ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 9.07.2018

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione
$$f(x) = \log \left|2 - 3e^{3x}\right|.$$
i) Si determini il dominio D e si studi il segno di f;
ii) si determininio i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f, determinandone gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) si disegni un grafico qualitativo di f.
Svolgimento. i) Il dominio di f è dato dalla condizione $3e^{3x} \neq 2$, cioè
$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\log \frac{2}{3}}{3}\}.$$
Il segno di f è positivo se e solo se $|2-3e^{3x}| > 1$. Elevando al quadrato si ottiene la disequazione equivalente
$$9e^{6x} - 12e^{3x} + 3 > 0.$$
Ponendo $e^{3x} = y$ e dividendo per 3, si ottiene la disequazione $3y^2-4y+1 > 0$, che ha per soluzioni $y < 1/3$, $y > 1$. Perciò $f(x) \geq 0$ se e solo se
$$x \leq \frac{-\log 3}{3} \text{ oppure } x \geq 0.$$
In alternativa: se $2 - 3e^{3x} \geq 0$, si ha:
$$|2 - 3e^{3x}| > 1 \iff 2 - 3e^{3x} > 1 \iff e^{3x} < \frac{1}{3} \iff x < \frac{1}{3}\log(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}\log 3.$$
Se invece $2 - 3e^{3x} < 0$:
$$|2 - 3e^{3x}| > 1 \iff 3e^{3x} - 2 > 1 \iff e^{3x} > 1 \iff x > \frac{1}{3}\log(1) = 0.$$
Perciò $f(x) \geq 0$ se e solo se
$$x \leq \frac{-\log 3}{3} \text{ oppure } x \geq 0.$$
ii) Si ha
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(2 - 3e^{3x}\right) = \log 2,$$
perché $\lim_{x\to-\infty} e^{3x} = 0$, quindi la retta $y = \log 2$ è un asintoto orizzontale. Inoltre
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(3e^{3x} - 2\right) = +\infty,$$
e
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(3e^{3x} - 2\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \log\left(3 - 2e^{-3x}\right)}{x} = 3,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to+\infty} \log\left(3 - 2e^{-3x}\right) = \log 3.$$

Quindi la retta $y = 3x + \log 3$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
Infine,

$$\lim_{x \to \frac{\log \frac{2}{3}}{3}} f(x) = \lim_{y \to 0^+} \log y = -\infty,$$

perciò $x = \frac{\log \frac{2}{3}}{3}$ è un asintoto verticale.
(iii) Le regole di derivazione possono essere applicate in tutto D, perché il punto nel quale l'argomento del modulo si annulla non appartiene al dominio. Ricordando che $\frac{d}{dx} \log |g(x)| = \frac{g'(x)}{g(x)}$ dove $g(x) \neq 0$, si ha per ogni $x \in D$

$$f'(x) = \frac{9e^{3x}}{3e^{3x} - 2}.$$

Siccome il numeratore è sempre positivo, $f'(x) > 0$, e quindi f è crescente, se e solo se $x > \frac{\log \frac{2}{3}}{3}$. Non ci sono punti di estremo.
(iv) Il grafico è in figura 1.

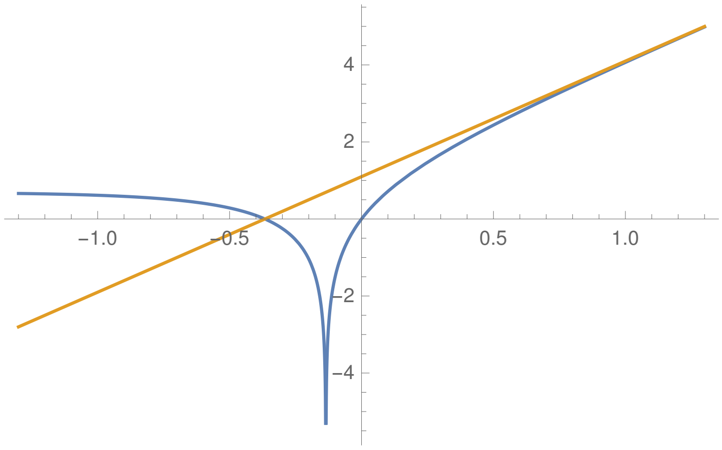

Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Risolvere la disequazione

$$|z|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \operatorname{Im}\left(\bar{z}^2\right)$$

rappresentandone le soluzioni sul piano di Gauss.
Svolgimento. Notiamo prima che bisogna avere $z \neq 0$. Poniamo $z = x + iy$. Siccome, per $z \neq 0$,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x - iy}{|z|^2}\right) = \frac{x}{|z|^2},$$

la disequazione, per $z \neq 0$, è equivalente a

$$x \leq \operatorname{Im}\left((x - iy)^2\right) = \operatorname{Im}\left(x^2 - y^2 - 2ixy\right) = -2xy,$$

che a sua volta è equivalente a

$$x(1 + 2y) \leq 0, \; x^2 + y^2 \neq 0,$$

che ha per soluzioni l'insieme

$$\left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq -\frac{1}{2}\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq -\frac{1}{2}\}\right) \setminus \{(0,0)\}.$$

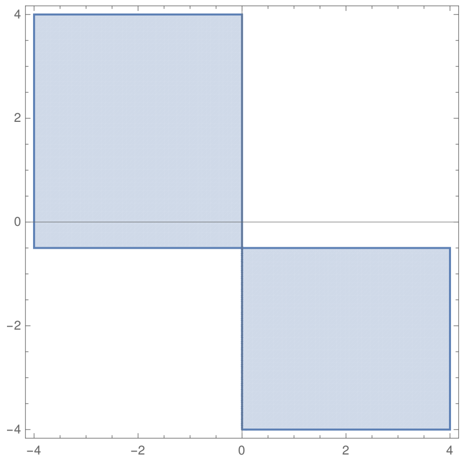

Figura 2: Le soluzioni dell'esercizio 2 (Tema 1).

Le soluzioni sono in figura 2. **NB**: $z = 0$ è da togliere!

Esercizio 3 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\log(1+x) - \log x - \frac{\alpha}{x}\right)^2}{\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)^2 + e^{-x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Per $x \to +\infty$ si ha

$$\log(1+x) - \log x - \frac{\alpha}{x} = \log x + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \log x - \frac{\alpha}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } \alpha \neq 1 \\ -\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{per } \alpha = 1. \end{cases}$$

Si ha perciò, per $x \to +\infty$,

$$\left(\log(1+x) - \log x - \frac{\alpha}{x}\right)^2 = \begin{cases} \frac{(1-\alpha)^2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{per } \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) & \text{per } \alpha = 1. \end{cases}$$

Per il denominatore si ha

$$\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)^2 + e^{-x} = \left(\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 + e^{-x} = \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

poiché $e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ per $x \to +\infty$ qualunque sia $n > 0$. Quindi si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\log(1+x) - \log x - \frac{\alpha}{x}\right)^2}{\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)^2 + e^{-x}} = \begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha \neq 1 \\ 1 & \text{per } \alpha = 1. \end{cases}$$

Esercizio 4 Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \arctan\left(\frac{2^{\alpha n}}{n}\right).$$

Svolgimento. La serie è a termini positivi. Osserviamo innanzitutto che per $\alpha > 0$ il termine generale non è infinitesimo, in quanto $\lim_{n\to\infty} 2^{\alpha n}/n = +\infty$, per cui $\lim_{n\to\infty} \arctan\left(\frac{2^{\alpha n}}{n}\right) = \pi/2$, e quindi

$$\lim_{n\to\infty} n \arctan\left(\frac{2^{\alpha n}}{n}\right) = +\infty.$$

Quindi per $\alpha > 0$ la serie diverge. Per $\alpha \leq 0$ conviene usare il criterio del confronto asintotico, che dice che la serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{2^{\alpha n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{\alpha n}.$$

Quest'ultima è la serie geometrica di ragione 2^α, che converge se e solo se $2^\alpha < 1$, quindi se e solo se $\alpha < 0$.

Esercizio 5 a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

(sugg.: cercare una decomposizione dell'integrando del tipo $\frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+2}$).
b) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \log \frac{x^\alpha + 2}{x^\alpha + 1}\, dx.$$

al variare di $\alpha > 0$.
c) Calcolarlo per $\alpha = 2$.
Svolgimento. a) Si ha

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+2} = \frac{x^2(A+B) + 2A + B}{(x^2+1)(x^2+2)},$$

da cui

$$A + B = 1,\ 2A + B = 0, \quad \text{cioè } A = -1, B = 2.$$

Perciò

$$\begin{aligned}\int f(x)\, dx &= \int \Big(\frac{-1}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+2}\Big) dx = -\arctan x + \int \frac{1}{\big(\frac{x}{\sqrt{2}}\big)^2 + 1} dx \\ &= -\arctan x + \sqrt{2} \int \frac{1}{t^2+1}\, dt = -\arctan x + \sqrt{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + k, k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

b) L'integrando è continuo in $[0, +\infty[$, per cui bisogna controllare la convergenza dell'integrale solo per $x \to +\infty$. Siccome l'integrando è positivo, usiamo il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$\log \frac{x^\alpha + 2}{x^\alpha + 1} = \log\Big(1 + \frac{2}{x^\alpha}\Big) - \log\Big(1 + \frac{1}{x^\alpha}\Big) = \frac{1}{x^\alpha} + o\Big(\frac{1}{x^\alpha}\Big)$$

per $x \to +\infty$. Quindi l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$.
c) Integrando per parti risulta

$$\begin{aligned}\int_0^c \log \frac{x^2+2}{x^2+1}\, dx &= x \log \frac{x^2+2}{x^2+1}\Big|_0^c - \int_0^c x \frac{x^2+1}{x^2+2} \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2}\, dx \\ &= c \log \frac{c^2+2}{c^2+1} - \int_0^c \frac{-2x^2}{(x^2+2)(x^2+1)}\, dx = \quad \text{[tenendo conto del calcolo fatto in a)]} \\ &= c \log \frac{c^2+2}{c^2+1} + 2\Big(-\arctan c + \sqrt{2} \arctan \frac{c}{\sqrt{2}}\Big).\end{aligned}$$

Perciò

$$\int_0^{+\infty} \log\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\left(c\log\frac{c^2+2}{c^2+1} + 2\Big(-\arctan c + \sqrt{2}\arctan\frac{c}{\sqrt{2}}\Big)\right) = \pi(\sqrt{2}-1),$$

in quanto

$$\lim_{c\to+\infty} c\log\frac{c^2+2}{c^2+1} = \lim_{c\to+\infty} c\left(\frac{1}{c^2} + o\Big(\frac{1}{c^2}\Big)\right) = 0.$$

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 9.07.2018

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left|2e^{2x} - 3\right|.$$

i) Si determini il dominio D e si studi il segno di f;
ii) si determininio i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f, determinandone gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) si disegni un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. i) Il dominio di f è dato dalla condizione $2e^{2x} \neq 3$, cioè

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\log\frac{3}{2}}{2}\}.$$

Il segno di f è positivo se e solo se $|2e^{2x} - 3| > 1$. Elevando al quadrato si ottiene la disequazione equivalente

$$4e^{4x} - 12e^{2x} + 8 > 0.$$

Ponendo $e^{2x} = y$ e dividendo per 4, si ottiene la disequazione $y^2 - 3y + 2 > 0$, che ha per soluzioni $y < 1$, $y > 2$. Perciò $f(x) \geq 0$ se e solo se

$$x \leq 0 \quad \text{oppure} \quad x \geq \frac{\log 2}{2}.$$

ii) Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\log\left(3 - 2e^{2x}\right) = \log 3,$$

perché $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$, quindi la retta $y = \log 3$ è un asintoto orizzontale. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\log\left(2e^{2x} - 3\right) = +\infty,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(2e^{2x}-3\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x + \log\left(2 - 3e^{-2x}\right)}{x} = 2,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty}\log\left(2 - 3e^{-2x}\right) = \log 2.$$

Quindi la retta $y = 2x + \log 2$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
Infine,

$$\lim_{x \to \frac{\log \frac{3}{2}}{2}} f(x) = \lim_{y \to 0^+} \log y = -\infty,$$

perciò $x = \frac{\log \frac{3}{2}}{2}$ è un asintoto verticale.
(iii) Le regole di derivazione possono essere applicate in tutto D, perché il punto nel quale l'argomento del modulo si annulla non appartiene al dominio. Ricordando che $\frac{d}{dx} \log |g(x)| = \frac{g'(x)}{g(x)}$ dove $g(x) \neq 0$, si ha per ogni $x \in D$

$$f'(x) = \frac{4e^{2x}}{2e^{2x} - 3}.$$

Siccome il numeratore è sempre positivo, $f'(x) > 0$, e quindi f è crescente, se e solo se $x > \frac{\log \frac{3}{2}}{2}$. Non ci sono punti di estremo.
(iv) Il grafico è in figura 3.

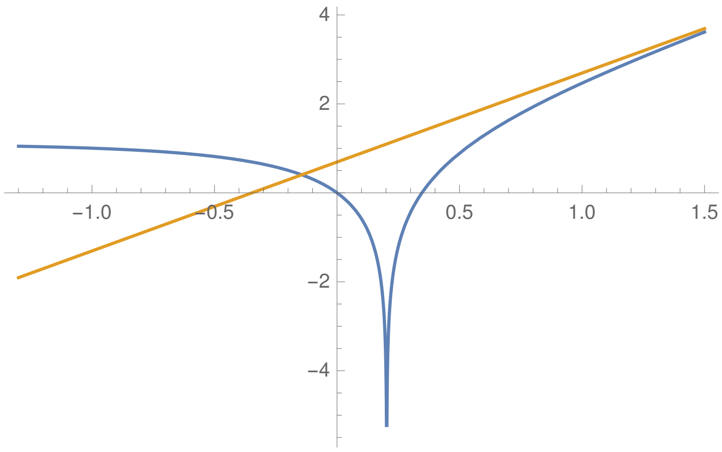

Figura 3: Il grafico di f (Tema 2).

Esercizio 2 Risolvere la disequazione

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) \geq \frac{\operatorname{Im}\left(z^2 - \bar{z}^2\right)}{|z|^2}$$

rappresentandone le soluzioni sul piano di Gauss.
Svolgimento. Notiamo prima che bisogna avere $z \neq 0$. Poniamo $z = x + iy$. Siccome, per $z \neq 0$,

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{x - iy}{|z|^2}\right) = \frac{-y}{|z|^2},$$

la disequazione, per $z \neq 0$, è equivalente a

$$-y \geq \operatorname{Im}\left(x^2 - y^2 + 2ixy - (x^2 - y^2 - 2ixy)\right) = 4xy,$$

che a sua volta è equivalente a

$$y(1 + 4x) \leq 0, \; x^2 + y^2 \neq 0,$$

che ha per soluzioni l'insieme

$$\left(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \leq -\frac{1}{4}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0, x \geq -\frac{1}{4}\}\right) \setminus \{(0, 0)\}.$$

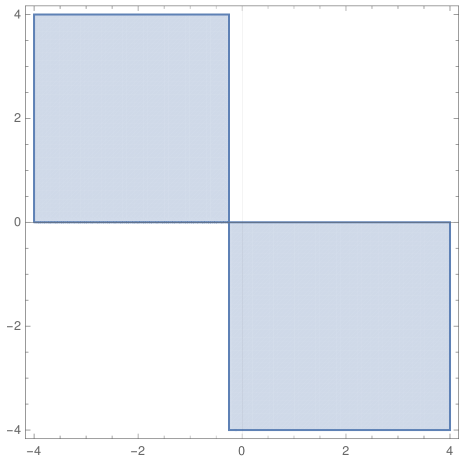

Figura 4: Le soluzioni dell'esercizio 2 (Tema 2).

Le soluzioni sono in figura 4. **NB**: $z = 0$ è da togliere!

Esercizio 3 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\cosh\frac{1}{x} - 1\right)^2 - e^{-x}}{\left(\log(2+x) - \log x + \frac{2\alpha}{x}\right)^2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Per $x \to +\infty$ si ha

$$\begin{aligned}\log(2+x) - \log x + \frac{2\alpha}{x} &= \log\frac{2+x}{x} + \frac{2\alpha}{x} = \log\left(1+\frac{2}{x}\right) + \frac{2\alpha}{x} = \frac{2}{x} - \frac{4}{2x^2} + \frac{2\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\\ &= \begin{cases} 2\frac{1+\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } \alpha \neq -1\\ -\frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{per } \alpha = -1.\end{cases}\end{aligned}$$

Si ha perciò, per $x \to +\infty$,

$$\left(\log(2+x) - \log x + \frac{2\alpha}{x}\right)^2 = \begin{cases} \frac{4(1+\alpha)^2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{per } \alpha \neq -1\\ \frac{4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) & \text{per } \alpha = -1.\end{cases}$$

Per il numeratore si ha

$$\left(\cosh\frac{1}{x} - 1\right)^2 - e^{-x} = \left(\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2 - e^{-x} = \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

poiché $e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ per $x \to +\infty$ qualunque sia $n > 0$. Quindi si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\cosh\frac{1}{x} - 1\right)^2 - e^{-x}}{\left(\log(2+x) - \log x + \frac{2\alpha}{x}\right)^2} = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha \neq -1\\ \frac{1}{16} & \text{per } \alpha = -1.\end{cases}$$

Esercizio 4 Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arctan\left(\frac{4^{\alpha n}}{n^2}\right).$$

Svolgimento. La serie è a termini positivi. Osserviamo innanzitutto che per $\alpha > 0$ il termine generale non è infinitesimo, in quanto $\lim_{n\to\infty} 4^{\alpha n}/n^2 = +\infty$, per cui $\lim_{n\to\infty} \arctan\left(\frac{4^{\alpha n}}{n^2}\right) = \pi/2$, e quindi

$$\lim_{n\to\infty} n \arctan\left(\frac{4^{\alpha n}}{n^2}\right) = +\infty.$$

Quindi per $\alpha > 0$ la serie diverge. Per $\alpha \leq 0$ conviene usare il criterio del confronto asintotico, che dice che la serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{4^{\alpha n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{\alpha n}.$$

Quest'ultima è la serie geometrica di ragione 4^α, che converge se e solo se $4^\alpha < 1$, quindi se e solo se $\alpha < 0$.

Esercizio 5 a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

(sugg.: cercare una decomposizione dell'integrando del tipo $\frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+4}$).
b) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \log \frac{x^\alpha + 4}{x^\alpha + 1}\, dx.$$

al variare di $\alpha > 0$.
c) Calcolarlo per $\alpha = 2$.
Svolgimento. a) Si ha

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+4} = \frac{x^2(A+B) + 4A + B}{(x^2+1)(x^2+2)},$$

da cui

$$A + B = 1,\ 4A + B = 0, \quad \text{cioè } A = -\frac{1}{3}, B = \frac{4}{3}.$$

Perciò

$$\int f(x)\, dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{3}}{x^2+1} + \frac{\frac{4}{3}}{x^2+4}\right) dx = -\frac{\arctan x}{3} + \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx$$
$$= -\frac{\arctan x}{3} + \frac{2}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\, dt = -\frac{\arctan x}{3} + \frac{2}{3}\arctan\frac{x}{2} + k, k \in \mathbb{R}.$$

b) L'integrando è continuo in $[0, +\infty[$, per cui bisogna controllare la convergenza dell'integrale solo per $x \to +\infty$. Siccome l'integrando ha segno costante (negativo), usiamo il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$\log\frac{x^\alpha+1}{x^\alpha+4} = \log\left(1 + \frac{1}{x^\alpha}\right) - \log\left(1 + \frac{4}{x^\alpha}\right) = -\frac{3}{x^\alpha} + o\Big(\frac{1}{x^\alpha}\Big)$$

per $x \to +\infty$. Quindi l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$.
c) Integrando per parti risulta

$$\int_0^c \log\frac{x^2+1}{x^2+4}\, dx = x\log\frac{x^2+1}{x^2+4}\Big|_0^c - \int_0^c x\frac{x^2+4}{x^2+1}\frac{2x(x^2+4) - 2x(x^2+1)}{(x^2+4)^2}\, dx$$
$$= c\log\frac{c^2+1}{c^2+4} - \int_0^c \frac{6x^2}{(x^2+2)(x^2+1)}\, dx = \quad \text{[tenendo conto del calcolo fatto in a)]}$$
$$= c\log\frac{c^2+1}{c^2+4} - 6\Big(-\frac{\arctan c}{3} + \frac{2}{3}\arctan\frac{c}{2}\Big).$$

Perciò
$$\int_0^{+\infty} \log\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\left(c\log\frac{c^2+2}{c^2+1} - 2\Big(-\arctan c + 2\arctan\frac{c}{2}\Big)\right) = -\pi,$$
in quanto
$$\lim_{c\to+\infty} c\log\frac{c^2+1}{c^2+4} = \lim_{c\to+\infty} c\left(\frac{-3}{c^2} + o\Big(\frac{1}{c^2}\Big)\right) = 0.$$