ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 21.01.2019

TEMA 1

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}}, \qquad x \in D =]-\infty, -3[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x} - 1 - \sin(2x)}{\sinh^2 x + x^{\frac{9}{2}}}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (1+2i)z + 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [5+3+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1+\frac{t}{2}\right)}{t^{2\alpha}}.$$

i) Calcolare $\int_1^2 f(t)\,dt$ con $\alpha = 1$.

ii) Sia $F(x) := \int_2^x f(t)\,dt$ con $\alpha = \frac{1}{2}$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per F centrata in $x = 2$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log\alpha)^n}{1+\sqrt{2n}}$$

al variare di $\alpha \in]0, +\infty[$.

Esercizio facoltativo Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 21.01.2019

TEMA 2

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-4|}{x+1}}, \qquad x \in D =]-\infty, -1[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(3x) - \log(1+3x)}{\sin^2 x + x^{\frac{11}{2}}}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (-1-2i)z + 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [5+3+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1+\frac{t}{4}\right)}{t^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

i) Calcolare $\int_1^4 f(t)\,dt$ con $\alpha = 4$.

ii) Sia $F(x) := \int_4^x f(t)\,dt$ con $\alpha = 2$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per F centrata in $x = 4$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Svolgimento.

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\tan\alpha)^n}{\sqrt{2n}-1}$$

al variare di $\alpha \in]-\pi/2, +\pi/2[$.

Esercizio facoltativo Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 21.01.2019

TEMA 3

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-3|}{x-1}}, \qquad x \in D =]-\infty, 1[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{3x} - 1 - \sinh(3x)}{\log^2(1+x) + x^{2\pi}}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (1-2i)z - 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [5+3+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log(1+2t)}{t^{\alpha-1}}.$$

i) Calcolare $\int_1^{\frac{3}{2}} f(t)\, dt$ con $\alpha = 3$.

ii) Sia $F(x) := \int_3^x f(t)\, dt$ con $\alpha = 2$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per F centrata in $x = 3$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\, dt$.

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1 + \log \alpha)^n}{\sqrt{n} - 1}$$

al variare di $\alpha \in]0, +\infty[$.

Esercizio facoltativo Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 21.01.2019

TEMA 4

Esercizio 1 [6 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-5|}{x-2}}, \qquad x \in D =]-\infty, 2[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e abbozzarne il grafico.

Esercizio 2 [4 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(2x) - \log(1+2x)}{\arctan(x^2) + x^{2e}}.$$

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (-1+2i)z - 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

Esercizio 4 [5+3+3 punti] Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1 + \frac{t}{3}\right)}{t^{\alpha+1}}.$$

i) Calcolare $\int_1^3 f(t)\,dt$ con $\alpha = 1$.

ii) Sia $F(x) := \int_3^x f(t)\,dt$ con $\alpha = 0$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per F centrata in $x = 3$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Esercizio 5 [7 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\tan 2\alpha)^n}{1+\sqrt{n}}$$

al variare di $\alpha \in]-\pi/4, +\pi/4[$.

Esercizio facoltativo Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: 2 ore e 45 minuti.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.