ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 29.01.2018

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2-5|}{x+1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; NON è richiesta la derivata seconda;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{2n} \sin \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Esercizio 3 [5 punti] Sia $f(z) = z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 - 8i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3) - \log(x+1) - \sin\frac{2}{x}}{\cos\sin\frac{1}{2x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [8 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x^2-2}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

Esercizio facoltativo. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e si definisca la successione $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ponendo

$$a_0 = x_0 \text{ e, per ogni } n \geq 1,\ a_{n+1} = \sin a_n.$$

a) Dimostrare che a_n è definitivamente monotona per $n \to +\infty$;
b) dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti, ad eccezione di quanto si trova scritto sul retro del presente foglio. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

SVILUPPI DI MCLAURIN DELLE PRINCIPALI FUNZIONI ELEMENTARI

Per $x \to 0$, si hanno

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix} x^n + o(x^n) \qquad \text{dove } \begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots + o(x^6) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{arsinh } x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{artanh } x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 29.01.2018

TEMA 2

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2-3|}{x+1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; NON è richiesta la derivata seconda;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{3n} \sinh \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Esercizio 3 [5 punti] Sia $f(z) = -z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 - 8i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1) - \log(x+2) + \sinh \frac{1}{x}}{\cosh \sin \frac{1}{x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-2x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [8 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{4x^2-1}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

Esercizio facoltativo. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e si definisca la successione $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ponendo

$$a_0 = x_0 \text{ e, per ogni } n \geq 1,\ a_{n+1} = \sin a_n.$$

a) Dimostrare che a_n è definitivamente monotona per $n \to +\infty$;
b) dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti, ad eccezione di quanto si trova scritto sul retro del presente foglio. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

SVILUPPI DI MCLAURIN DELLE PRINCIPALI FUNZIONI ELEMENTARI

Per $x \to 0$, si hanno

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix} x^n + o(x^n) \qquad \text{dove } \begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots + o(x^6) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{arsinh } x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{artanh } x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 29.01.2018

TEMA 3

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2 - 4|}{x - 1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; NON è richiesta la derivata seconda;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{\frac{n}{2}} \arctan \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Esercizio 3 [5 punti] Sia $f(z) = z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 + 27i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-2) - \log(x-1) + \arctan \frac{1}{x}}{\cos \sinh \frac{2}{x} - \cos \frac{\alpha}{x} - e^{-\frac{x}{2}}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [8 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x^2 - 4}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

Esercizio facoltativo. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e si definisca la successione $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ponendo

$$a_0 = x_0 \text{ e, per ogni } n \geq 1,\ a_{n+1} = \sin a_n.$$

a) Dimostrare che a_n è definitivamente monotona per $n \to +\infty$;
b) dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti, ad eccezione di quanto si trova scritto sul retro del presente foglio. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

SVILUPPI DI MCLAURIN DELLE PRINCIPALI FUNZIONI ELEMENTARI

Per $x \to 0$, si hanno

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + o(x^n) \qquad \text{dove } \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots + o(x^6) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{arsinh } x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{artanh } x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 29.01.2018

TEMA 4

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2 - 6|}{x+1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; NON è richiesta la derivata seconda;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{\frac{n}{3}} \tan \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Esercizio 3 [5 punti] Sia $f(z) = -z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 + 27i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.

Esercizio 4 [7 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3) - \log(x+1) - \tan \frac{2}{x}}{\cosh \sinh \frac{3}{x} - \cosh \frac{\alpha}{x} - e^{-3x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [8 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{9x^2-1}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

Esercizio facoltativo. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e si definisca la successione $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ponendo

$$a_0 = x_0 \text{ e, per ogni } n \geq 1,\ a_{n+1} = \sin a_n.$$

a) Dimostrare che a_n è definitivamente monotona per $n \to +\infty$;
b) dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti, ad eccezione di quanto si trova scritto sul retro del presente foglio. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

SVILUPPI DI MCLAURIN DELLE PRINCIPALI FUNZIONI ELEMENTARI

Per $x \to 0$, si hanno

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix} x^n + o(x^n) \qquad \text{dove } \begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots + o(x^6) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{arsinh } x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{artanh } x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$