore differenziale. Risulta

$$\int xe^{-x}\cos x\,dx=x\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)-\int\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)\,dx.$$

Calcoliamo separatamente

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\sin x\,dx&=-e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx\\&=-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx,\end{aligned}$$

per cui

$$\int e^{-x}\sin x\,dx=-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+c.$$

In definitiva,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}xe^{-x}\cos x\,dx&=\lim_{b\to+\infty}[-x\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)\Big|_0^b+\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big|_0^b\\&\quad+\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x-\cos x)\Big|_0^b]\\&=0.\end{aligned}$$

(NB. Non è strano che il risultato sia nullo: l'integranda non ha segno costante.)

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x):=\frac{2x}{\log|3x|}.$$

i) Determinare il dominio D e studiare le eventuali simmetrie ed il segno di f; determinare i limiti di f agli estremi di D, l'eventuale prolungabilità di f e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata ed i suoi limiti significativi, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f;
iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f;

iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. i) $D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 3x \neq 0, \ \log|3x| \neq 0\} = \{x \neq 0, \ |3x| \neq 1\} = \mathbb{R} \backslash \{0, \pm\frac{1}{3}\}$. Notiamo subito che f è dispari, quindi è sufficiente discutere le sue proprietà su $D \cap [0, +\infty[=]0, \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$. In questo caso $f(x) = \frac{2x}{\log(3x)}$. Per $x > 0$ si ha che

$$f(x) \geq 0, \iff \log(3x) > 0, \iff x > \frac{1}{3}.$$

Non ci sono zeri. Limiti: evidentemente $f(0+) = \frac{0+}{\log(0+)} = \frac{0+}{-\infty} = 0-$ per cui f è prolungabile con continuità in $x = 0$; $f(\frac{1}{3}\pm) = \frac{2/3}{\log 1\pm} = \frac{2/3}{0\pm} = \pm\infty$. Per $x = \frac{1}{3}$ si ha quindi un asintoto verticale; $f(+\infty) = +\infty$ essendo $x \gg \log x$ e siccome $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\log(3x)} = 0$ non ci sono asintoti a $+\infty$.

ii) f è continua e derivabile dove definita essendo composizione di funzioni continue e derivabili su D. Sempre limitandoci ad $x > 0$,

$$f'(x) = 2\left(\frac{x}{\log(3x)}\right)' = 2\frac{\log(3x) - x\frac{3}{3x}}{(\log(3x))^2} = 2\frac{\log(3x) - 1}{(\log(3x))^2}.$$

L'unico limite significativo è per $x \longrightarrow 0+$: in tal caso $\log(3x) \longrightarrow +\infty$ e siccome $(\log(3x))^2 \gg \log(3x)$ per $x \longrightarrow 0+$ si ha che $f'(0+) = 0$. Per simmetria, $f'(0-) = 0$, il che dice che f è prolungabile con derivabilità in $x = 0$. Monotonia: abbiamo che

$$f'(x) \geq 0, \iff \log(3x) - 1 \geq 0, \iff x \geq \frac{e}{3}.$$

Dunque, su $D \cap [0, +\infty[$ f è decrescente su $]0, 1/3[\cup]1/3, e/3]$, crescente su $[e/3, +\infty[$: il punto $x = e/3$ è minimo su $D \cap [0, +\infty[$. Per simmetria, $x = -e/3$ è massimo su $D \cap]-\infty, 0]$. Visti i limiti all'infinito o gli asintoti verticali possiamo escludere l'esistenza di estremanti assoluti.

iii) Su D la funzione f' è derivabile e, per $x > 0$,

$$f''(x) = 2\left(\frac{\log(3x) - 1}{(\log(3x))^2}\right)' = 2\frac{\frac{1}{x}(\log(3x))^2 - (\log(3x) - 1)2\log(3x)\frac{1}{x}}{(\log(3x))^4} = \frac{2}{x} \cdot \frac{2 - \log(3x)}{(\log(3x))^3}$$

Da qui si ha che $f''(x) \geq 0$: per $x > \frac{1}{3}$ sse $x < \frac{e^2}{3}$; per $0 < x < \frac{1}{3}$ sse $x > \frac{e^2}{3}$ (cioè mai). Se ne conclude che f è convessa su $]\frac{1}{3}, \frac{e^2}{3}[$ concava altrove (per $x > 0$).

iv) Grafico di f:

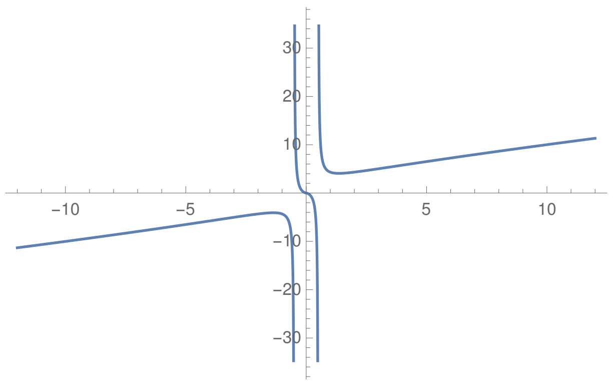

Figure 2: Il grafico di f (Tema 2).

Esercizio 2 Dato il polinomio
$$z^4 - z^3 - 27iz + 27i$$
determinarne prima una radice intera e poi le altre radici, esprimendole in forma algebrica.
Svolgimento. Cercando tra i divisori del termine noto si vede immediatamente che $z = 1$ è soluzione. Dividendo allora per $z - 1$ si ottiene la fattorizzazione

$$z^4 - z^3 - 27iz + 27i = (z - 1)(z^3 - 27i)$$

da cui le altre radici sono quelle per cui $z^3 - 27i = 0$, cioè $z^3 = 27i = 3^3 u\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (ricordiamo $u(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$). Dunque, per la formula di Demoivre, $z_k = 3u\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$. Passando alla forma algebrica
$$z_0 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right),\ z_1 = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right),\ z_2 = -3i.$$

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2x}{n}\right)^{n^2}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Fissato $x \in \mathbb{R}$, siccome $1 - \frac{2x}{n} \longrightarrow 1$ per $n \longrightarrow +\infty$, possiamo considerare la serie come a termini di segno definitivamente costante (positivo). Applichiamo il test della radice:

$$\lim_n \left(\left(1 - \frac{2x}{n}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \lim_n \left(1 - \frac{2x}{n}\right)^n = e^{-2x},$$

in virtù del limite notevole. Si conclude che:

- la serie converge per $e^{-2x} < 1$, cioè per $x > 0$;
- la serie diverge per $e^{-2x} > 1$, cioè per $x < 0$.

Per $x = 0$ il test fallisce, tuttavia in questo caso la serie diventa $\sum_n 1^{n^2} = \sum_n 1$ evidentemente divergente.

Esercizio 4 Calcolare, al variare del parametro reale α, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - e^{\alpha x^2} + x\log(\cosh x)}{x - \sinh x + e^{-1/x^2}}.$$

Svolgimento. Facilmente si vede che si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Per individuare l'ordine di infinitesimo, usiamo gli sviluppi asintotici. Per il numeratore

$$\begin{aligned} N(x) &= 1 - \tfrac{x^2}{2} + o(x^3) - \left(1 + \alpha x^2 + o(x^3)\right) + x\log\left(1 + \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= -\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right)x^2 + o(x^3) + x\left(\tfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= -\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\right)x^2 + \tfrac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

Al denominatore, osservato che

$$x - \sinh x = x - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

e che $e^{-1/x^2} = o(x^3)$ (facile) si conclude $D(x) = -\frac{x^3}{6} \cdot 1_x$. Conclusione:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \begin{cases} \frac{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)x^2+o(x^2)}{\frac{x^3}{2}+o(x^3)} = \longrightarrow -\mathrm{sgn}\,(\alpha + \frac{1}{2})\infty, & \alpha \neq -\frac{1}{2}, \\ \\ \frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \longrightarrow -3, & \alpha = -1/2. \end{cases}$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} xe^{ax}(2 - \sin x)\, dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Calcolare poi

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} \sin x\, dx$$

(sugg.: calcolare preliminarmente una primitiva di $e^{-x}\sin x$).
Svolgimento. Dobbiamo controllare l'integrabilità a $+\infty$. Siccome $1 \leq 2 - \sin x \leq 3$, l'integrabilità equivale a quella di xe^{ax}, che converge se e solo se $a < 0$.
Per il calcolo dell'integrale, si può procedere come nello svolgimento del Tema 1. In alternativa, procedendo per parti, si ha

$$\int xe^{-x} \sin x\ dx = -\int (e^{-x})' x \sin x\ dx = -\left[e^{-x} x \sin x - \int e^{-x}(\sin x + x\cos x)\ dx\right]$$

Ora, osserviamo che

$$\int xe^{-x} \cos x\ dx = -\left[e^{x} x \cos x - \int e^{-x}(\cos x - x\sin x)\ dx\right]$$

da cui, immettendo nella prima e riportando a primo membro la primitiva comune, dopo semplici passaggi algebrici si trova

$$2\int xe^{-x} \sin x\ dx = -\left[e^{-x} x \sin x + e^{-x} x \cos x + \int e^{-x} \sin x\ dx + \int e^{-x} \cos x\ dx\right]$$

Dallo svolgimento del Tema 1 si ricava che

$$\int e^{-x}(\cos x + \sin x)\ dx = -e^{-x}\cos x + c.$$

In conclusione

$$\int xe^{-x} \sin x\ dx = -\frac{e^{-x}}{2}\left[x(\sin x + \cos x) - \cos x\right].$$

Per valutare l'integrale generalizzato: a $+\infty$ la primitiva è facilmente nulla; in $x = 0$ vale $-\frac{1}{2}$. In sintesi, l'integrale generalizzato vale $\frac{1}{2}$.