ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 29.01.2018

NOTA: lo svolgimento del Tema 1 contiene alcuni commenti di carattere generale.

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2 - 5|}{x + 1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. i) Da $\frac{|x^2-5|}{x+1} > 0$ segue che $D = \{x > -1, x \neq \sqrt{5}\}$. Non ci sono simmetrie evidenti. $f(x) \leq 0$ se e solo se

$$x > -1$$

e

$$|x^2 - 5| \leq x + 1 \Leftrightarrow -x - 1 \leq x^2 - 5 \leq x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 4 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 \leq 0, \end{cases}$$

cioè se e solo se $-\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \leq x \leq 3$.

Si ha inoltre

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to \sqrt{5}} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Siccome

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

non ci sono asintoti obliqui, ma solo due asintoti verticali (oltre ad un asintoto orrizzontale "così alto che non si vede" (cit.))
ii) Le regole di derivazione possono essere applicate in tutto D, perché il punto nel quale l'argomento del modulo si annulla non appartiene al dominio. Siccome $f(x) = \log |x^2 - 5| - \log(x + 1)$ e ricordando che $\frac{d}{dx} \log |g(x)| = \frac{g'(x)}{g(x)}$ dove $g(x) \neq 0$, si ha per ogni $x \in D$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 5} - \frac{1}{x + 1} = \frac{x^2 + 2x + 5}{(x^2 - 5)(x + 1)}.$$

Siccome il polinomio al numeratore è sempre positivo, $f'(x) > 0$, e quindi f è crescente, se e solo se $x > \sqrt{5}$. Non ci sono punti di estremo.

iii) Il grafico di f è in figura 1.

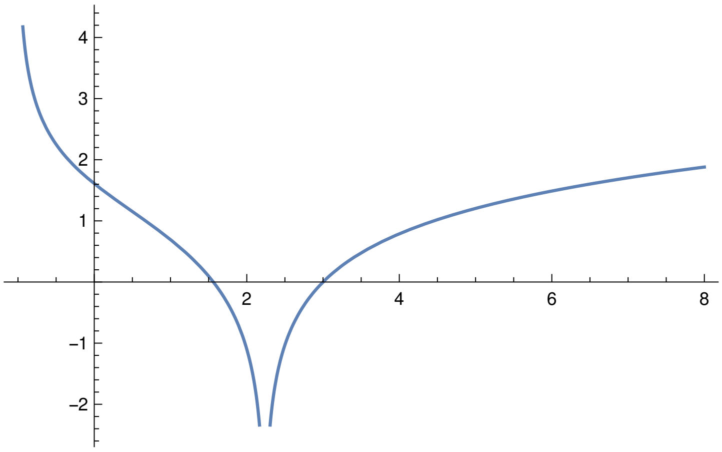

Figure 1: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{2n} \sin \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.
Svolgimento. a) Siccome $a_n \sim \frac{(e^2)^n}{n!}$ per $n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (ricordando un limite fondamentale).
b) Il criterio del confronto asintotico e il criterio del rapporto danno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2(n+1)}}{(n+1)!} \frac{n!}{e^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^2}{n+1} = 0,$$

per cui la serie converge assolutamente e quindi converge.
Il fatto che $a_n \to 0$ si poteva anche dedurre direttamente dalla convergenza della serie.

NOTA: applicando il criterio di Leibniz si può dedurre direttamente la convergenza della serie. Risulta che $|a_n|$ è decrescente se e solo se $e^2 \leq n$, il che vero per ogni $n > 2$ (la dimostrazione richiede un po' di lavoro). Resta comunque da verificare la convergenza assoluta. Siccome in questo caso è vera, l'uso del criterio di Leibniz è del tutto inutile.

Esercizio 3 Sia $f(z) = z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 - 8i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.
Svolgimento. L'equazione è

$$z^3 + z\bar{z}|z| = |z|^3 - 8i.$$

Siccome $z\bar{z}|z| = |z|^2|z| = |z|^3$, l'equazione diventa

$$z^3 = -8i.$$

Le tre radici cubiche di $-8i = 8e^{i3\pi/2}$ sono date da

$$2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i, \; 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i, \; 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = \sqrt{3} - i,$$

rappresentate in figura 2.

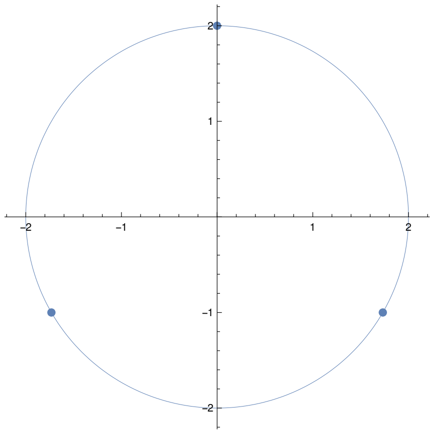

Figure 2: Le soluzioni dell'esercizio 3 (Tema 1).

Esercizio 4 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3)-\log(x+1)-\sin\frac{2}{x}}{\cos\sin\frac{1}{2x}-e^{\frac{\alpha}{x^2}}-e^{-x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Il numeratore:

$$\begin{aligned}
\log(x+3)-\log(x+1)-\sin\frac{2}{x} &= \log x + \log\left(1+\frac{3}{x}\right) - \log x - \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \sin\frac{2}{x} \\
&= \log\left(1+\frac{3}{x}\right) - \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \sin\frac{2}{x} \\
&= \frac{3}{x} - \frac{9}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} + o\Big(\frac{2}{x^2}\Big) \\
&= -\frac{4}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)
\end{aligned}$$

per $x\to+\infty$. Il denominatore (ricordando che $e^{-x}=o(1/x^\alpha)$ per $x\to+\infty$ per ogni α):

$$\begin{aligned}
\cos\sin\frac{1}{x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-x} &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2x} + \frac{1}{24}\sin^4\frac{1}{2x} - \left(1+\frac{\alpha}{x^2}+\frac{\alpha^2}{2x^4}\right) + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2x}-\frac{1}{6(2x)^3}\Big)^2 + \frac{1}{24(2x)^4} - \frac{\alpha}{x^2} - \frac{\alpha^2}{2x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{8}-\alpha\Big)\frac{1}{x^2} + \Big(\frac{1}{96}+\frac{1}{24\cdot 2^4}-\frac{\alpha^2}{2}\Big)\frac{1}{x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} -\Big(\frac{1}{8}+\alpha\Big)\frac{1}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) & \text{se } \alpha \neq -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{192}\frac{1}{x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big) & \text{se } \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

per $x\to+\infty$. Di conseguenza,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x+3)-\log(x+1)-\sin\frac{2}{x}}{\cosh\sin\frac{1}{2x}-e^{\frac{\alpha}{x^2}}-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty}\begin{cases} \dfrac{\frac{-4}{x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)}{-\Big(\frac{1}{8}+\alpha\Big)\frac{1}{x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)} = \frac{32}{1+8\alpha} & \text{se } \alpha \neq -\frac{1}{8} \\ \dfrac{\frac{-4}{x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)}{\frac{1}{192}\frac{1}{x^4}+o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)} = -\infty & \text{se } \alpha = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

NOTA: Il numeratore poteva anche essere scritto come

$$\begin{aligned}\log(x+3)-\log(x+1)-\sin\frac{2}{x} &= \log\frac{x+3}{x+1}-\sin\frac{2}{x} = \log\Big(1+\frac{2}{x+1}\Big)-\sin\frac{2}{x}\\ &= \frac{2}{x+1}-\frac{1}{2}\Big(\frac{2}{x+1}\Big)^2-\frac{2}{x}+o\Big(\frac{2}{x^2}\Big)\\ &= -2\frac{2x+1}{x(x+1)^2}+o\Big(\frac{2}{x^2}\Big)\\ &= -2\frac{1+2x}{x(x+1)^2}+o\Big(\frac{2}{x^2}\Big)\sim-\frac{4}{x^2}\end{aligned}$$

per $x\to+\infty$. La maggior parte degli studenti che ha svolto il calcolo in questo modo ha tralasciato il termine di ordine 2 nello sviluppo del logaritmo.

Esercizio 5 a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha\sqrt{x^2-2}}\,dx$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha=1$.
Svolgimento. a) L'integranda $f(x)$ è continua in $]\sqrt{2},+\infty[$, per cui si deve controllare la convergenza sia per $x\to\sqrt{2}^+$ che per $x\to+\infty$. Per $x\to\sqrt{2}+$,

$$f(x)\sim\frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{2}}},$$

per cui l'integrale converge per ogni α. Per $x\to+\infty$,

$$f(x)\sim\frac{1}{x^{\alpha+1}},$$

per cui l'integrale converge se e solo se $\alpha>0$.
b) Con la sostituzione $x=\sqrt{2}\cosh t$, si ha (per $t>0$)

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{2}\sinh t}{2\cosh t\sinh t}\,dt=\sqrt{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt=\sqrt{2}\arctan e^t\big|_0^{+\infty}=\sqrt{2}\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Big)=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

Esercizio facoltativo. Sia $x_0\in\mathbb{R}$ e si definisca la successione $\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ ponendo

$$a_0=x_0 \text{ e, per ogni } n\geq 1,\ a_{n+1}=\sin a_n.$$

a) Dimostrare che a_n è definitivamente monotona per $n\to+\infty$;
b) dimostrare che $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$.
Svolgimento. a) Per $n\geq 1$ si ha $|a_n|=|\sin(a_{n-1})|\leq 1$. Se $a_1\in[0,1]$, allora da $\sin x\leq x$ $\forall x\geq 0$ si ricava $a_{n+1}=\sin a_n\leq a_n$ e dunque la successione è definitivamente decrescente. Se invece $a_1\in[-1,0]$ si ottiene che la successione è definitivamente crescente.
b) In ogni caso la successione ha un limite $\ell\in[-1,1]$. Se per assurdo fosse $\ell\neq 0$ si avrebbe, essendo la funzione seno continua,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{|\sin\ell|}{|\ell|}<1,$$

il che implicherebbe la convergenza della serie $\sum_{n=0}^\infty|a_n|$, il che a sua volta implicherebbe che a_n converge a 0, cosicché $0=\ell\neq 0$. Dunque $\ell=0$. In alternativa, sempre per la continuità di sin,

$$\ell=\lim a_{n+1}=\lim\sin a_n=\sin\ell$$

che ha $\ell=0$ come unica soluzione.

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2 - 3|}{x+1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) $D = \{x > -1, x \neq \sqrt{3}\}$. Non ci sono simmetrie evidenti. $f(x) \leq 0$ se e solo se

$$|x^2 - 3| \leq x + 1 \Leftrightarrow -x - 1 \leq x^2 - 3 \leq x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x^2 - x - 4 \leq 0, \end{cases}$$

cioè se e solo se $1 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{17}}{2}$. Si ha

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to \sqrt{3}} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Siccome

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

non ci sono asintoti obliqui, ma solo due asintoti verticali.
ii) Le regole di derivazione possono essere applicate in tutto D, perché il punto nel quale l'argomento del modulo si annulla non appartiene al dominio. Siccome $f(x) = \log|x^2 - 3| - \log(x + 1)$ e ricordando che $\frac{d}{dx} \log|g(x)| = \frac{g'(x)}{g(x)}$ dove $g(x) \neq 0$, si ha per ogni $x \in D$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 3} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x^2 - 3)(x + 1)}.$$

Siccome il polinomio al numeratore è sempre positivo, $f'(x) > 0$, e quindi f è crescente, se e solo se $x > \sqrt{3}$. Non ci sono punti di estremo.
iii) Il grafico di f è in figura 3.

Esercizio 2 Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{3n} \sinh \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.
Svolgimento. a) Siccome $a_n \sim \frac{e^{3n}}{n!}$ per $n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (ricordando un limite fondamentale).
b) Il criterio del confronto asintotico e il criterio del rapporto danno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{3(n+1)}}{(n+1)!} \frac{n!}{e^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^3}{n+1} = 0,$$

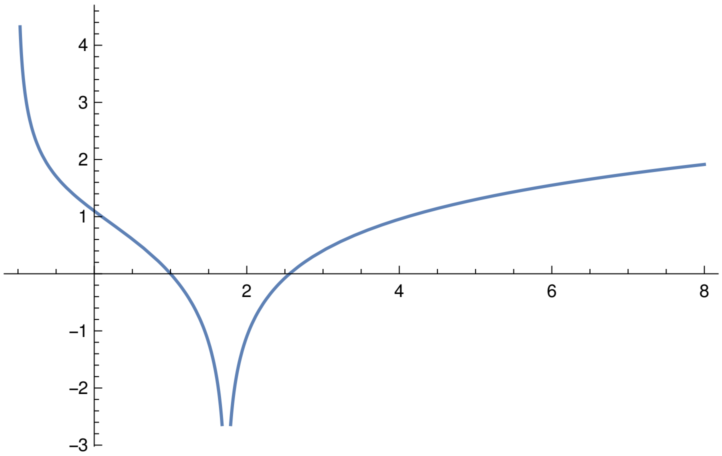

Figure 3: Il grafico di f (Tema 2).

per cui la serie converge assolutamente e quindi converge. Il fatto che $a_n \to 0$ si poteva anche dedurre direttamente dalla convergenza della serie.

Esercizio 3 Sia $f(z) = -z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 - 8i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.
Svolgimento. L'equazione è

$$-z^3 + z\bar{z}|z| = |z|^3 - 8i.$$

Siccome $z\bar{z}|z| = |z|^2|z| = |z|^3$, l'equazione diventa

$$z^3 = 8i.$$

Le tre radici cubiche di $8i = 8e^{i\pi/2}$ sono date da

$$2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i,\ 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i,\ 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i,$$

rappresentate in figura 4.

Esercizio 4 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1) - \log(x+2) + \sinh\frac{1}{x}}{\cosh\sin\frac{1}{x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-2x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Il numeratore:

$$\begin{aligned}
\log(x+1) - \log(x+2) + \sinh\frac{1}{x} &= \log x + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \log x - \log\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \sinh\frac{1}{x} \\
&= \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \log\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \sinh\frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} + \frac{4}{2x^2} + \frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) \\
&= \frac{3}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)
\end{aligned}$$

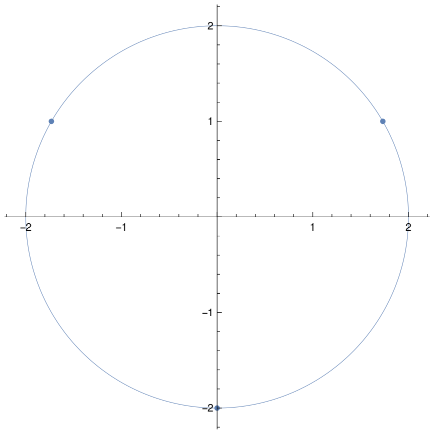

Figure 4: Le soluzioni dell'esercizio 3 (Tema 2).

per $x \to +\infty$. Il denominatore (ricordando che $e^{-2x} = o(1/x^N)$ per $x \to +\infty$ per ogni N):

$$\begin{aligned}\cosh \sin \frac{1}{x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-2x} &= 1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{x} + \frac{1}{24}\sin^4\frac{1}{x} - \Big(1 + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{2x^4}\Big) + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3}\Big)^2 + \frac{1}{24x^4} - \frac{\alpha}{x^2} - \frac{\alpha^2}{2x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)\\ &= \Big(\frac{1}{2} - \alpha\Big)\frac{1}{x^2} + \Big(\frac{-1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{\alpha^2}{2}\Big)\frac{1}{x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \Big(\frac{1}{2} - \alpha\Big)\frac{1}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) & \text{se } \alpha \neq \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4}\frac{1}{x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big) & \text{se } \alpha = \frac{1}{2}\end{cases}$$

per $x \to +\infty$. Di conseguenza,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1) - \log(x+2) - \sinh\frac{1}{x}}{\cosh\sin\frac{1}{x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-2x}} = \lim_{x\to+\infty} \begin{cases} \dfrac{\frac{3}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)}{\Big(\frac{1}{2} - \alpha\Big)\frac{1}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)} = \frac{3}{1-2\alpha} & \text{se } \alpha \neq \frac{1}{2}\\ \dfrac{\frac{3}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)}{-\frac{1}{4}\frac{1}{x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)} = -\infty & \text{se } \alpha = \frac{1}{2}.\end{cases}$$

Esercizio 5 a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\sqrt{4x^2-1}}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.
Svolgimento. a) L'integranda $f(x)$ è continua in $]\frac{1}{2}, +\infty[$, per cui si deve controllare la convergenza sia per $x \to \frac{1}{2}^+$ che per $x \to +\infty$. Per $x \to \frac{1}{2}^+$,

$$f(x) \sim \frac{2^{1-\alpha}}{\sqrt{x-\frac{1}{2}}},$$

per cui l'integrale converge per ogni α. Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{1}{2x^{\alpha+1}},$$

per cui l'integrale converge se e solo se $\alpha > 0$.
b) Con la sostituzione $2x = \cosh t$, si ha (per $t > 0$)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sinh t}{\frac{\cosh t}{2}\sinh t}\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt = 2\arctan e^t\Big|_0^{+\infty} = 2\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

TEMA 3

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \log\frac{|x^2-4|}{x-1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) f è definita per $\frac{|x^2-4|}{x-1} > 0$, cioè, se e solo se il numeratore non è uguale a zero ($x \neq \pm 2$) e il denominatore è positivo ($x > 1$). Di conseguenza, $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 1, x \neq 2\}$. f non presenta simmetrie.
$f(x)$ ha lo stesso segno di $\frac{|x^2-4|}{x-1} - 1$, quindi $f(x) = 0$ se e solo se $|x^2-4| = x-1$. Per $|x| < 2$, si ottiene $x^2+x-5 = 0$ che ha soluzioni $x = (-1 \pm \sqrt{21})/2$, e si osserva che solo $(-1+\sqrt{21})/2 \in D$. Per $x > 2$, si ottiene $x^2-x-3 = 0$ che ha $(1+\sqrt{13})/2$ come unica soluzione in D.
Inoltre, per $x \in D$, $f(x) > 0$ ($\frac{|x^2-4|}{x-1} > 1$) se e solo se $x^2-x-3 > 0$ (per $x > 2$), o $x^2+x-5 < 0$ (per $x < 2$), cioè, per $x > (1+\sqrt{13})/2$ o per $1 < x < (-1+\sqrt{21})/2$.
Per $x \to 1^+$, il numeratore tende a 3, mentre il denominatore tende a 0, quindi

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{y\to\infty} \log y = \infty.$$

Per $x \to 2$, il numeratore tende a 0, mentre il denominatore tende a 1, quindi

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{y\to 0^+} \log y = -\infty.$$

Per $x \to \infty$, $\frac{|x^2-4|}{x-1} \sim x$, quindi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{y\to\infty} \log y = \infty.$$

Siccome

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

non ci sono asintoti obliqui, ma solo due asintoti verticali.
ii) La funzione $y \mapsto |y|$ è derivabile su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Quindi per l'algebra delle funzioni derivabili e la derivabilità della funzione composta, la funzione $x \mapsto \frac{|x^2-4|}{x-1}$ è derivabile su D. Il logaritmo è derivabile sul suo dominio. Per la derivabilità della funzione composta, f è derivabile su D.
La derivata è (per $x > 2$)

$$f'(x) = \frac{x-1}{(x^2-4)} \cdot \frac{2x(x-1)-(x^2-4)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2+3}{(x^2-4)(x-1)},$$

e (per $1 < x < 2$)

$$f'(x) = \frac{x-1}{(4-x^2)} \cdot \frac{-2x(x-1)-(4-x^2)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2+3}{(x^2-4)(x-1)},$$

e si vede che $f'(x) < 0$, e quindi f è decrescente, per $1 < x < 2$, mentre $f'(x) > 0$, e quindi f è cresecente, per $x > 2$.

Dai limiti in (i) segue che f è illimitata, quindi non ha estremi assoluti. Inoltre, non ha estremi relativi essendo derivabile su tutto D e, per ogni $x \in D$, $f'(x) \neq 0$.

iii) Il grafico di f è in figura 5.

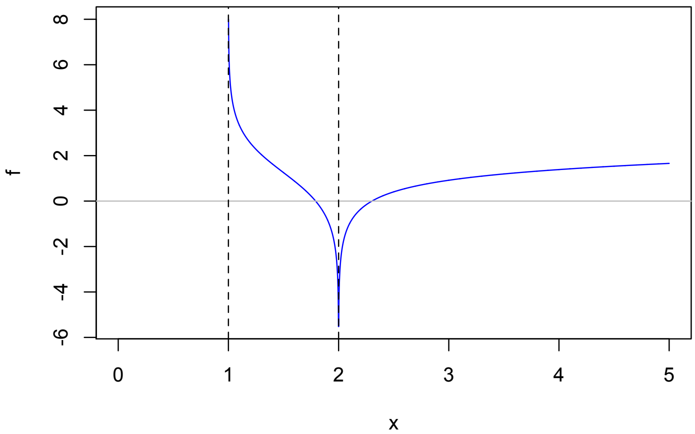

Figure 5: Il grafico di f (Tema 3).

Esercizio 2 Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{\frac{n}{2}} \arctan \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

Svolgimento. Si nota che

$$|a_n| \leq \frac{\pi\sqrt{e}}{2} \frac{(\sqrt{e})^{n-1}}{(n-1)!} =: b_n \qquad (*)$$

Per il criterio del rapporto $\sum b_n$ converge: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{e}}{n} \to 0$ per $n \to \infty$. Per il criterio del confronto ed $(*)$, $\sum |a_n|$ converge, cioè $\sum a_n$ converge assolutamente, che implica che converge anche semplicemente (risposte per il punto (b)). Per la condizione necessaria per la convergenza di una serie, questi fatti implicano che $\lim a_n = 0$ (risposta per il punto (a)). Alternativamente si può rispondere ad (a) usando $(*)$ e la gerarchia degli infiniti, in particolare il fatto: $\lim c^n/(n!) = 0$ per qualsiasi c, per poi applicare il Teorema dei Carabinieri.

Esercizio 3 Sia $f(z) = z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 + 27i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.

Svolgimento. L'equazione è

$$-z^3 + z\bar{z}|z| = |z|^3 + 27i.$$

Siccome $z\bar{z}|z| = |z|^2|z| = |z|^3$, l'equazione diventa

$$z^3 = 27i.$$

Le tre radici cubiche di $27i = (3^3)e^{i\pi/2}$ sono date da

$$3e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2}(\sqrt{3}+i),\ 3e^{i\frac{5\pi}{6}} = \frac{3}{2}(-\sqrt{3}+i),\ 3e^{i\frac{3\pi}{2}} = -3i,$$

rappresentate in figura 6.

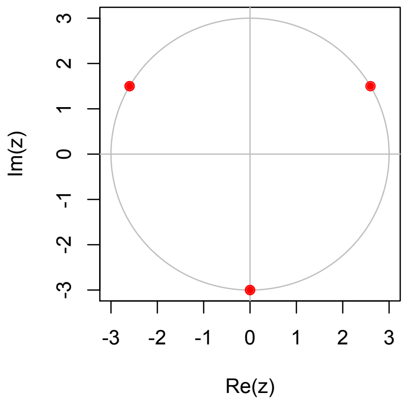

Figure 6: Le soluzioni dell'esercizio 2 (Tema 3).

Esercizio 4 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-2) - \log(x-1) + \arctan\frac{1}{x}}{\cos\sinh\frac{2}{x} - \cos\frac{\alpha}{x} - e^{-\frac{x}{2}}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Si può procedere con gli sviluppi di McLaurin, oppure usando De L'Hopital.

Con gli sviluppi di McLaurin, il numeratore diventa:

$$\begin{aligned}
\log(x-2) - \log(x-1) + \arctan\frac{1}{x} &= \log x + \log\left(1 + \frac{-2}{x}\right) - \log x - \log\left(1 + \frac{-1}{x}\right) + \arctan\frac{1}{x} \\
&= \log\left(1 - \frac{2}{x}\right) - \log\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \arctan\frac{1}{x} \\
&= \frac{-2}{x} - \frac{4}{2x^2} - \left(\frac{-1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right) + \frac{1}{x} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) \\
&= \frac{-3}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)
\end{aligned}$$

per $x \to +\infty$.

Il denominatore (ricordando che $e^{-\frac{x}{2}} = o(1/x^N)$ per $x \to +\infty$ per ogni N):

$$\begin{aligned}
\cos\sinh\frac{2}{x} - \cos\frac{\alpha}{x} - e^{-\frac{x}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}\sinh^2\frac{2}{x} + \frac{1}{24}\sinh^4\frac{2}{x} - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2x^2} + \frac{\alpha^4}{24x^4}\right) + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{6}\Big(\frac{2}{x}\Big)^3 + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)\right)^2 + \frac{2^4}{24x^4} + \frac{\alpha^2}{2x^2} - \frac{\alpha^4}{24x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big) \\
&= \big(-4+\alpha^2\big)\frac{1}{2x^2} + \Big(-\frac{2}{3} - \frac{\alpha^4}{24}\Big)\frac{1}{x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)
\end{aligned}$$

per $x \to +\infty$.

Di conseguenza,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-2)-\log(x-1)+\arctan\frac{1}{x}}{\cos\sinh\frac{2}{x}-\cos\frac{\alpha}{x}-e^{-\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to+\infty} \begin{cases} \dfrac{\frac{-3}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-4+\alpha^2\right)\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3}{4-\alpha^2} & \text{se } \alpha \neq \pm 2, \\ \dfrac{\frac{-3}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{4}{3x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)} = +\infty & \text{se } \alpha = \pm 2. \end{cases}$$

Per usare De L'Hopital, conviene cambiare variabile a $y=\frac{1}{x}$, studiare il limite per $y\to 0^+$, e notare (come sopra) che il numeratore diventa

$$\log(1-2y)-\log(1-y)+\arctan y.$$

La derivata del numeratore:

$$\frac{-2}{1-2y}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y^2} \to 0 \text{ per } y\to 0^+.$$

La derivata del denominatore:

$$-2\sin(\sinh(2y))\cosh(2y)+\alpha\sin(\alpha y)-\frac{1}{2y^2}e^{-\frac{1}{2y}},$$

che tende a zero per $y\to 0^+$ per la gerachia degli infiniti. Di conseguenza, la frazione è ancora di tipo $\frac{0}{0}$. Si procede con la seconda derivata del numeratore:

$$\frac{-4}{(1-2y)^2}+\frac{1}{(1-y)^2}-\frac{2y}{(1+y^2)^2} \to -4+1-0=-3 \quad \text{per } y\to 0^+.$$

La seconda derivata del denominatore:

$$-4\cos(\sinh(2y))\cosh^2(2y)-4\sin(\sinh(2y))\sinh(2y)+\alpha^2\cos(\alpha y)-e^{-\frac{1}{2y}}\left(\frac{1}{4y^4}-\frac{1}{y^3}\right)\to -4+\alpha^2$$

per $y\to 0^+$. Per $\alpha=\pm 2$, si osserva che (definitivamente, per $y\to 0^+$):

$$\cosh^2(2y)>1, \quad \sinh(2y)>2y, \quad \cos(2y)<\cos(\sinh(2y)).$$

Segue che $4\big(\cos(\pm 2y)-\cos(\sinh(2y))\cosh^2(2y)\big)<0$ definitivamente per $y\to 0^+$. Gli altri termini della seconda derivata del denominatore sono negativi (definitivamente per $y\to 0^+$), per cui la seconda derivata del denominatore è negativa definitivamente per $y\to 0^+$, cioè tende a 0^- per $y\to 0^+$. In conclusione, per il teorema di De L'Hopital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-2)-\log(x-1)+\arctan\frac{1}{x}}{\cos\sinh\frac{2}{x}-\cos\frac{\alpha}{x}-e^{-\frac{x}{2}}} = \begin{cases} \frac{3}{4-\alpha^2} & \text{se } \alpha\neq\pm 2, \\ +\infty & \text{se } \alpha=\pm 2. \end{cases}$$

Esercizio 5 a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha=1$.

Svolgimento. a) L'integranda $f(x)$ è continua in $]2,+\infty[$, per cui si deve controllare la convergenza sia per $x \to 2^+$ che per $x \to +\infty$. Per $x \to 2^+$,

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x+2}\,\sqrt{x-2}} \sim \frac{1}{2^{\alpha+1}} \frac{1}{\sqrt{x-2}},$$

per cui l'integrale converge per ogni α. Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}},$$

per cui l'integrale converge se e solo se $\alpha > 0$.
b) Con la sostituzione $x = 2\cosh t$, si ha (per $t > 0$)

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{2\sinh t}{(2\cosh t)(2\sinh t)}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt = \arctan e^t\big|_0^{+\infty} = \Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{4}.$$

In alternativa, con la sostituzione $y = \sqrt{x^2-4}$, seguita dalla sostituzione $z = y/2$, si ottiene,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+4}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2}\arctan z\big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2} - 0\Big) = \frac{\pi}{4}.$$

TEMA 4

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2-6|}{x+1}.$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
iii) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. $D = (-1,+\infty) \setminus \{\sqrt{6}\}$. Non ci sono simmetrie evidenti: il dominio non è simmetrico. Si ha $f(x) \geq 0$ se e solo se

$$\begin{cases} x^2 - 6 \geq x+1 \\ x > \sqrt{6}, \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} -x^2 + 6 \geq x+1 \\ x \in (1, \sqrt{6}). \end{cases}$$

Pertanto $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \in (-1, \frac{-1+\sqrt{21}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{29}}{2}, +\infty)$.
Si hanno

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to \sqrt{6}} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Siccome per gerarchia vale $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, non ci sono asintoti obliqui, ma solo due asintoti verticali.
ii) Per il teorema sulla derivata della funzione composte e sull'algebra delle derivate e poiché $g(t) = \log|t|$ è derivabile su tutto il suo dominio naturale con $\frac{dg}{dx} = \frac{1}{t}$, la funzione f è derivabile su tutto D. Siccome $f(x) = \log|x^2-6| - \log(x+1)$, si ha per ogni $x \in D$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-6} - \frac{1}{x+1} = \frac{x^2+2x+6}{(x^2-6)(x+1)}.$$

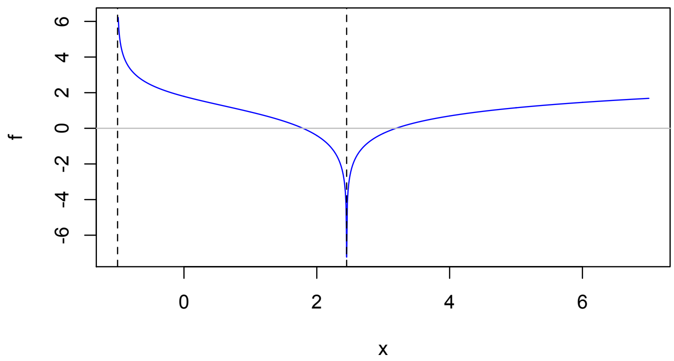

Figure 7: Il grafico di f (Tema 4).

Il polinomio al numeratore è sempre positivo; quindi $f'(x) > 0$, e conseguentemente f è crescente, se e solo se $x > \sqrt{6}$. Non ci sono punti di estremo.
iii) Il grafico di f è in figura 7.

Esercizio 2 Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{\frac{n}{3}} \tan \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.
Svolgimento. a) Siccome $a_n \sim \frac{(\sqrt[3]{e})^n}{n!}$ per $n \to \infty$, si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ per gerarchia.
b) Il criterio del confronto asintotico e il criterio del rapporto danno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{n+1}{3}}}{(n+1)!} \frac{n!}{e^{\frac{n}{3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{3}}}{n+1} = 0,$$

per cui la serie converge assolutamente e quindi converge. Il fatto che $a_n \to 0$ si poteva anche dedurre direttamente dalla convergenza della serie.

Esercizio 3 Sia $f(z) = -z^2 + \bar{z}|z|$. Risolvere l'equazione

$$zf(z) = |z|^3 + 27i,$$

esprimendo le soluzioni in forma algebrica e disegnandole nel piano di Gauss.
Svolgimento. L'equazione è

$$-z^3 + z\bar{z}|z| = |z|^3 + 27i.$$

Siccome $z\bar{z}|z| = |z|^2|z| = |z|^3$, l'equazione diventa

$$z^3 = -27i.$$

Le tre radici cubiche di $-27i = 27e^{i\pi 3/2}$ sono date da

$$3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i,\ 3e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i,\ 3e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i,$$

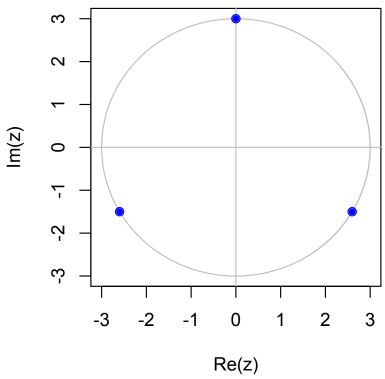

Figure 8: Le soluzioni dell'esercizio 3 (Tema 4).

rappresentate in figura 8

Esercizio 4 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3)-\log(x+1)-\tan\frac{2}{x}}{\cosh\sinh\frac{3}{x}-\cosh\frac{\alpha}{x}-e^{-3x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Vediamo il comportamento del numeratore. Per $x \to +\infty$, si ha

$$\begin{aligned}\log(x+3)-\log(x+1)-\tan\frac{2}{x} &= \log x+\log\left(1+\frac{3}{x}\right)-\log x-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\tan\frac{2}{x}\\ &= \log\left(1+\frac{3}{x}\right)-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\tan\frac{2}{x}\\ &= \frac{3}{x}-\frac{9}{2x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\\ &= -\frac{4}{x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big).\end{aligned}$$

Vediamo il comportamento del denominatore. Ricordiamo che $e^{-3x} = o(1/x^a)$ per $x \to +\infty$ per ogni a; infatti $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-3x}}{1/x^a} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^{3x}} = 0$ per gerarchia. Quindi, per $x \to +\infty$, si ha

$$\begin{aligned}\cosh\sinh\frac{3}{x}-\cosh\frac{\alpha}{x}-e^{-3x} &= \cosh\left(\frac{3}{x}+\frac{9}{2}\frac{1}{x^3}+o(x^{-4})\right)-1-\frac{\alpha^2}{2x^2}-\frac{\alpha^4}{4!x^4}+o(x^{-5})\\ &= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{9}{x^2}+\frac{27}{x^4}+o(x^{-5})\right)+\frac{1}{4!}\left(\frac{81}{x^4}+o(x^{-7})\right)+o(x^{-5})+\\ &\quad -1-\frac{\alpha^2}{2x^2}-\frac{\alpha^4}{4!x^4}+o(x^{-5})\\ &= \frac{1}{2}(9-\alpha^2)\frac{1}{x^2}+\left(\frac{135}{8}-\frac{\alpha^4}{4!}\right)\frac{1}{x^4}+o(x^{-5})\end{aligned}$$

(dove abbiamo scelto $a = 5$). Di conseguenza,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3)-\log(x+1)-\tan\frac{2}{x}}{\cosh\sinh\frac{3}{x}-\cosh\frac{\alpha}{x}-e^{-3x}} = \lim_{x\to+\infty} \begin{cases}\frac{-8}{9-\alpha^2} & \text{se } \alpha \neq \pm 3\\ -\infty & \text{se } \alpha = \pm 3,\end{cases}$$

osservando che, per $\alpha = \pm 3$, $\frac{135}{8} - \frac{\alpha^4}{4!} = \frac{27}{2} > 0$.

Esercizio 5 a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{9x^2 - 1}} \, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.
Svolgimento.

a) L'integranda $f(x)$ è continua in $]\frac{1}{3}, +\infty[$, per cui si deve controllare la convergenza sia per $x \to \frac{1}{3}^+$ che per $x \to +\infty$. Per $x \to \frac{1}{3}^+$,

$$f(x) \sim \frac{3^\alpha}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{x - \frac{1}{3}}},$$

per cui l'integrale converge per ogni α. Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{1}{3x^{\alpha+1}},$$

per cui l'integrale converge se e solo se $\alpha > 0$.
b) Con la sostituzione $3x = \cosh t$, si ha (per $t > 0$)

$$\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{9x^2 - 1}} \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh t}{\cosh t \sinh t} \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh t} \, dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1 + e^{2t}} \, dt$$
$$= 2 \lim_{b \to +\infty} \arctan e^t \Big|_0^b = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$