ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 17.09.2018

TEMA 1

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{2}{|x|}}\big(2|x|-3\big) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D, le eventuali simmetrie e studiare il segno di f;
ii) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) studiare la continuità e (facoltativo) la derivabilità di f (in particolare in $x = 0$);
v) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Sia

$$P_\lambda(z) = \lambda - 4iz + 2iz^2 + z^3.$$

Determinarne $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ in modo che $z = -2i$ sia uno zero di P_{λ_0}. Risolvere poi l'equazione

$$P_{\lambda_0}(z) = 0$$

esprimendone le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 3 [6 punti] Discutere al variare del parametro reale α la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n + \sin n)}{n^{\frac{\alpha}{2}} + 2}$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sinh x - x^\alpha}{\cos x - 1 + x^{\frac{7}{3}} \log x}.$$

Esercizio 5 [7 punti] Dato l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{\frac{\alpha}{2}} \arcsin 2x^2 \, dx,$$

a) studiarne la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 2$.

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti, ad eccezione di quanto si trova scritto sul retro del presente foglio. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

SVILUPPI DI MCLAURIN DELLE PRINCIPALI FUNZIONI ELEMENTARI

Per $x \to 0$, si hanno

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array}\right) x^n + o(x^n) \qquad \text{dove } \left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array}\right) = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots + o(x^6) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{arsinh}\ x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{artanh}\ x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 17.09.2018

TEMA 2

Esercizio 1 [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}\big(2-3|x|\big) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

i) Determinarne il dominio D, le eventuali simmetrie e studiare il segno di f;
ii) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) studiare la continuità e (facoltativo) la derivabilità di f (in particolare in $x = 0$);
v) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 [6 punti] Sia

$$P_\lambda(z) = \lambda + 2iz + 3iz^2 + z^3.$$

Determinare $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ in modo che $z = -3i$ sia uno zero di P_{λ_0}. Risolvere poi l'equazione

$$P_{\lambda_0}(z) = 0$$

esprimendone le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 3 [6 punti] Discutere al variare del parametro reale α la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n + \cos n)}{n^{2\alpha} + 1}$$

Esercizio 4 [6 punti] Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x - x^\alpha}{\cosh x - 1 + x^{\frac{5}{2}} \log x}.$$

Esercizio 5 [7 punti] Dato l'integrale

$$\int_0^{\sqrt{2}} x^{2\alpha} \arcsin \frac{x^2}{2}\, dx,$$

a) studiarne la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti, ad eccezione di quanto si trova scritto sul retro del presente foglio. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

SVILUPPI DI MCLAURIN DELLE PRINCIPALI FUNZIONI ELEMENTARI

Per $x \to 0$, si hanno

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \cdots + \left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array}\right) x^n + o(x^n) \qquad \text{dove } \left(\begin{array}{c} a \\ n \end{array}\right) = \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots + o(x^6) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{arsinh } x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\text{artanh } x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$