ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 21.01.2019

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}}, \qquad x \in D =]-\infty, -3[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -3$;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.

Svolgimento.
i) Osserviamo che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x^2-16|}{x+3} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-3^-} \frac{|x^2-16|}{x+3} = -\infty$$

quindi con un cambio di variabile

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0, \qquad \lim_{x\to-3^-} f(x) = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$

In particolare f ha un asintoto orizzontale ($y = 0$) per $x \to -\infty$. Inoltre f può essere prolungata come funzione continua da sinistra in -3 ponendo $f(-3) = 0$.

ii) Calcoliamo, per $x \neq -4$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}} \frac{d}{dx} \frac{|x^2-16|}{x+3} = e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}} \frac{\operatorname{sgn}(x^2-16)2x(x+3) - |x^2-16|}{(x+3)^2} \\ &= e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}} \operatorname{sgn}(x^2-16) \frac{2x(x+3) - (x^2-16)}{(x+3)^2} \\ &= e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}} \operatorname{sgn}(x^2-16) \frac{x^2+6x+16}{(x+3)^2}, \end{aligned}$$

dove "sgn" indica la funzione segno.

Osservando che $e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}} > 0$ e $(x+3)^2 > 0$ per ogni $x \in D$, vogliamo valutare il segno di

$$(x^2+6x+16)\operatorname{sgn}(x^2-16)$$

Calcolando il discriminante di $x^2+6x+16$, $\Delta = 36 - 64 < 0$ si ottiene che $x^2+6x+16 > 0$ per ogni x. Inoltre

$$\operatorname{sgn}(x^2-16) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 16 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x < -4 \text{ o } x > 4.$$

Poiché ci interessano solo i valori di $x \in D$, ovvero $x < -3$, otteniamo $\operatorname{sgn}(x^2-16) > 0$ per $x < -4$ e $\operatorname{sgn}(x^2-16) < 0$ per $-4 < x < -3$. Ne risulta

$$f'(x) > 0 \text{ (e quindi } f \text{ crescente) per } x < -4, \quad f'(x) < 0 \text{ (e quindi } f \text{ decrescente) per } x \in]-4,-3[,$$

da cui segue che -4 é un punto massimo assoluto e per il teorema di Fermat, non possono esservi altri punti di estremo.

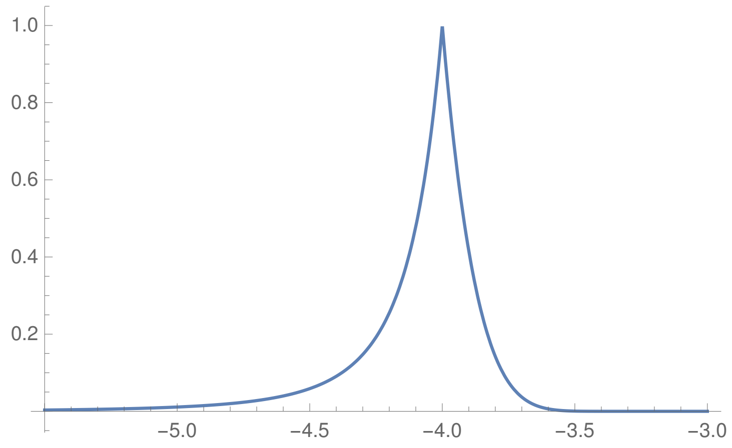

Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

Infine $x = -4$ è l'unico punto in cui f risulta non derivabile (è un punto angoloso) perché

$$\lim_{x \to -4^+} f'(x) = -8 = - \lim_{x \to -4^-} f'(x).$$

Il grafico di f è in figura 1.

Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2x} - 1 - \sin(2x)}{\sinh^2 x + x^{\frac{9}{2}}}.$$

Svolgimento. Usando gli sviluppo di Taylor $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, $\sin y = y + o(y^2)$ con $y = 2x$ otteniamo

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2), \quad \sin 2x = 2x + o(x^2), \quad \text{per } x \to 0$$

e pertanto il numeratore può essere scritto come

$$e^{2x} - 1 - \sin 2x = 2x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

Scrivendo $\sinh x = x + o(x)$ abbiamo $\sinh^2 x = (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. Inoltre, essendo $\frac{9}{2} > 2$, vale $x^{\frac{9}{2}} = o(x^2)$ per $x \to 0$. Ne segue

$$\sinh^2 x + x^{\frac{9}{2}} = x^2 + o(x^2).$$

Da cui

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1 - \sin 2x}{\sinh^2 x + x^{\frac{9}{2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 2.$$

Esercizio 3 Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (1 + 2i)z + 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

Svolgimento. Vale

$$z = \frac{-1 - 2i + \sqrt{(1 + 2i)^2 - 4i}}{2i} = \frac{-1 - 2i + \sqrt{-3}}{2i},$$

dove $\sqrt{-3}$ denota le due radici complesse di -3, che sono $\pm i\sqrt{3}$ (mentre $\sqrt{3}$ denota la radice quadrata positiva di 3). Questo si può verificare scrivendo le radici nella forma $\rho e^{i\theta}$, richiedendo che

$$3 = 3e^{i0} = \left(\rho e^{i\theta}\right)^2 = \rho^2 e^{2i\theta},$$

da cui $\rho = \sqrt{3}$ e $\theta = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$. Abbiamo dunque che le due radici sono

$$z_\pm = \frac{-1 - 2i \pm i\sqrt{3}}{2i} = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Esercizio 4
Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1 + \frac{t}{2}\right)}{t^{2\alpha}}.$$

i) Calcolare $\int_1^2 f(t)\,dt$ con $\alpha = 1$.

ii) Sia $F(x) := \int_2^x f(t)\,dt$ con $\alpha = \frac{1}{2}$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per F centrata in $x = 2$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Svolgimento. i) Integriamo per parti e otteniamo

$$\int_1^2 \frac{\log\left(1 + \frac{t}{2}\right)}{t^2} dt = -\frac{\log\left(1 + \frac{t}{2}\right)}{t}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t(2+t)} dt = -\frac{\log 2}{2} + \log\frac{3}{2} + \int_1^2 \frac{1}{t(2+t)} dt$$

Per calcolare il secondo integrale usiamo il metodo dei fratti semplici: poniamo

$$\frac{1}{t(2+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2+t} = \frac{2A + At + Bt}{t(2+t)},$$

da cui $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. In conclusione

$$\int_1^2 \frac{1}{t(2+t)} dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t} dt - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{2+t} dt = \frac{1}{2}\big(\log t - \log(2+t)\big)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}.$$

In conclusione

$$\int_1^2 \frac{\log\left(1 + \frac{t}{2}\right)}{t^2} dt = -\frac{\log 2}{2} + \log\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} = \log\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

ii) Il polinomio di Taylor è

$$T_F^{2,2}(x) = F(2) + F'(2)(x-2) + \frac{F''(2)}{2}(x-2)^2,$$

pertanto devo calcolare

$$F(0) = 0$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt = f(x) = \frac{\log\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x} \quad \Rightarrow \quad F'(2) = \frac{\log 2}{2},$$

e

$$F''(x) = f'(x) = \frac{\frac{1}{2+x}x - \log(1 + \frac{x}{2})}{x^2} \quad \Rightarrow \quad F''(2) = \frac{1}{8} - \frac{\log 2}{4}.$$

Ne segue

$$f(x) = \frac{\log 2}{2}(x-2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{\log 2}{4}\right)(x-2)^2 + o(x-2)^2$$

per $x \to 2$.

iii) Osserviamo che per $\alpha \le 0$ la funzione f è palesemente continua e limitata su $[0,1]$, per cui l'integrale esiste finito. Per $\alpha > 0$ dobbiamo valutare il comportamento asintotico di $f(t)$ per $t \to 0^+$, essendo comunque f continua e limitata su ogni intervallo $[\delta, 1]$ per ogni $0 < \delta < 1$. Abbiamo

$$f(t) = \frac{\log\left(1 + \frac{t}{2}\right)}{t^{2\alpha}} = \frac{\frac{t}{2} + o(t)}{t^{2\alpha}} \sim \frac{1}{2t^{2\alpha-1}}, \quad \text{per } t \to 0^+.$$

Per il criterio del confronto asintotico vale dunque

$$\int_0^1 f(t)dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int_0^\delta \frac{1}{2t^{2\alpha-1}}dt \text{ converge per qualche } \delta > 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 1 < 1.$$

Dunque l'integrale converge se e solo se $\alpha < 1$.

Esercizio 5 Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log \alpha)^n}{1 + \sqrt{2n}}$$

al variare di $\alpha \in]0, +\infty[$.

Svolgimento. Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{1 + \sqrt{2n}}.$$

Per $|y| < 1$ la serie converge assolutamente. Questo può essere facilmente provato usando il criterio della radice, essendo

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{|y|^n}{1 + \sqrt{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} = |y| < 1$$

oppure osservando che $n|y|^n \to 0$ per $|y| < 1$, quindi $|y|^n \le \frac{1}{n}$ definitivamente per $n \to \infty$ e visto che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(1 + \sqrt{2n})}$$

converge ($\frac{1}{n(1+\sqrt{2n})} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$) possiamo concludere usando il teorema del confronto.

Per $|y| > 1$ il termine generale della serie diverge, quindi la serie non può convergere.

Per $y = 1$ la serie diverge per confronto asintotico con la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Infine, per $y = -1$ la serie converge per il criterio di Leibniz, essendo il modulo del termine generale della serie decrescente a 0. Tuttavia, per il caso precedente, la serie non converge assolutamente.

Sostituendo $\log \alpha = y$ otteniamo che la serie originale converge assolutamente se e solo se $-1 < \log \alpha < 1$, ovvero se e solo se $\frac{1}{e} < \alpha < e$, converge semplicemente se e solo se $-1 \le \log \alpha < 1$, ovvero se e solo se $\frac{1}{e} \le \alpha < e$ e diverge in tutti gli altri casi, ovvero $0 < \alpha < \frac{1}{e}$ e $\alpha \ge e$.

Esercizio facoltativo Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Da $f''(x) = e^x - 6ax$, si ha che f è convessa se e solo se

(A) $f''(x) = e^x - 6ax \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Ora, se $a < 0$,

$$\lim_{x\to-\infty} f''(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - 66ax \geq 0 = -\infty$$

e dunque **(A)** non è verificato.

Se $a = 0$ invece **(A)** è verificato.

Se $a > 0$ studiamo la funzione $g(x) := f''(x) = e^x - 6ax$. Si ha $g'(x) = e^x - 6a \geq 0 \iff x \geq \log(6a)$. Dunque g ha un minimo assoluto in $x = \log(6a)$. Perciò **(A)** è verificata se e solo se $g(\log(6a)) = 6a - 6a\log(6a) \geq 0$, cioè se e solo se $1 - 1\log(6a) \geq 0$, quindi se e solo se $a \leq \frac{e}{6}$.

In conclusione f è convessa se e solo se $a \leq \frac{e}{6}$.

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-4|}{x+1}}, \qquad x \in D =]-\infty, -1[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -3$,
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.
Svolgimento. i) Limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2-4}{x+1}} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2\cdot 1_x}{x\cdot 1_x}} = \lim_{x\to-\infty} e^{x\cdot 1_x} = 0.$$

La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$.

$$\lim_{x\to-1-} f(x) = \lim_{x\to-1-} e^{\frac{4-x^2}{x+1}} = e^{\frac{3}{0-}} = e^{-\infty} = 0.$$

Non ci sono asintoti verticali. Essendo il limite sx in -1 finito, la funzione è prolungabile con continuità in $x = -1$ da sx.
ii) La funzione è composizione di funzioni continue ove definite, è quindi continua ove definita ed, in particolare, su D. Lo stesso si può dire per la derivabilità salvo dove $x^2 - 4 = 0$, cioè per $x = \pm 2$, ed essendo $x \in D =]-\infty, -1[$, ciò significa $x \neq -2$. La derivabilità in -2 verrà discussa in seguito. Per $x \neq -2$, osservato che $y = |y|\mathrm{sgn}\,(y)$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{|x^2-4|}{x+1}} \left(\frac{|x^2-4|}{x+1}\right)' = e^{\frac{|x^2-4|}{x+1}} \frac{\mathrm{sgn}\,(x^2-4)2x(x+1)-|x^2-4|}{(x+1)^2} \\ &= e^{\frac{|x^2-4|}{x+1}} \mathrm{sgn}\,(x^2-4)\frac{2x^2+2x-(x^2-4)}{(x+1)^2} = e^{\frac{|x^2-4|}{x+1}} \mathrm{sgn}\,(x^2-4)\frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\lim_{x\to-2-} f'(x) = e^0(+1)\frac{4}{1^2} = 4, \qquad \lim_{x\to-2+} f'(x) = e^0(-1)\frac{4}{1^2} = -4,$$

e, per un noto corollario del teorema di Lagrange, ciò significa che $\exists f'_-(-2) = 4,\ f'_+(-2) = -4$. In particolare f non è derivabile in $x = -2$ e tale punto è angoloso. È facile anche osservare che $\lim_{x\to-1-} f'(x) = 0-$, quindi l'eventuale prolungamento in -1 sarebbe anche derivabile (da sx).

Passiamo ora alla monotonia: osservato che $x^2+2x+4 = x^2+2x+1+3 = (x+1)^2+3 > 0$ per ogni x,

$$f'(x) \geq 0, \iff \mathrm{sgn}\,(x^2-4) \geq 0, \iff x^2-4 > 0, \iff |x| > 2.$$

Essendo $x \in D$, ciò accade se e solo se $x < -2$. Ne segue che $f \nearrow$ su $]-\infty, -2[$, $f \searrow$ su $]-2, -1[$. Essendo definita e continua in $x = -2$, ne segue che $x = -2$ è punto di massimo globale/assoluto per f. Non ci sono altri massimi. Osservato infine che $f > 0$ sempre su D e che $f(-\infty) = f(-1-) = 0$, si deduce che f non ammette minimi di alcun tipo.

Il grafico di f è in figura 2.

Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh 3x - \log(1+3x)}{\sin^2 x + x^{\frac{11}{2}}}.$$

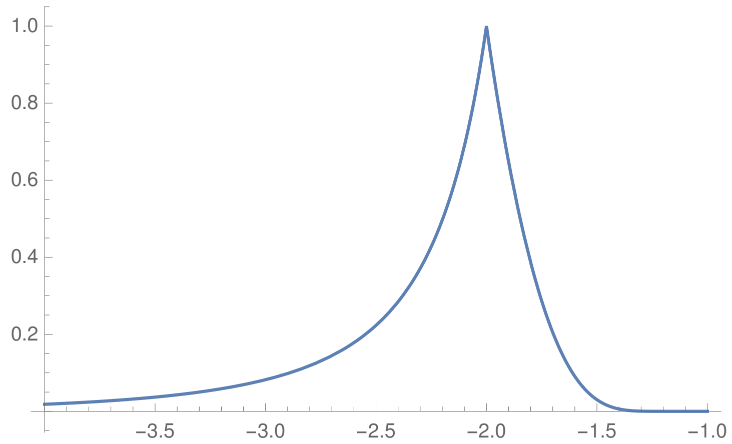

Figura 2: Il grafico di f (Tema 2).

Svolgimento. Il limite si presenta facilmente come una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Detti N, D rispettivamente numeratore e denominatore, ricordato che

$$\sinh t = t + o(t) = t + \frac{t^3}{3!} + o(t^3), \quad \log(1+t) = t + o(t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad \sin t = t + o(t) = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3),$$

si ha:

$$N(x) = \left(3x + \frac{27x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(3x - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{9}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{9}{2}x^2 \cdot 1_x,$$

e

$$D(x) = (x + o(x))^2 + x^{11/2} = x^2 + o(x^2) + x^{11/2} = x^2 + o(x^2) = x^2 \cdot 1_x,$$

essendo ovviamente $x^{11/2} = o(x^2)$. Morale:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\frac{9}{2}x^2 \cdot 1_x}{x^2 \cdot 1_x} = \frac{9}{2} \cdot 1_x \longrightarrow \frac{9}{2}.$$

Esercizio 3 Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (-1-2i)z + 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.
Svolgimento. Si tratta di un'equazione di secondo grado in z le cui soluzioni sono

$$z_{1,2} = \frac{1 + 2i \pm \sqrt{(1+2i)^2 - 4i}}{2i} = \frac{1 + 2i \pm \sqrt{-3}}{2i} = \frac{1 + 2i \pm i\sqrt{3}}{2i} = -\frac{1}{2}i + \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Esercizio 4
Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log(1 + t/4)}{t^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

i) Calcolare $\int_1^4 f(t)\,dt$ con $\alpha = 4$.

ii) Sia $F(x) := \int_4^x f(t)\,dt$ con $\alpha = 2$. Determinare il polinomio di Taylor al secondo ordine per F centrato in $x = 4$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Svolgimento. i) Calcoliamo

$$\int_1^4 \frac{\log(1+t/4)}{t^2}\,dt.$$

Notiamo che $f \in \mathscr{C}([1,4]) \subset \mathscr{R}([1,4])$ dunque f è integrabile. Inoltre, l'integrale può essere calcolato per mezzo della formula fondamentale del calcolo integrale una volta determinata una primitiva G di f:

$$\begin{aligned} G(t) &= \int f(t)\ dt = \int \tfrac{\log(1+t/4)}{t^2}\ dt = \int \left(-\tfrac{1}{t}\right)' \log(1+t/4)\ dt \\ &\overset{parti}{=} -\tfrac{1}{t}\log(1+t/4) + \tfrac{1}{4}\int \tfrac{1}{t}\tfrac{1}{1+t/4}\ dt = -\tfrac{1}{t}\log(1+t/4) + \tfrac{1}{4}\int \left(\tfrac{1}{t} - \tfrac{1}{4+t}\right)\ dt \\ &= -\tfrac{1}{t}\log(1+t/4) + \tfrac{1}{4}\left(\log|t| - \log|4+t|\right) \overset{t\in[1,4]}{=} -\tfrac{1}{t}\log(1+t/4) + \tfrac{1}{4}\left(\log t - \log(4+t)\right). \end{aligned}$$

Dunque

$$\int_1^4 f(t)\ dt = G(4) - G(1) = -\frac{1}{4}\log 2 + \log\frac{5}{4} + \frac{1}{4}\left(\log 4 - \log\frac{8}{5}\right).$$

ii) Sia $F(x) := \int_4^x f(t)\,dt$ con $\alpha = 2$, cioè

$$F(x) = \int_4^x \frac{1}{t}\log(1+t/4)\ dt.$$

Il polinomio di Taylor al secondo ordine per F centrato in $x=4$ è dato da

$$F(x) = F(4) + F'(4)(x-4) + \frac{F''(4)}{2}(x-4)^2 + o(x-4)^2,$$

per $x \to 4$, ammesso F sia due volte derivabile in $x=4$. Chiaramente $F(4)=0$. Notiamo poi che, essendo F una funzione integrale di f continua, in virtù del teorema fondamentale del calcolo integrale, F è derivabile e

$$F'(x) = f(x) = \frac{\log(1+x/4)}{x}, \quad \Longrightarrow \quad F'(4) = \frac{\log 2}{4}.$$

A questo punto, evidentemente, F' è derivabile in $x=4$ e

$$F''(x) = f'(x) = \frac{\frac{x}{4+x} - \log(1+x/4)}{x^2}, \quad \Longrightarrow \quad F''(4) = \frac{1}{32} - \frac{\log 2}{16}.$$

Da questo ora segue la conclusione, cioè

$$F(x) = \frac{\log 17}{4}(x-4) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{32} - \frac{\log 2}{16}\right)(x-4)^4 + o(x-4)^2,$$

per $x \to 4$.

iii) La funzione $f \in \mathscr{C}(]0,1])$, quindi f è localmente integrabile cioè integrabile su ogni $[r,1]$ per $r>0$. Per stabilire se esiste l'integrale generalizzato possiamo applicare il confronto asintotico: osservato che per $t \in]0,1]$ si ha banalmente $f(t) \geq 0$, e che per $t \longrightarrow 0+$,

$$f(t) = \frac{t/4 + o(t)}{t^{\alpha/2}} = \frac{t \cdot 1_t}{4t^{\alpha/2}} \sim_0 \frac{1}{4t^{\alpha/2-1}},$$

si deduce che

$$\exists \int_0 f(t)\ dt, \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2} - 1 < 1, \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < 4.$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\tan\alpha)^n}{\sqrt{2n}-1}$$

al variare di $\alpha \in]-\pi/2, +\pi/2[$.

Svolgimento. Iniziamo dalla convergenza assoluta, cioè dalla convergenza di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\tan\alpha|^n}{|\sqrt{2n}-1|}$$

Applicando il test della radice,

$$\left(\frac{|\tan\alpha|^n}{|\sqrt{2n}-1|}\right)^{1/n} = \frac{|\tan\alpha|}{2^{1/2n} n^{1/2n} 1_n} \longrightarrow |\tan\alpha|.$$

Dunque:

- se $|\tan\alpha| < 1$, cioè (essendo $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$) se $|\alpha| < \frac{\pi}{4}$, la serie converge assolutamente (quindi semplicemente);
- se $|\tan\alpha| > 1$ allora la serie diverge assolutamente ed inoltre, sempre per il test della radice, $\frac{|\tan\alpha|^n}{\sqrt{2n}-1} \longrightarrow +\infty$, quindi la condizione necessaria di convergenza non è soddisfatta e la serie non converge nemmeno semplicemente.

Nei casi $|\tan\alpha| = 1$ il test della radice fallisce, per cui procediamo per ispezione diretta.

- $\tan\alpha = 1$ se $\alpha = \frac{\pi}{4}$: in questo caso la serie iniziale è $\sum_n \frac{1}{\sqrt{2n}-1}$ il cui termine generale è asintotico evidentemente a $\frac{1/\sqrt{2}}{n^{1/2}}$, termine generale di una serie armonica divergente. Ne segue che la serie data diverge semplicemente (quindi assolutamente).
- $\tan\alpha = -1$ se $\alpha = -\frac{\pi}{4}$: in questo caso la serie iniziale è $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}-1}$. Si tratta di una serie a termini di segno alternato che facilmente converge per il test di Leibniz essendo $\frac{1}{\sqrt{2n}-1} \searrow 0$. Non si ha convergenza assoluta poiché si ricade nel caso precedente.

Esercizio facoltativo Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

Svolgimento. Essendo f due volte derivabile, f è convessa su $\mathbb{R}$ sse $f'' \geq 0$ su $\mathbb{R}$ cioè sse $e^x - 6ax \geq 0$ per ogni x in $\mathbb{R}$. Questa disequazione non è in sé elementare. Posto $g(x) := e^x - 6ax$ possiamo osservare che $g(+\infty) = +\infty$ quale che sia a mentre $g(-\infty) = +\mathrm{sgn}(a)\infty$ per $a \neq 0$. Certamente, dunque, se $a < 0$ non è possibile che sia sempre $g \geq 0$. Per $a = 0$ la cosa è ovvia. Per $a > 0$, posto che $g'(x) = e^x - 6a$ vediamo che g ha un minimo assoluto per $x = \log(6a)$ con valore minimo

$$g(\log(6a)) = 6a - 6a\log(6a) = 6a(1 - \log(6a)).$$

Di conseguenza, sarà $g \geq 0$ su tutto $\mathbb{R}$ sse $6a(1 - \log(6a)) \geq 0$ ed, essendo $a > 0$ qui, ciò significa $1 - \log(6a) \geq 0$ ovvero $\log(6a) \leq 1$, cioè $6a \leq e$ da cui infine $a \leq \frac{e}{6}$.

TEMA 3

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-3|}{x-1}}, \qquad x \in D =]-\infty, 1[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -3$,
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.
Svolgimento.
i)

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{|x^2-3|}{x-1}} = e^{\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^2-3|}{x-1}\right)} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 1-} e^{\frac{|x^2-3|}{x-1}} = e^{\left(\lim_{x\to 1-}\frac{|x^2-3|}{x-1}\right)} = e^{-\infty} = 0$$

La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$. La funzione è prolungabile per continuità in $x = 1$ in quanto esiste finito il limite. Basterà porre $f(1) := \lim_{x\to 1-} f(x) = 0$.

ii)

- $x < -\sqrt{3}$ e

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{x^2-3}{x-1}}}{(x-1)^2}(x^2-2x+3) \geq 0 \iff (x^2-2x+3) \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x \in \mathbb{R} \bigcap]-\infty, -\sqrt{3}[=]-\infty, -\sqrt{3}[$$

(mai $f'(x) > 0$).

- $1 > x > -\sqrt{3}$ e

$$f'(x) = \frac{e^{-\frac{x^2-3}{x-1}}}{(x-1)^2}(-x^2+2x-3) \geq 0 \iff (-x^2+2x-3) \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x \in \emptyset$$

Perciò la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $]-\infty, -\sqrt{3}[$ e strettamente decrescente nell'intervallo $[-\sqrt{3}, 0[$. Ne segue che essa ha un massimo assoluto in $x = \sqrt{3}$, dove vale $f(-\sqrt{3}) = 1$.

Il grafico di f è in figura 3.

Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x} - 1 - \sinh 3x}{\log^2(1+x) + x^{2\pi}}.$$

Svolgimento.

- Numeratore:

$$e^{3x} - 1 - \sinh(3x) = \frac{1}{2}(e^{3x} + e^{-3x}) - 1 = \cosh(3x) - 1 = \frac{9}{2}x^2 + o(x^3).$$

oppure

$$e^{3x} - 1 - \sinh(3x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) - 1 - 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) = \frac{9}{2}x^2 + o(x^3).$$

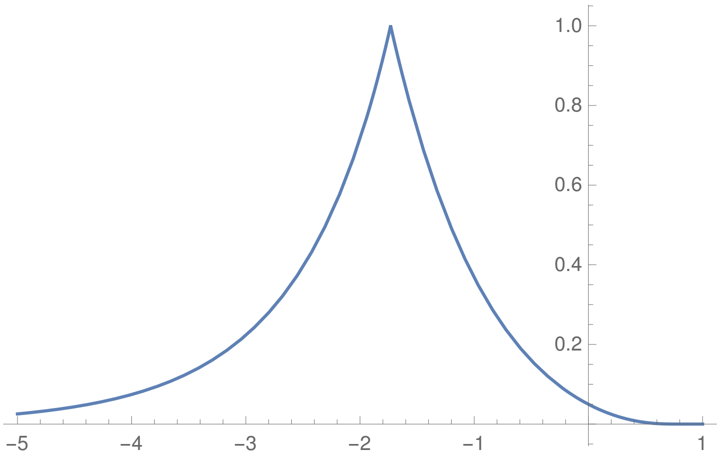

Figura 3: Il grafico di f (Tema 3).

- Denominatore:
$$\log^2(1+x) + x^{2\pi} = (x + o(x))^2 + x^{2\pi} = x^2 + o(x^2)$$

Perciò
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{3x} - 1 - \sinh(3x)}{\log^2(1+x) + x^{2\pi}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{9}{2}x^2}{x^2} = \frac{9}{2}$$

Esercizio 3 Risolvere l'equazione
$$iz^2 + (1-2i)z - 1 = 0$$
in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.
Svolgimento. Vale
$$z_i = \frac{-1 + 2i + w_k}{2i} \qquad , k = 1, 2$$
dove w_1, w_2 sono le radici quadrate di $\Delta = (1-2i)^2 + 4i = -3$, cioè $w_1 = i\sqrt{3}$ and $w_2 = -i\sqrt{3}$. Perciò
$$z_1 = \frac{-1 + 2i + i\sqrt{3}}{2i} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$
$$z_2 = \frac{-1 + 2i - i\sqrt{3}}{2i} = \frac{2 - \sqrt{3} + i}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Esercizio 4 Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e
$$f(t) := \frac{\log(1+2t)}{t^{\alpha-1}}.$$

i) Calcolare $\int_1^{\frac{3}{2}} f(t)\, dt$ con $\alpha = 3$.

ii) Sia $F(x) := \int_3^x f(t)\, dt$ con $\alpha = 2$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per F centrata in $x = 3$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\, dt$.

Svolgimento.

i) Calcoliamo una primitiva

$$\int \frac{\log(1+2t)}{t^2}dt = (per\, parti) - \frac{\log(1+2t)}{t} + \int \frac{2}{t(1+2t)}dt$$

Ora

$$\frac{2}{t(1+2t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} \implies A = 2 \quad B = -4,$$

da cui

$$\int \frac{\log(1+2t)}{t^2}dt = -\frac{\log(1+2t)}{t} + \int \left(\frac{2}{t} - \frac{4}{1+2t}\right) dt = -\frac{\log(1+2t)}{t} + 2\log t - 2\log(1+2t).$$

Ne segue che

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\log(1+2t)}{t^2}dt = \left[-\frac{\log(1+2t)}{t} + 2\log t - 2\log(1+2t)\right]_1^{\frac{3}{2}} =$$

$$-\frac{2\log(4)}{3} + \log(3) + 2\log\frac{3}{2} - 2\log\ 4 + 2\log 3 = -\frac{8}{3}\log 4 + 5\log 3 - 2\log 2$$

ii) Da

$$F(3) = 0, \qquad F'(3) = f(3) = \tfrac{\log 7}{3}$$

$$F''(x) = f'(x) = \tfrac{2}{(1+2x)x} - \tfrac{\log(1+2x)}{x^2} \implies F''(3) = \tfrac{2}{21} - \tfrac{\log 7}{9}$$

In definitiva,

$$F(x) = \frac{\log 7}{3}(x-3) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{21} - \frac{\log 7}{9}\right)(x-3)^2 + o((x-3)^2)$$

per $x \to 3$.

iii) Vicino a $t = 0$ si ha $f(t) = \frac{2t+0(2t)}{t^{\alpha-1}} \sim 2t^{2-\alpha}$ perciò $\int_0^1 f(t)dt$ converge se e solo se $\alpha - 2 < 1$, cioè $\alpha < 3$.

Esercizio 5 Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+\log\alpha)^n}{\sqrt{n}-1}$$

al variare di $\alpha \in]0, +\infty[$.

Svolgimento. Studiamo per comodità la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}-1},$$

dopodiché opereremo la sostituzione $x = (1+\log\alpha)$.

Se $|x| > 1$ la serie non converge, avendosi $\lim \frac{|x^n|}{\sqrt{n}-1} = +\infty (\neq 0)$.

Se $x = 1$ la serie si riduce alla serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}-1}$$

notoriamente non convergente.

Se $|x| < 1$, la serie converge assolutamente, in quanto maggiorata dalla serie geometrica: $\frac{|x^n|}{\sqrt{n}-1} < |x|^n$.

Se $x = -1$ la serie converge per una immediata applicazione del criterio di Leibniz.

Quindi la serie converge assolutamente per $\alpha \in]e^{-2}, 1[$, diverge assolutamente e non converge perché il termine generale non è infinitesimo in $]0, e^{-2}[\cup]1, +\infty[$, diverge per $\alpha = 1$, converge ma diverge assolutamente per $\alpha = e^{-2}$.

TEMA 4

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-5|}{x-2}}, \qquad x \in D =]-\infty, 2[.$$

i) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -3$,
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.
Svolgimento. i) Osserviamo che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x^2-5|}{x-2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{|x^2-5|}{x-2} = -\infty$$

quindi con un cambio di variabile

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0, \qquad \lim_{x\to-3^-} f(x) = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$

In particolare f ha un asintoto orizzontale ($y = 0$) per $x \to -\infty$. Inoltre f può essere prolungata per continuità in 2 ponendo $f(2) = 0$.

ii) Calcoliamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{|x^2-5|}{x-2}} \frac{\operatorname{sgn}(x^2-5)2x(x-2) - |x^2-5|}{(x-2)^2} \\ &= e^{\frac{|x^2-5|}{x-2}} \operatorname{sgn}(x^2-5) \frac{2x(x-2) - (x^2-5)}{(x-2)^2} \\ &= e^{\frac{|x^2-5|}{x-2}} \operatorname{sgn}(x^2-5) \frac{x^2-4x+5}{(x-2)^2}, \end{aligned}$$

dove "sgn" indica la funzione segno.

Osserviamo che $\frac{e^{\frac{|x^2-5|}{x-2}}}{(x+3)^2} > 0$ (ovvio) e che $x^2 - 4x + 5 > 0$ (perché ha discriminante negativo). Inoltre

$$\operatorname{sgn}(x^2-5) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\sqrt{5} \text{ o } x > \sqrt{5}.$$

Poiché ci interessano solo i valori di D, deduciamo $\operatorname{sgn}(x^2-5) > 0$ per $x < -\sqrt{5}$ e $\operatorname{sgn}(x^2-5) < 0$ per $-\sqrt{5} < x < 2$. Ne risulta

$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \text{ (e quindi } f \text{ strett. crescente) per } x < -\sqrt{5}, \\ &f'(x) < 0 \text{ (e quindi } f \text{ strett. decrescente) per } x \in]-\sqrt{5}, 2[, \end{aligned}$$

da cui segue che $-\sqrt{5}$ è un punto massimo assoluto e per il teorema di Fermat, non possono esservi altri punti di estremo.

Infine $x = -\sqrt{5}$ è l'unico punto in cui f risulta non derivabile perché il limite da destra e da sinistra di f' sono diversi.

Il grafico di f è in figura 4.

Esercizio 2 Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh 2x - \log(1+2x}{\arctan(x^2) + x^{2e}}.$$

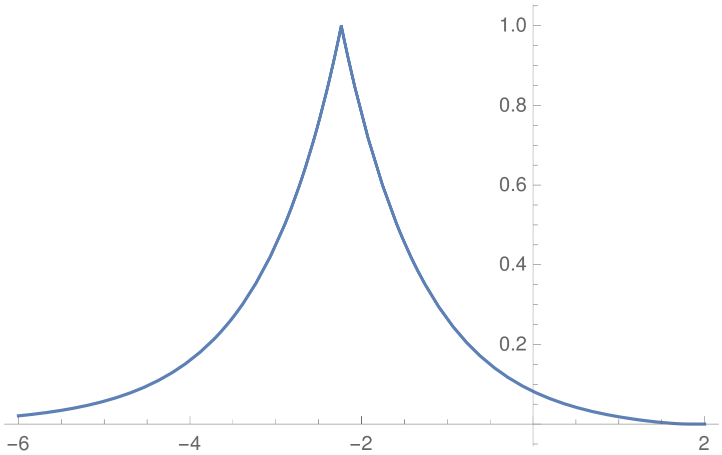

Figura 4: Il grafico di f (Tema 4).

Svolgimento. Usando gli sviluppo di Taylor, per $x \to 0^+$ otteniamo

$$\sinh 2x = 2x + o(x^2) \qquad \text{e} \qquad \log(1+2x) = 2x - 2x^2 + o(x^2);$$

il numeratore può essere scritto come: $\sinh 2x - \log(1+2x) = 2x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0^+$.

Passiamo ora allo studio del denominatore. Per gli sviluppi di Tayor abbiamo:

$$\arctan(x^2) + x^{2e} = (x^2 + o(x^2)) + x^{2e} = x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0^+,$$

osservando che $x^{2e} = o(x^2)$ per $x \to 0^+$.

In conclusione

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh 2x - \log(1+2x)}{\arctan(x^2) + x^{2e}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 2.$$

Esercizio 3 Risolvere l'equazione

$$iz^2 + (-1+2i)z - 1 = 0$$

in $z \in \mathbb{C}$, esprimendo le soluzioni in forma algebrica.

Svolgimento. Vale

$$z = \frac{1 - 2i + \sqrt{(-1+2i)^2 + 4i}}{2i} = \frac{1 - 2i + \sqrt{-3}}{2i},$$

dove $\sqrt{-3}$ denota le due radici complesse di -3, che sono $\pm i\sqrt{3}$ (mentre $\sqrt{3}$ denota la radice quadrata positiva di 3). Abbiamo dunque che le due radici sono

$$z_\pm = \frac{1 - 2i \pm i\sqrt{3}}{2i} = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

Esercizio 4

Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1 + \frac{t}{3}\right)}{t^{\alpha+1}}.$$

i) Calcolare $\int_1^3 f(t)\,dt$ con $\alpha = 1$.

ii) Sia $F(x) := \int_3^x f(t)\,dt$ con $\alpha = 1$. Determinare il polinomio di Taylor al secondo ordine per F centrato in $x = 3$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

Svolgimento. i) Integriamo per parti e otteniamo

$$\int_1^3 \frac{\log\left(1+\frac{t}{3}\right)}{t^2}dt = -\frac{\log\left(1+\frac{t}{3}\right)}{t}\Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{t(3+t)}dt = -\frac{\log 2}{3} + \log\frac{4}{3} + \int_1^3 \frac{1}{t(3+t)}dt$$

Per calcolare il secondo integrale usiamo il metodo dei fratti semplici: poniamo

$$\frac{1}{t(3+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{3+t} = \frac{3A + At + Bt}{t(2+t)},$$

da cui $A = \frac{1}{3}$ e $B = -\frac{1}{3}$. In conclusione

$$\int_1^3 \frac{1}{t(3+t)}dt = \frac{1}{3}\int_1^3 \frac{1}{t}dt - \frac{1}{3}\int_1^3 \frac{1}{3+t}dt = \frac{1}{3}\left(\log t - \log(3+t)\right)\Big|_1^3 = \frac{1}{3}\log 2.$$

In conclusione

$$\int_1^3 \frac{\log\left(1+\frac{t}{3}\right)}{t^2}dt = -\frac{\log 2}{3} + \log\frac{4}{3} + \frac{\log 2}{3} = \log\frac{4}{3}.$$

ii) La formula di Taylor del secondo ordine centrata in $x = 3$ è:

$$\begin{aligned} F(x) &= F(3) + F'(3)(x-3) + \frac{F''(3)}{2}(x-3)^2 + o(|x-3|^2) \\ &= F(3) + f(3)(x-3) + \frac{f'(3)}{2}(x-3)^2 + o(|x-3|^2) \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è data dal Teorema fondamentale del calcolo integrale. Avendo:

$$\begin{aligned} F(3) &= \int_3^3 \frac{\log\left(1+\frac{t}{3}\right)}{t}\,dt = 0 \\ F'(x) &= \frac{\log\left(1+\frac{x}{3}\right)}{x} \Rightarrow F'(3) = \frac{\log 2}{3} \\ F''(x) &= \frac{\frac{x}{x+3} - \log\left(1+\frac{x}{3}\right)}{x^2} \Rightarrow F''(3) = \frac{1-2\log 2}{18}. \end{aligned}$$

In conclusione la formula di Taylor è

$$F(x) = \frac{\log 2}{3}(x-3) + \frac{1-2\log 2}{36}(x-3)^2 + o(|x-3|^2)$$

iii) Osserviamo che per qualsiasi α la funzione f appartiene a $C^0((0,1])$ (in realtà, per $\alpha < 0$, $f \in C^0([0,1])$ e l'integrale non è improprio); quindi l'integrale può essere improprio solo in $x = 0$; inoltre $f > 0$ su $(0,1]$. Possiamo quindi applicare il teorema sul confronto asintotico. A questo scopo valutiamo il comportamento asintotico di $f(t)$ per $t \to 0^+$: abbiamo

$$f(t) = \frac{\log\left(1+\frac{t}{3}\right)}{t^{\alpha+1}} = \frac{\frac{t}{3} + o(t)}{t^{\alpha+1}} \sim \frac{1}{3}\frac{1}{t^\alpha}, \quad \text{per } t \to 0^+.$$

Per il criterio del confronto asintotico vale dunque

$$\int_0^1 f(t)dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{1}{2t^\alpha}dt \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\tan 2\alpha)^n}{1+\sqrt{n}}$$

al variare di $\alpha \in]-\pi/4, +\pi/4[$.
Svolgimento. Poniamo $\tan 2\alpha = y$. La condizione necessaria (ma non sufficiente per la convergenza della serie) è:

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{|y|^n}{1+\sqrt{n}} = (\text{per gerarchia}) = \begin{cases} +\infty & \text{se } |y| > 1 \\ 0 & \text{se } |y| \le 1. \end{cases}$$

Ne deduciamo che per $|\tan 2\alpha| = |y| > 1$, cioè per $\alpha \in (-\pi/4, -\pi/8) \cup (\pi/8, \pi/4)$ la serie non può convergere.

Passiamo ora alla convergenza assoluta studiando il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|y|^n}{1+\sqrt{n}}.$$

Trattandosi di una serie a segno positivo, possiamo applicare il criterio del rapporto. A questo scopo valutiamo il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|y|^{n+1}}{1+\sqrt{n+1}} \frac{1+\sqrt{n}}{|y|^n} = |y| \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{1+\sqrt{n+1}} = |y|.$$

Il criterio del rapporto assicura la convergenza assoluta (e coseguentemente anche quella semplice) per $|\tan 2\alpha| = |y| < 1$ cioè per $\alpha \in (-\pi/8, \pi/8)$. Rimangono da studiare i due casi $\alpha = \pm\pi/8$.
Caso: $\alpha = \pi/8$. La serie è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$$

ed in particolare è a segno costante. Poiché $\frac{1}{1+\sqrt{n}} \sim 1/\sqrt{n}$, il criterio del confronto asintotico assicura che la serie è divergente.
Caso: $\alpha = -\pi/8$. La serie è

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$$

ed in particolare è a segno alterno. Lo studio della convergenza assoluta dà esattamente la serie di $\alpha = \pi/8$ pertanto questa serie è assolutamente divergente. Vediamone la convergenza semplice con il criterio di Leibniz. Già sappiamo che la condizione necessaria è verificata; inoltre

$$\{n\} \text{ crescente } \Rightarrow \{1+\sqrt{n}\} \text{ crescente } \Rightarrow \{\frac{1}{1+\sqrt{n}}\} \text{ decrescente }.$$

Il criterio di Leibniz assicura allora che la serie è semplicemente convergente.

In conclusione la serie iniziale è assolutamente convergente se e solo se $\alpha \in (-\pi/8, \pi/8)$ mentre è convergente se e solo se $\alpha \in [-\pi/8, \pi/8)$.