ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 16.02.2018

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-\frac{1}{|x-2|}} & \text{per } x \neq 2 \\ 0 & \text{per } x = 2. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{(2n+3)^2}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Risolvere l'equazione

$$z^2\overline{z} + z\overline{z}^2 = 4\,\mathrm{Im}(iz)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 4 [6 punti]
Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(4\cos x - \alpha)^2 - 4x^4}{x^4 \sin^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [7 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{3}} x^\alpha \sin(\sqrt{3x})\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti, ad eccezione di quanto si trova scritto sul retro del presente foglio. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

SVILUPPI DI MCLAURIN DELLE PRINCIPALI FUNZIONI ELEMENTARI

Per $x \to 0$, si hanno

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix} x^n + o(x^n) \qquad \text{dove } \begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots + o(x^6) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{arsinh } x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{artanh } x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 16.02.2018

TEMA 2

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x-\frac{1}{|x+2|}} & \text{per } x \neq -2 \\ 0 & \text{per } x = -2. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(3n+2)^2}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Risolvere l'equazione

$$-\mathrm{Im}(z^2\overline{z} - z\overline{z}^2) = 8i(z - \overline{z})$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 4 [6 punti]
Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{4(\cosh x - \alpha)^2 - x^4}{x^4 \arctan^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [7 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^3}{2}} x^{\alpha-1} \sin(\sqrt[3]{2x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti, ad eccezione di quanto si trova scritto sul retro del presente foglio. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

SVILUPPI DI MCLAURIN DELLE PRINCIPALI FUNZIONI ELEMENTARI

Per $x \to 0$, si hanno

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix} x^n + o(x^n) \qquad \text{dove } \begin{pmatrix} a \\ n \end{pmatrix} = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots + o(x^6) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{arsinh } x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{artanh } x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 16.02.2018

TEMA 3

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-\frac{1}{|x-3|}} & \text{per } x \neq 3 \\ 0 & \text{per } x = 3 \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{(2n+5)^2}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Risolvere l'equazione

$$z\bar{z}^2 - z^2\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(\bar{z} - z)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 4 [6 punti]
Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2} - 2\alpha)^2 - x^4}{x^4 \sinh^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [7 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{8}} x^{1-\alpha} \sin(\sqrt{2x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti, ad eccezione di quanto si trova scritto sul retro del presente foglio. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

SVILUPPI DI MCLAURIN DELLE PRINCIPALI FUNZIONI ELEMENTARI

Per $x \to 0$, si hanno

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + o(x^n) \qquad \text{dove } \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots + o(x^6) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{arsinh } x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{artanh } x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 16.02.2018

TEMA 4

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x-\frac{1}{|x+3|}} & \text{per } x \neq -3 \\ 0 & \text{per } x = -3 \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(3n+5)^2}.$$

Esercizio 3 [6 punti] Risolvere l'equazione

$$\operatorname{Im}(\bar{z}^2 z - z^2 \bar{z}) = 4 \operatorname{Re}(iz)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 4 [6 punti]
Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(3\alpha - e^{x^2})^2 - 2x^4}{x^4 \tan^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 [7 punti] a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^3}{24}} x^\alpha \sin(\sqrt[3]{3x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 0$.

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti, ad eccezione di quanto si trova scritto sul retro del presente foglio. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

SVILUPPI DI MCLAURIN DELLE PRINCIPALI FUNZIONI ELEMENTARI

Per $x \to 0$, si hanno

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array}\right) x^n + o(x^n) \qquad \text{dove } \left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array}\right) = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots + o(x^6) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{arsinh } x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{artanh } x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$