ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 17.09.2018

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{2}{|x|}}\big(2|x|-3\big) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio D, le eventuali simmetrie e studiare il segno di f;
ii) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) studiare la continuità e (facoltativo) la derivabilità di f (in particolare in $x = 0$);
v) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. i) $D = \mathbb{R}$, ovviamente e la funzione è pari. Si ha

$$f(x) \geq 0 \ \text{ se e solo se } \ |x| \geq \frac{3}{2} \text{ oppure } x = 0.$$

D'ora in poi studiamo f per $x \geq 0$.
ii) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{2}{x}}\big(2x-3\big) = +\infty.$$

Per il calcolo dell'asintoto si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{2}{x}}\frac{2x-3}{x} = 2$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \Big(2x\big(e^{-\frac{2}{x}} - 1\big) - 3e^{-\frac{2}{x}}\Big) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x\Big(-\frac{2}{x} + o\big(\frac{1}{x}\big)\Big) - 3e^{-\frac{2}{x}}\right) = -7,$$

per cui la retta $y = 2x - 7$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
iii) Per $x > 0$ si possono applicare le regole di derivazione, dato che si ha $f(x) = e^{-\frac{2}{x}}(2x-3)$. Perciò

$$f'(x) = 2e^{-\frac{2}{x}} + \frac{2e^{-\frac{2}{x}}}{x^2}(2x-3) = \frac{2e^{-\frac{2}{x}}}{x^2}(x^2+2x-3).$$

Si ha pertanto che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 + 2x - 3 \geq 0$, cioè (per $x > 0$) se e solo se $x \geq 1$. Pertanto $x = 1$ è il punto di minimo assoluto, ed è un minimo stretto, mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo stretto, in quanto $f(x) < 0 = f(0)$ per $0 < |x| < \frac{3}{2}$ (mostrato in (i)).
iv) La funzione è continua in $]0, +\infty[$ in quanto composizione di funzioni elementari. Per studiare la continuità in 0 bisogna calcolare

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{2}{x}}(2x-3) = -3\lim_{x\to0^+} e^{-\frac{2}{x}} = 0 = f(0).$$

Pertanto f è continua anche in $x = 0$. Per studiare la derivabilità in $x = 0$ si può calcolare il limite

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{2e^{-\frac{2}{x}}}{x^2}(x^2+2x-3) = -3\lim_{x\to0^+} \frac{2e^{-\frac{2}{x}}}{x^2} = 0$$

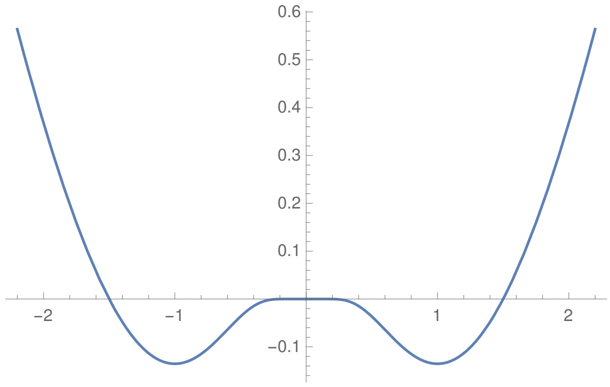

Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

per il noto confronto tra esponenziali e potenze. Pertanto f è derivabile anche in $x = 0$ (e la derivata è continua anche in $x = 0$).
v) Il grafico di f è in figura 1.

Esercizio 2 Sia

$$P_\lambda(z) = \lambda - 4iz + 2iz^2 + z^3.$$

Determinarne $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ in modo che $z = -2i$ sia uno zero di P_{λ_0}. Risolvere poi l'equazione

$$P_{\lambda_0}(z) = 0$$

esprimendone le soluzioni in forma algebrica.
Svolgimento. $P_\lambda(-2i) = \lambda - 8 - 8i + 8i$, da cui $P_\lambda(-2i) = 0$ se e solo se $\lambda = 8$. Il polinomio di cui trovare gli zeri è dunque $P_{\lambda_0}(z) = 8 - 4iz + 2iz^2 + z^3$. Siccome $z = -2i$ è uno zero di P, P è divisibile per $z + 2i$ e si ha, in particolare,

$$P_{\lambda_0}(z) = (z + 2i)(z^2 - 4i).$$

Le altre soluzioni dell'equazione $P_{\lambda_0}(z) = 0$ sono pertanto le due radici quadrate di $4i = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$, cioè sono

$$\pm 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\sqrt{2}(1 + i).$$

Esercizio 3 Discutere al variare del parametro reale α la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n + \sin n)}{n^{\frac{\alpha}{2}} + 2}$$

Svolgimento. La serie è a termini positivi e si può quindi usare il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$\log\big(n + \sin n\big) \sim \log n \text{ per } n \to \infty,$$

perché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\big(n + \sin n\big)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n + \log\Big(1 + \frac{\sin n}{n}\Big)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n + \frac{\sin n}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)}{\log n} = 1.$$

Inoltre

$$\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}} + 2} \sim \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \text{ per } n \to \infty.$$

La serie converge perciò se e solo se converge la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}.$$
Quest'ultima converge se e solo se $\frac{\alpha}{2} > 1$, cioè se e solo se $\alpha > 2$. Infatti, se $\frac{\alpha}{2} \leq 1$, il termine generale della serie è $\geq \frac{1}{n}$ e quindi la serie diverge. Se invece $\frac{\alpha}{2} > 1$ e scelgo $1 < \beta < \frac{\alpha}{2}$, allora, per $n \to \infty$,
$$\frac{\log n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} = o\Big(\frac{1}{n^{\beta}}\Big),$$
dal limite fondamentale
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{\gamma}} = 0 \text{ per ogni } \gamma > 0$$
e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\beta}}$ converge.

Esercizio 4 Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sinh x - x^{\alpha}}{\cos x - 1 + x^{\frac{7}{3}} \log x}.$$
Svolgimento. Si ha, per $x \to 0^+$,
$$x - \sinh x - x^{\alpha} = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) - x^{\alpha} \sim \begin{cases} -x^{\alpha} & \text{se } \alpha < 3 \\ -\frac{7}{6}x^3 & \text{se } \alpha = 3 \\ -\frac{x^3}{6} & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$
$$\cos x - 1 + x^{\frac{7}{3}} \log x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + x^{\frac{7}{3}} \log x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}$$
in quanto
$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{\frac{7}{3}} \log x}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \sqrt[3]{x} \log x = 0.$$
Quindi,
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sinh x - x^{\alpha}}{\cos x - 1 + x^{\frac{7}{3}} \log x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2 \\ 2 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Esercizio 5 [7 punti] Dato l'integrale
$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{\frac{\alpha}{2}} \arcsin 2x^2 \, dx,$$
a) studiarne la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 2$.
Svolgimento. a) L'integrando $g(x) = x^{\frac{\alpha}{2}} \arcsin 2x^2$ è positivo, per cui si può usare il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x \to 0^+$,
$$g(x) \sim 2x^{\frac{\alpha}{2}+2},$$
per cui l'integrale converge se e solo se $\frac{\alpha}{2} + 2 > -1$, cioè se e solo se $\alpha > -6$.
b) Si ha
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x \arcsin 2x^2 \, dx = & \text{ (per parti) } \frac{x^2}{2} \arcsin 2x^2\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{2} \frac{4x}{\sqrt{1-4x^4}} \, dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2x^3}{\sqrt{1-4x^4}} \, dx = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{1-4x^4}}{4}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}\big(2-3|x|\big) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

i) Determinarne il dominio D, le eventuali simmetrie e studiare il segno di f;
ii) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) studiare la continuità e (facoltativo) la derivabilità di f (in particolare in $x = 0$);
v) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. i) $D = \mathbb{R}$, ovviamente e la funzione è pari. Si ha

$$f(x) \geq 0 \ \text{ se e solo se } \ |x| \leq \frac{2}{3}.$$

D'ora in poi studiamo f per $x \geq 0$.
ii) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}}\big(2-3x\big) = -\infty.$$

Per il calcolo dell'asintoto si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}}\frac{2-3x}{x} = -3$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)+3x = \lim_{x\to+\infty} \Big(3x\big(1-e^{-\frac{1}{x}}\big)+2e^{-\frac{1}{x}}\Big) = \lim_{x\to+\infty} \left(3x\Big(\frac{1}{x}+o\big(\frac{1}{x}\big)\Big)+2e^{-\frac{1}{x}}\right) = 5,$$

per cui la retta $y = -3x+5$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
iii) Per $x > 0$ si possono applicare le regole di derivazione, dato che si ha $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}(2-3x)$. Perciò

$$f'(x) = -3e^{-\frac{1}{x}} + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}(2-3x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}(-3x^2-3x+2).$$

Si ha pertanto che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $3x^2+3x-2 \leq 0$, cioè (per $x > 0$) se e solo se $x \leq (-3+\sqrt{33})/6$. Pertanto $x = (-3+\sqrt{33})/6$ è il punto di massimo assoluto, ed è un massimo stretto, mentre $x = 0$ è un punto di minimo relativo stretto, in quanto $f(x) > 0 = f(0)$ per $0 < |x| < \frac{2}{3}$ (mostrato in (i)).
iv) La funzione è continua in $]0,+\infty[$ in quanto composizione di funzioni elementari. Per studiare la continuità in 0 bisogna calcolare

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x}}(2-3x) = 0 = f(0).$$

Pertanto f è continua anche in $x = 0$. Per studiare la derivabilità in $x = 0$ si può calcolare il limite

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}(-3x^2-3x+2) = 0$$

per il noto confronto tra esponenziali e potenze. Pertanto f è derivabile anche in $x = 0$ (e la derivata è continua anche in $x = 0$).
v) Il grafico di f è in figura 2.

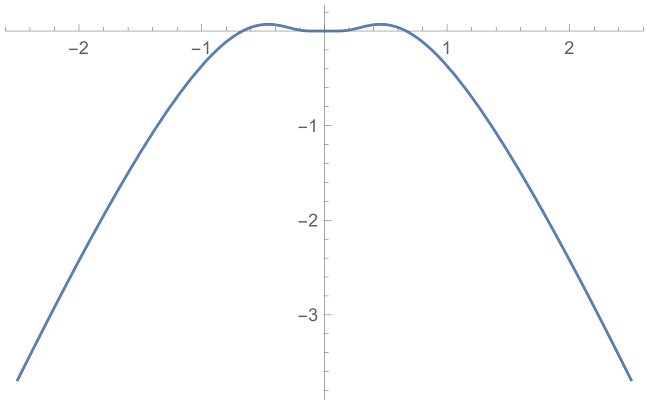

Figura 2: Il grafico di f (Tema 2).

Esercizio 2 Sia

$$P_\lambda(z) = \lambda + 2iz + 3iz^2 + z^3.$$

Determinare $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ in modo che $z = -3i$ sia uno zero di P_{λ_0}. Risolvere poi l'equazione

$$P_{\lambda_0}(z) = 0$$

esprimendone le soluzioni in forma algebrica.

Svolgimento. $P_\lambda(-3i) = \lambda + 6 - 27i + 27i$, da cui $P_\lambda(-3i) = 0$ se e solo se $\lambda = -6$. Il polinomio di cui trovare gli zeri è dunque $P_{\lambda_0}(z) = -6 + 2iz + 3iz^2 + z^3$. Siccome $z = -3i$ è uno zero di P, P è divisibile per $z + 3i$ e si ha, in particolare,

$$P_{\lambda_0}(z) = (z + 3i)(z^2 + 2i).$$

Le altre soluzioni dell'equazione $P_{\lambda_0}(z) = 0$ sono pertanto le due radici quadrate di $-2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$, cioè sono

$$\pm\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \pm(1 - i).$$

Esercizio 3 Discutere al variare del parametro reale α la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n + \cos n)}{n^{2\alpha} + 1}$$

Svolgimento. La serie è a termini positivi e si può quindi usare il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$\log\big(n + \cos n\big) \sim \log n \text{ per } n \to \infty,$$

perché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\big(n + \cos n\big)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n + \log\Big(1 + \frac{\cos n}{n}\Big)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n + \frac{\cos n}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)}{\log n} = 1.$$

Si ha anche $n^{2\alpha} + 1 \sim n^{2\alpha}$ per $n \to \infty$ quindi la serie converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{2\alpha}}.$$

Quest'ultima converge se e solo se $2\alpha > 1$, cioè se e solo se $\alpha > 1/2$ per lo stesso ragionamento visto nello svolgimento del tema 1.

Esercizio 4 Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x - x^\alpha}{\cosh x - 1 + x^{\frac{5}{2}} \log x}.$$

Svolgimento. Si ha, per $x \to 0^+$,

$$\sin x - x - x^\alpha = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) - x^\alpha \sim \begin{cases} -x^\alpha & \text{se } \alpha < 3 \\ -\frac{7}{6}x^3 & \text{se } \alpha = 3 \\ -\frac{x^3}{6} & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$

$$\cosh x - 1 + x^{\frac{5}{2}} \log x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x^{\frac{5}{2}} \log x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}$$

in quanto

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{\frac{5}{2}} \log x}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \sqrt{x} \log x = 0.$$

Quindi,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x - x^\alpha}{\cosh x - 1 + x^{\frac{5}{2}} \log x} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha < 2 \\ -2 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Esercizio 5 Dato l'integrale

$$\int_0^{\sqrt{2}} x^{2\alpha} \arcsin \frac{x^2}{2}\, dx,$$

a) studiarne la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.
Svolgimento. a) L'integrando $g(x) = x^{2\alpha} \arcsin \frac{x^2}{2}$ è positivo, per cui si può usare il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x \to 0^+$,

$$g(x) \sim \frac{x^{2\alpha+2}}{2},$$

per cui l'integrale converge se e solo se $2\alpha + 2 > -1$, cioè se e solo se $\alpha > -3/2$.
b) Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} x \arcsin \frac{x^2}{2}\, dx = \text{ (per sostituzione } t = x^2/2) &= \int_0^1 \arcsin t dt = \\ &= \text{(per parti)} = [t \arcsin t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= [t \arcsin t + \sqrt{1-t^2}]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$