ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 9.07.2018

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left|2 - 3e^{3x}\right|.$$

i) Si determini il dominio D e si studi il segno di f;
ii) si determininio i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f, determinandone gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) si disegni un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Risolvere la disequazione

$$|z|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \operatorname{Im}\left(\bar{z}^2\right)$$

rappresentandone le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\log(1+x) - \log x - \frac{\alpha}{x}\right)^2}{\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)^2 + e^{-x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [6 punti] Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \arctan\left(\frac{2^{\alpha n}}{n}\right).$$

Esercizio 5 [8 punti] a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

(sugg.: cercare una decomposizione dell'integrando del tipo $\frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+2}$).
b) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \log\frac{x^\alpha + 2}{x^\alpha + 1}\, dx.$$

al variare di $\alpha > 0$.
c) Calcolarlo per $\alpha = 2$.

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti, ad eccezione di quanto si trova scritto sul retro del presente foglio. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

SVILUPPI DI MCLAURIN DELLE PRINCIPALI FUNZIONI ELEMENTARI

Per $x \to 0$, si hanno

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{a}{n} x^n + o(x^n) \qquad \text{dove } \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots + o(x^6) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{arsinh } x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{artanh } x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 9.07.2018

TEMA 2

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left|2e^{2x} - 3\right|.$$

i) Si determini il dominio D e si studi il segno di f;
ii) si determininio i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f, determinandone gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) si disegni un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Risolvere la disequazione

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) \geq \frac{\operatorname{Im}\big(z^2 - \bar{z}^2\big)}{|z|^2}$$

rappresentandone le soluzioni sul piano di Gauss.

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\big(\cosh\frac{1}{x} - 1\big)^2 - e^{-x}}{\big(\log(2+x) - \log x + \frac{2\alpha}{x}\big)^2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4 [6 punti] Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arctan\left(\frac{4^{\alpha n}}{n^2}\right).$$

Esercizio 5 [8 punti] a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

(sugg.: cercare una decomposizione dell'integrando del tipo $\frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+4}$).
b) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \log\frac{x^\alpha+1}{x^\alpha+4}\, dx.$$

al variare di $\alpha > 0$.
c) Calcolarlo per $\alpha = 2$.

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti, ad eccezione di quanto si trova scritto sul retro del presente foglio. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

SVILUPPI DI MCLAURIN DELLE PRINCIPALI FUNZIONI ELEMENTARI

Per $x \to 0$, si hanno

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array}\right) x^n + o(x^n) \qquad \text{dove } \left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array}\right) = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots + o(x^6) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{arsinh } x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{artanh } x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$