ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 16.02.2018

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-\frac{1}{|x-2|}} & \text{per } x \neq 2 \\ 0 & \text{per } x = 2. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. i)DOMINIO: $|x-2| \neq 0 \iff x \neq 2$, dunque $D = \mathbb{R}\backslash\{2\} \cup \{2\} = \mathbb{R}$

LIMITI:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = e^2 \cdot e^{-\infty} = e^2 \cdot 0 = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{+\infty} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$$

ASINTOTI

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

dunque non ci sono asintoti obliqui.

ii) CONTINUITÀ: La funzione è continua in $\mathbb{R}\backslash\{2\}2$ perchè composizione di continue. È continua anche per $x = 2$ poichè $\lim_{x\to 2} = 0 = f(2)$. Dunque f è continua.

iii) se $x > 2$ si ha

$$f'(x) = \left(e^{x-\frac{1}{x-2}}\right)\left(1 + \frac{1}{(x-2)^2}\right);$$

se $x < 2$ si ha

$$f'(x) = \left(e^{x+\frac{1}{x-2}}\right)\left(1 - \frac{1}{(x-2)^2}\right).$$

Dunque $f'(x) \geq 0$ se

$$\begin{cases} x > 2 \\ 1 + \frac{1}{(x-2)^2} \geq 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x < 2 \\ 1 - \frac{1}{(x-2)^2} \geq 0 \end{cases}$$

cioè se

$$\begin{aligned} x \in]2, +\infty[&\bigcup \left( ]-\infty, 2[\bigcap \{x :\ (x-2)^2 \geq 1\}\right) \\ =]2, +\infty[&\bigcup \left( ]-\infty, 2[\bigcap \{x :\ (x-2) \leq -1 \text{ oppure } (x-2) \geq 1\}\right) \end{aligned}$$

cioè se

$$x \in]2, +\infty[\bigcup\ ]-\infty, 1].$$

Inoltre, poichè

$$\lim_{x\to 2-} f'(x) = \lim_{x\to 2-} \left(e^{x+\frac{1}{x-2}}\right)\left(1-\frac{1}{(x-2)^2}\right) = -e^2 \lim_{x\to 2-} \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to 2+} f'(x) = \lim_{x\to 2+} \left(e^{x-\frac{1}{x-2}}\right)\left(1+\frac{1}{(x-2)^2}\right) = -e^2 \lim_{x\to 2+} \frac{e^{-\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2} = 0$$

si ha che f è derivabile in $x = 2$ e $f'(2) = 0$. Concludendo, f è derivabile su tutto il dominio $D = \mathbb{R}$, anzi è di classe C^1.

Dallo studio della monotonia f ha un massimo relativo in $x = 1$ e un minimo assoluto in $x = 0$.

iv) Il grafico è in figura 1.

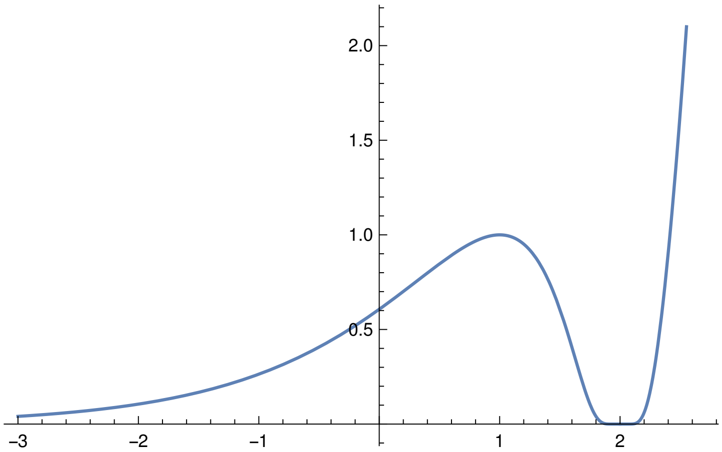

Figure 1: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{(2n+3)^2}.$$

Svolgimento. Studiamo la convergenza assoluta con il criterio della rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|2x-1|^{n+1}}{(2n+5)^2} \frac{(2n+3)^2}{|2x-1|^n} = |2x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)^2}{(2n+5)^2} = |2x-1|$$

o, alternativamente, con criterio della radice

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|2x-1|^n}{(2n+3)^2}} = \lim_{n\to\infty} |2x-1| \sqrt[n]{\frac{1}{(2n+3)^2}} = |2x-1|.$$

Pertanto la serie converge assolutamente –e quindi converge– per $0 < x < 1$ e diverge assolutamente e non converge (perché il termine generale non è infinitesimo) per $x < 0$ e per $x > 1$. Per $x = 0$ e $x = 1$ il criterio della radice e del rapporto non danno informazioni. Per $x = 0$, $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2x-1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^2},$$

rispettivamente, e dunque converge assolutamente, e quindi semplicemente, per confronto asintotico con la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Per $0 \le x < 1/2$ la convergenza semplice si può anche dedurre dal criterio di Leibniz.

Esercizio 3 Risolvere l'equazione

$$z^2\overline{z} + z\overline{z}^2 = 4\,\mathrm{Im}(iz)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.
Svolgimento. Poniamo $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. L'equazione diventa

$$2\rho^3\cos\theta = 4\rho\cos\theta.$$

Dunque, $\rho = 0$, cioè $z = 0$, oppure

$$\rho^2\cos\theta = 2\cos\theta,$$

vale a dire $\rho^2 = 2$, o $z = \pm\rho i$, $\rho > 0$. Concludendo, l' insieme delle soluzioni sul piano di Gauss è l'unione della retta verticale per l'origine e il circolo di raggio $\sqrt{2}$, rappresentate in figura 2.

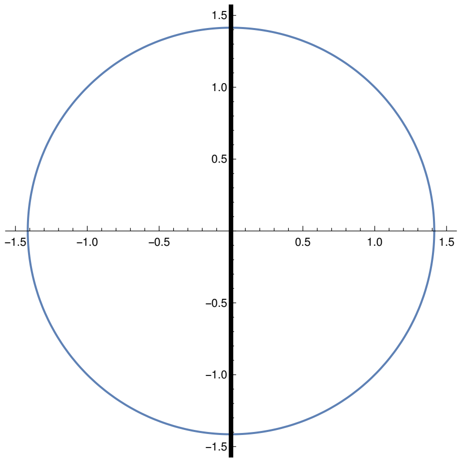

Figure 2: Le soluzioni dell'esercizio 3 (Tema 1).

Esercizio 4
a) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(4\cos x - \alpha)^2 - 4x^4}{x^4\sin^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Il denominatore è asintotico a x^6 per $x \to 0$. Il numeratore: si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}(4\cos x - \alpha)^2 - 4x^4 &= \left(4 - \alpha - 2x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right)^2 - 4x^4 \\ &= \begin{cases} 4 - \alpha + o(1) & \text{per } \alpha \neq 4 \\ 4x^4 - \frac{2x^6}{3} - 4x^4 + o(x^6) & \text{per } \alpha = 4 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4 - \alpha + o(1) & \text{per } \alpha \neq 4 \\ -\frac{2x^6}{3} + o(x^6) & \text{per } \alpha = 4. \end{cases}\end{aligned}$$

Si ha pertanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{4(\cos x-\alpha)^2-x^4}{x^4\sin^2 x}=\begin{cases}+\infty & \text{per } \alpha\neq 4\\ -\frac{2}{3} & \text{per } \alpha=4.\end{cases}$$

Esercizio 5 a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{3}} x^\alpha \sin(\sqrt{3x})\,dx$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha=\frac{1}{2}$.
Svolgimento. a) L'integranda $g(x)$ è continua nell'intervallo di integrazione, escluso al più il primo estremo. Per $x\to 0^+$ si ha

$$g(x)\sim\sqrt{3}\,x^{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

L'integrale è convergente se e solo se l'esponente è maggiore di -1, cioè se e solo se $\alpha>-\frac{3}{2}$.
b) Si ha, con la sostituzione $3x=t^2$, che dà $dx=\frac{2}{3}t\,dt$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi^2}{3}} x^{\frac{1}{2}}\sin\left(\sqrt{3x}\right)dx &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\int_0^{\pi} t^2\sin t\,dt\\ \text{(per parti)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\Big(-t^2\cos t\Big|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi} t\cos t\,dt\Big)\\ \text{(per parti)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi^2+\frac{2}{3\sqrt{3}}\Big(2t\sin t\Big|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}\sin t\,dt\Big)\\ &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\big(\pi^2-4\big).\end{aligned}$$

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x-\frac{1}{|x+2|}} & \text{per } x\neq -2\\ 0 & \text{per } x=-2.\end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) e ii) $D=\mathbb{R}$. Non ci sono simmetrie evidenti ed il segno è evidentemente positivo. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-2}f(x)=0,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

per cui f è continua in $x=-2$, giacché $f(-2)=\lim_{x\to-2}f(x)$. Siccome

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$$

per la scala degli infiniti, non ci sono asintoti obliqui.
iii) Si ha, per $x \neq -2$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-x^2-2x+1}{x+2}} & \text{per } x < -2 \\ e^{\frac{-(x+1)^2}{x+2}} & \text{per } x > -2 \end{cases}$$

per cui (si possono applicare le regole di derivazione per $x \neq -2$)

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}\, e^{\frac{-x^2-2x+1}{x+2}} & \text{per } x < -2 \\ -\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}\, e^{\frac{-(x+1)^2}{x+2}} & \text{per } x > -2. \end{cases}$$

Il segno di f' è pertanto negativo per $x < -2$ e per $x > -1$, mentre è positivo per $-2 < x < -1$. Il punto -2 è pertanto un punto di minimo locale stretto, mentre -1 è un punto di massimo locale stretto, con $f(-1) = 1$. Per studiare la derivabilità di f calcoliamo $\lim_{x\to-2} f'(x)$. Con il cambio di variabile $x+2 = y$ risulta

$$\lim_{x\to-2^-} f'(x) = \lim_{y\to 0^-} -\frac{y^2+1}{y^2} e^{\frac{-y^2+2y+1}{y}}; \quad \lim_{x\to-2^+} f'(x) = \lim_{y\to 0^+} \frac{-y^2+1}{y^2} e^{\frac{-(y-1)^2}{y}}.$$

Entrambi i limiti sono nulli per la scala degli infiniti, giacché l'argomento dell'esponenziale tende a $-\infty$.
iv) Il grafico è in figura 3.

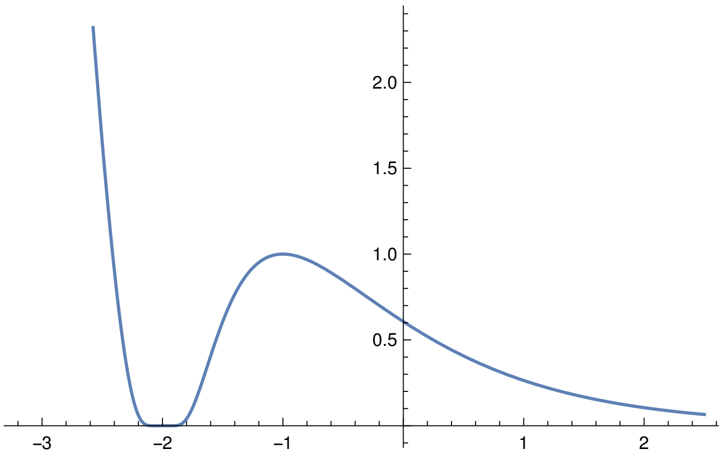

Figure 3: Il grafico di f (Tema 2).

Esercizio 2 Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(3n+2)^2}.$$

Svolgimento. Studiamo la convergenza assoluta con il criterio della radice. Risulta

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x+2|^n}{(3n+2)^2}} = |x+2|,$$

pertanto la serie converge assolutamente e quindi converge per $-3 < x < -1$ e diverge assolutamente e non converge perché il termine generale non è infinitesimo per $x < -3$ e per $x > -1$. Per $x = -3$ e $x = -1$ il criterio della radice non dà informazioni. In valore assoluto, per $x = -3$ o $x = -1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)^2},$$

che converge assolutamente e quindi converge per confronto asintotico con la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Esercizio 3 Risolvere l'equazione

$$z\bar{z}^2 - z^2\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(\bar{z} - z)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.
Svolgimento. Ricordando che $|z|^2 = z\bar{z}$, l'equazione può essere riscritta come

$$-\mathrm{Im}\big(|z|^2(z - \bar{z})\big) = 8i(z - \bar{z}).$$

Ponendo $z = x + iy$, l'equazione diventa

$$-(x^2 + y^2)\mathrm{Im}(2iy) = 8i \cdot 2iy,$$

cioè

$$-2y(x^2 + y^2) = -16y,$$

da cui $y = 0$ oppure $x^2 + y^2 = 8$. Le soluzioni sono pertanto l'asse x e la circonferenza di centro l'origine e raggio $2\sqrt{2}$, rappresentate in figura 4.

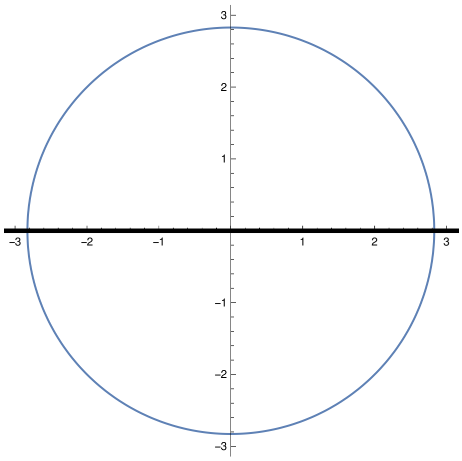

Figure 4: Le soluzioni dell'esercizio 3 (Tema 2).

Esercizio 4
a) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{4(\cosh x - \alpha)^2 - x^4}{x^4 \arctan^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Il denominatore è asintotico a x^6 per $x \to 0$. Il numeratore: si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
4(\cosh x - \alpha)^2 - x^4 &= 4\Big(1 - \alpha + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big)^2 - x^4 \\
&= \begin{cases} 4(1-\alpha)^2 + o(1) & \text{per } \alpha \neq 1 \\ 4\big(\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{24}\big) - x^4 + o(x^6) & \text{per } \alpha = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 4(1-\alpha)^2 + o(1) & \text{per } \alpha \neq 1 \\ \frac{x^6}{6} + o(x^6) & \text{per } \alpha = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Si ha pertanto
$$\lim_{x\to 0}\frac{4(\cosh x-\alpha)^2-x^4}{x^4\arctan^2 x}=\begin{cases}+\infty & \text{per } \alpha\neq 1\\ \frac{1}{6} & \text{per } \alpha=1.\end{cases}$$

Esercizio 5 a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato
$$\int_0^{\frac{\pi^3}{2}} x^{\alpha-1}\sin(\sqrt[3]{2x})\,dx$$
al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha=1$.
Svolgimento. a) L'integranda $g(x)$ è continua nell'intervallo di integrazione, escluso al più il primo estremo. Per $x\to 0^+$ si ha
$$g(x)\sim\sqrt[3]{2}\,x^{\alpha-1+\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}\,x^{\alpha-\frac{2}{3}}.$$
L'integrale è convergente se e solo se l'esponente è maggiore di -1, cioè se e solo se $\alpha>-\frac{1}{3}$.
b) Si ha, con la sostituzione $2x=t^3$, che dà $dx=\frac{3}{2}t^2\,dt$,
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi^3}{2}}\sin\left(\sqrt[3]{2x}\right)dx&=\frac{3}{2}\int_0^{\pi}t^2\sin t\,dt\\ \text{(per parti)}&=\frac{3}{2}\Big(-t^2\cos t\Big|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}t\cos t\,dt\Big)\\ \text{(per parti)}&=\frac{3}{2}\pi^2+3\Big(t\sin t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin t\,dt\Big)\\ &=\frac{3}{2}\pi^2-6.\end{aligned}$$

TEMA 3

Esercizio 1 Si consideri la funzione
$$f(x)=\begin{cases}e^{x-\frac{1}{|x-3|}} & \text{per } x\neq 3\\ 0 & \text{per } x=3\end{cases}$$
i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) $D=\mathbb{R}$. Non ci sono simmetrie evidenti ed il segno è evidentemente strettamente positivo per $x\neq 3$, mentre l'unico zero è per $x=3$. Si ha
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\quad \lim_{x\to 3}f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$
per cui f ha $y=0$ come asintoto orizzontale. Non ci sono asintoti verticali. Siccome
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$$

per la scala degli infiniti, non ci sono asintoti obliqui.
ii) Siccome f è continua in $D \setminus \{3\}$ e $\lim_{x\to 3} f(x) = 0 = f(3)$, f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-\frac{1}{3-x}} & \text{per } x < 3 \\ e^{x-\frac{1}{x-3}} & \text{per } x > 3, \end{cases}$$

per cui (si possono applicare le regole di derivazione per $x \neq 3$)

$$f'(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{(3-x)^2}\right) e^{x-\frac{1}{3-x}} & \text{per } x < 3 \\ \left(1 + \frac{1}{(x-3)^2}\right) e^{x-\frac{1}{x-3}} & \text{per } x > 3. \end{cases}$$

Il segno di f' è pertanto positivo per $x > 3$ e per $x < 2$, mentre è negativo per $2 < x < 3$. Il punto 2 è pertanto un massimo locale stretto, mentre 3 è un massimo locale stretto, con $f(2) = e$. Per studiare la derivabilità di f calcoliamo $\lim_{x\to 3} f'(x)$. Con il cambio di variabile $x - 3 = y$ risulta

$$\lim_{x\to 3^-} f'(x) = \lim_{y\to 0^-} \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) e^{(y+3)+\frac{1}{y}} \quad ; \quad \lim_{x\to 3^+} f'(x) = \lim_{y\to 0^+} \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) e^{(y+3)-\frac{1}{y}}.$$

Entrambi i limiti sono nulli per la scala degli infiniti. Quindi, f è derivabile anche in $x = 3$ con $f'(3) = 0$.
(iii) Il grafico è in figura 5.

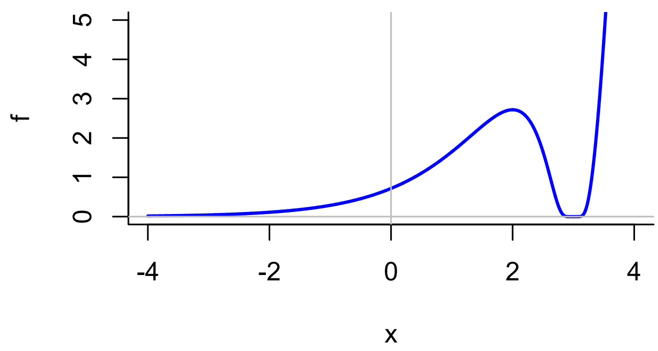

Figure 5: Il grafico di f (Tema 3).

Esercizio 2 Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{(2n+5)^2}.$$

Svolgimento. Studiamo la convergenza assoluta con il criterio del rapporto. Risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|3x+1|^{n+1}}{(2(n+1)+5)^2} \cdot \frac{(2n+5)^2}{|3x+1|^n} = |3x+1| \lim_{n\to\infty} \frac{(2+5/n)^2}{(2+7/n)^2} = |3x+1|,$$

pertanto la serie converge assolutamente e quindi converge per $|3x+1| < 1$, cioè per $-2/3 < x < 0$, e diverge assolutamente e non converge perché il termine generale non è infinitesimo per $x < -2/3$ e per

$x > 0$. Per $x = -2/3$ e $x = 0$ ($|3x+1| = 1$) il criterio del rapporto non dà informazioni. In valore assoluto, per $|3x+1| = 1$, la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)^2},$$

che converge assolutamente e quindi converge, per confronto asintotico con la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Esercizio 3 Risolvere l'equazione

$$z\bar{z}^2 - z^2\bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(\bar{z} - z)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.
Svolgimento. Ricordando che $|z|^2 = z\bar{z}$, , e $\bar{z} - z = (x - iy) - (x + iy) = -2iy = -2i\,\mathrm{Im}(z)$, l'equazione può essere riscritta come

$$-i|z|^2\,\mathrm{Im}(z) = -2i\mathrm{Im}(z).$$

L'equazione è risolta per $\mathrm{Im}(z) = 0$, ovvero per tutti gli z reali. Per z tale che $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ possiamo dividere per $\mathrm{Im}(z)$, e otteniamo

$$|z|^2 = 2.$$

ovvero $|z| = \sqrt{2}$, le cui soluzioni corrispondono alla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$. Le soluzioni sono rappresentate in figura 6.

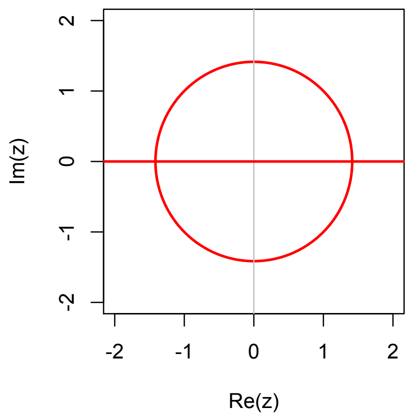

Figure 6: Le soluzioni dell'esercizio 3 (Tema 3).

Esercizio 4
a) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2} - 2\alpha)^2 - x^4}{x^4 \sinh^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Per $\alpha \neq \frac{1}{2}$, il numeratore tende a $(1 - 2\alpha)^2 > 0$, mentre il denominatore tende a 0^+. Perciò, la frazione tende a $+\infty$.

Per $\alpha = \frac{1}{2}$, applichiamo gli sviluppi di McLaurin. Il denominatore è asintotico a x^6 per $x \to 0$. Il numeratore: si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}(e^{x^2} - 1)^2 - x^4 &= (1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - 1)^2 - x^4 \\ &= x^4 + x^6 + o(x^6) - x^4 \\ &= x^6 + o(x^6)\end{aligned}$$

per cui, per $\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{x^2} - 1)^2 - x^4}{x^4 \sinh^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6 + o(x^6)}{x^6 + o(x^6)} = 1.$$

Esercizio 5 a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{8}} x^{1-\alpha} \sin(\sqrt{2x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.
Svolgimento. a) L'integranda $g(x)$ è continua nell'intervallo di integrazione, escluso al più il primo estremo. Per $x \to 0^+$ si ha

$$g(x) \sim \sqrt{2}\, x^{1-\alpha+\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\, \frac{1}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}}.$$

L'integrale è convergente se e solo se l'esponente è minore di 1, cioè se e solo se $\alpha < \frac{5}{2}$.
b) Si ha, con la sostituzione $y = \sqrt{2x}$, che dà $dx = y\, dy$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi^2}{8}} \sqrt{x} \sin(\sqrt{2x})\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{y}{\sqrt{2}} \sin(y)\, y\, dy \\ \text{(per parti)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(- y^2 \cos(y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cos y\, dy\Big) \\ \text{(per parti)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(0 + 2y \sin(y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y)\, dy\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\pi + 2\cos(y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\pi - 2\Big).\end{aligned}$$

TEMA 4

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x-\frac{1}{|x+3|}} & \text{per } x \neq -3 \\ 0 & \text{per } x = -3 \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D di f, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo

ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f'; in particolare si dica se f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) e ii) $D = \mathbb{R}$. Non ci sono simmetrie evidenti ed il segno è evidentemente positivo. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to-3} f(x) = 0, \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

per cui f è continua in $x = -3$, giacché $f(-3) = \lim_{x\to-3} f(x)$. Siccome

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

per la scala degli infiniti, non ci sono asintoti obliqui.
iii) Si ha, per $x \neq -3$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-x^2-3x+1}{x+3}} & \text{per } x < -3 \\ e^{\frac{-(x^2+3x+1)}{x+3}} & \text{per } x > -3 \end{cases}$$

per cui (si possono applicare le regole di derivazione per $x \neq -3$)

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x^2+6x+10}{(x+3)^2}\, e^{\frac{-x^2-3x+1}{x+3}} & \text{per } x < -3 \\ -\frac{x^2+6x+8}{(x+3)^2}\, e^{\frac{-(x^2+3x+1)}{x+3}} & \text{per } x > -3 \end{cases}$$

Il segno di f' è pertanto negativo per $x < -3$ e per $x > -2$, mentre è positivo per $-3 < x < -2$. Il punto -3 è pertanto un punto di minimo locale stretto, mentre -2 è un punto di massimo locale stretto, con $f(-2) = e$.

Per studiare la derivabilità di f in -3 calcoliamo con il cambio di variabile $x + 3 = y$

$$\lim_{x\to-3^+} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} = \lim_{y\to0^+} \frac{e^{-y+3}e^{-\frac{1}{y}}}{y} = e^3 \lim_{y\to0^+} \frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y} = 0$$

e

$$\lim_{x\to-3^-} \frac{f(x) - f(-3)}{x+3} = \lim_{y\to0^-} \frac{e^{-y+3}e^{\frac{1}{y}}}{y} = e^3 \lim_{y\to0^-} \frac{e^{\frac{1}{y}}}{y} = 0.$$

Entrambi i limiti sono nulli per la scala degli infiniti. Ne segue che f è derivabile anche in 3 e $f'(3) = 0$. Allo stesso modo si ottiene che $\lim_{x\to-3} f'(x) = 0$.
iv) Il grafico è in figura 7.

Esercizio 2 Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(3n+5)^2}.$$

Svolgimento. Studiamo la convergenza assoluta con il criterio della radice. Risulta

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x-3|^n}{(3n+5)^2}} = |x-3|,$$

pertanto la serie converge assolutamente e quindi converge per $2 < x < 4$ e non converge perché il termine generale non è infinitesimo per $x < 2$ e per $x > 4$. Per $x = 2$ e $x = 4$ il criterio della radice non dà informazioni. In valore assoluto, per $x = 2$ o $x = 4$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+5)^2},$$

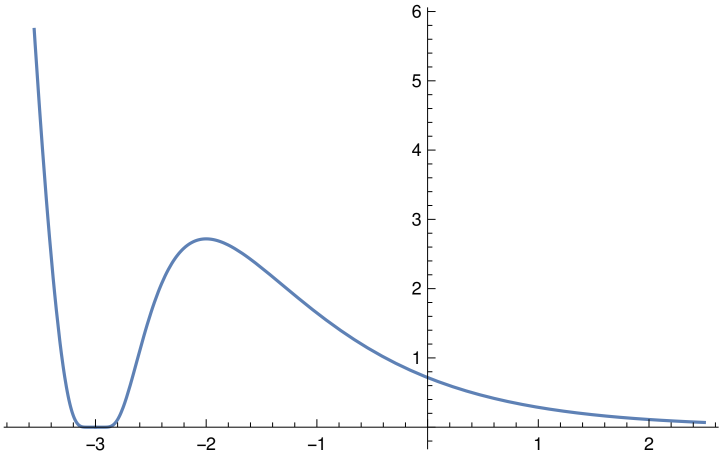

Figure 7: Il grafico di f (Tema 4).

che converge assolutamente e quindi converge per confronto asintotico con la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Esercizio 3 Risolvere l'equazione

$$\operatorname{Im}(\bar{z}^2 z - z^2 \bar{z}) = 4 \operatorname{Re}(iz)$$

e disegnarne le soluzioni sul piano di Gauss.

Svolgimento. Ricordando che $|z|^2 = z\bar{z}$ e $\bar{z} - z = (x - iy) - (x + iy) = -2iy = -2i \operatorname{Im} z$, l'equazione può essere riscritta come

$$-|z|^2 \operatorname{Im} z = -2 \operatorname{Im} z.$$

L'equazione è risolta per $\operatorname{Im} z = 0$, ovvero per tutti gli z reali. Per z tale che $\operatorname{Im} z \neq 0$ possiamo dividere per $-\operatorname{Im} z$ e otteniamo $|z|^2 = 2$, ovvero $|z| = \sqrt{2}$, le cui soluzioni corrispondono alla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$.

Esercizio 4

a) Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{2(3\alpha - e^{x^2})^2 - 2x^4}{x^4 \tan^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Il denominatore è della forma

$$x^4(x + o(x))^2 = x^4(x^2 + o(x^2)) = x^6 + o(x^6), \quad \text{per } x \to 0.$$

Al numeratore si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
2(3\alpha - e^{x^2})^2 - 2x^4 &= 2\Big(3\alpha - 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\Big)^2 - 2x^4 \\
&= \begin{cases} 2(1 - 3\alpha)^2 + o(1) & \text{per } \alpha \neq \frac{1}{3} \\ 2\big(x^4 + x^6\big) - 2x^4 + o(x^6) & \text{per } \alpha = \frac{1}{3} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2(1 - 3\alpha)^2 + o(1) & \text{per } \alpha \neq \frac{1}{3} \\ 2x^6 + o(x^6) & \text{per } \alpha = \frac{1}{3}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Si ha pertanto
$$\lim_{x\to 0} \frac{2(3\alpha - e^{x^2})^2 - 2x^4}{x^4 \tan^2 x} = \begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha \neq \frac{1}{3} \\ 2 & \text{per } \alpha = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Esercizio 5 a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato
$$\int_0^{\frac{\pi^3}{24}} x^\alpha \sin(\sqrt[3]{3x})\,dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 0$.
Svolgimento. (a) L'integranda $g(x)$ è continua nell'intervallo di integrazione, escluso al più il primo estremo. Per $x \to 0^+$ si ha
$$g(x) \sim \sqrt[3]{3}\, x^{\alpha + \frac{1}{3}}.$$
L'integrale è convergente se e solo se l'esponente è maggiore di -1, cioè se e solo se $\alpha > -\frac{4}{3}$.
(b) Si ha, con la sostituzione $3x = t^3$, che dà $dx = t^2\,dt$,
$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi^3}{24}} \sin\left(\sqrt[3]{3x}\right)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t\,dt \\ \text{(per parti)} &= -t^2 \cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt \\ \text{(per parti)} &= 2t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt \\ &= \pi + 2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2. \end{aligned}$$