ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 11.02.2019

TEMA 1

Esercizio 1. Sia
$$f(x) = |(x+3)\log(x+3)|, \qquad x \in D =]-3, +\infty[.$$
(i) Determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -3$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

Svolgimento.
(i) Con il cambio di variabile $y = x + 3$ otteniamo
$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{y\to 0^+} |y \log y| = 0.$$
Questo in particolare implica che f si può prolungare per continuità in $x = -3$ ponendo $f(-3) = 0$.
Evidentemente vale
$$\lim_{x\to\infty} |x+3| = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} |\log(x+3)| = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$
D'altronde
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x+3|}{x} |\log(x+3)| = 1 \cdot \lim_{x\to\infty} |\log(x+3)| = \infty,$$
quindi la funzione non ha un asintoto obliquo per $x \to \infty$.

(ii) Osserviamo che nel dominio D la funzione $(x+3)\log(x+3)$ si annulla solo per $x + 3 = 1$, ovvero $x = -2$. Dunque in $D \setminus \{-2\}$ la funzione f è derivabile in quanto prodotto e composizione di funzioni derivabili, e si calcola
$$f'(x) = \mathrm{sgn}((x+3)\log(x+3))((x+3)\log(x+3))' = \mathrm{sgn}((x+3)\log(x+3))(\log(x+3)+1),$$
ovvero
$$f'(x) = -(\log(x+3)+1) \text{ per } -3 < x < -2$$
$$f'(x) = \log(x+3)+1 \text{ per } x > -2.$$
Si vede facilmente che $f'(x) > 0$ per ogni $x > -2$, quindi f è strettamente monotona crescente per $x > -2$.
Per $-3 < x < -2$ vale
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log(x+3) < -1 \Leftrightarrow x + 3 < \frac{1}{e} \Leftrightarrow x < -3 + \frac{1}{e}.$$
Con analoghi calcoli si ha dunque che
$$f'(x) > 0 \text{ per } -3 < x < -3 + \frac{1}{e}, \quad f'(x) = 0 \text{ per } x = -3 + \frac{1}{e}, \quad f'(x) < 0 \text{ per } -3 + \frac{1}{e} < x < -2.$$
Ne segue che f è strettamente monotona crescente per $-3 < x < -3 + \frac{1}{e}$ e strettamente monotona decrescente per $-3 + \frac{1}{e} < x < -2$.

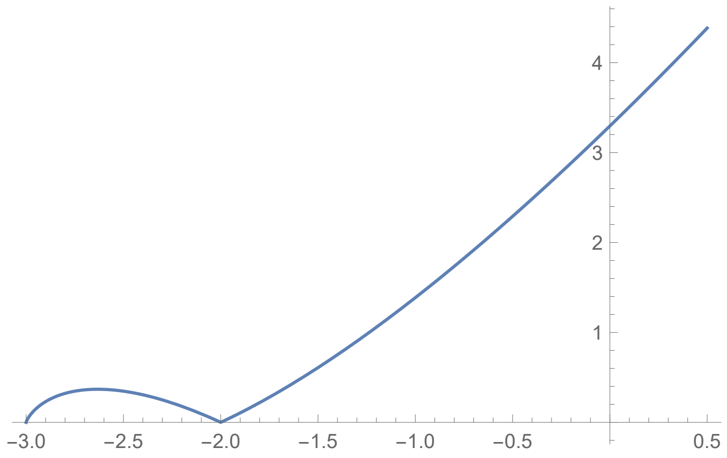

Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

Quindi $-3+\frac{1}{e}$ è un punto di massimo locale, mentre -2 è un punto di minimo assoluto (infatti $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$ e $f(-2) = 0$).

Si può facilmente osservare che

$$\lim_{x\to -2^-} f'(x) = -1, \qquad \lim_{x\to -2^+} f'(x) = 1$$

e questo (per un teorema eventualmente visto a lezione) implica che f non è derivabile per $x = -2$.

Il grafico di f è in figura 1.

Esercizio 2. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n^2)\sin n}{n^4}$$

Svolgimento. Osserviamo che $|\sin n| \leq 1$ per ogni n, e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(1+n^2)\sin n}{n^4} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |\sin n| \left| \frac{1+n^2}{n^4} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^4}.$$

Poiché abbiamo

$$\frac{1+n^2}{n^4} \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to \infty,$$

o (equivalentemente) scrivendo

$$\frac{1+n^2}{n^4} = \frac{n^2(1+o(1/n^2))}{n^4} = \frac{1+o(1)}{n^2},$$

per il criterio di convergenza asintotico deduciamo che la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^4}$$

converge, e quindi per il principio del confronto la serie originale converge assolutamente.

Esercizio 3 [4 punti] Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\left(\mathrm{Re}\,(\bar{z}+i)-1\right)^2}{4} + \frac{\left(\mathrm{Im}\,(\bar{z}+i)-1\right)^2}{4} \leq 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.

Svolgimento. Scriviamo in forma algebrica $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Dunque

$$\mathrm{Re}\,(\bar{z}+i) = \mathrm{Re}\,(x - iy + i) = x, \quad \mathrm{Im}\,(\bar{z}+i) = \mathrm{Im}\,(x - iy + i) = 1 - y.$$

La disequazione può essere pertanto riscritta come

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\left(x-1\right)^2}{4} + \frac{\left(-y\right)^2}{4} \leq 1,$$

ovvero

$$2 \leq \left(x-1\right)^2 + y^2 \leq 4.$$

Ricordando che $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ è l'equazione di una circonferenza di raggio r centrata in (x_0, y_0), otteniamo che la disequazione determina la corona circolare compresa tra le circonferenze di raggi $\sqrt{2}$ e 2 e centrate in $(1, 0)$.

Il disegno delle soluzioni è in figura 2.

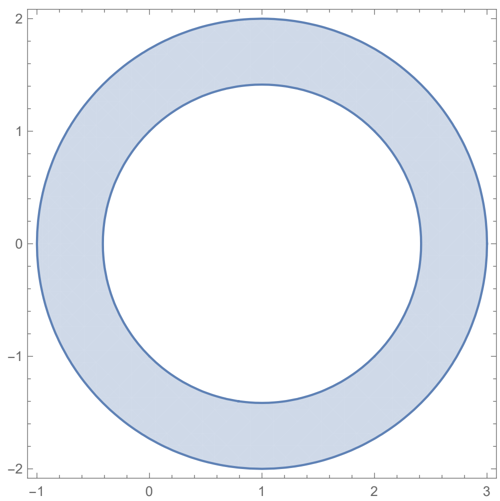

Figura 2: La soluzione dell'esercizio 3 (Tema 1).

Esercizio 4. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\,dx.$$

Svolgimento. Usando il cambio di variabile $\sqrt{2x} = y$, da cui $x = \frac{y^2}{2}$ e $dx = ydy$, otteniamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-y} y\,dy.$$

Integrando per parti si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-y} y\,dy = \left[-e^{-y} y\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy = 0 + \left[-e^{-y}\right]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

Esercizio 5. Sia
$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{2x}} - 1}{x^{\alpha-1}}.$$
(a) Si studi la convergenza dell'integrale
$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 2$, sia $F(x) = \int_1^{\cos x} f_\alpha(t)\, dt$: si calcoli $F'(\pi/3)$.

Svolgimento. (a) Osserviamo che la funzione f_α è continua per $0 < x < +\infty$. Consideriamo
$$\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx. \tag{1}$$
Essendo $e^{-\sqrt{2x}} = 1 - \sqrt{2x} + o(\sqrt{x})$ per $x \to 0$, abbiamo
$$f_\alpha(x) = \frac{-\sqrt{2x} + o(\sqrt{x})}{x^{\alpha-1}} = \frac{-\sqrt{2} + o(1)}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}} \sim \frac{-\sqrt{2}}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}},$$
quindi, per il criterio di convergenza asintotico, l'integrale in (1) converge se e solo se
$$\int_0^1 \frac{-\sqrt{2}}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}}\, dx$$
converge, ovvero (portando $-\sqrt{2}$ fuori dall'integrale) se e solo se $\alpha - \frac{3}{2} < 1$, quindi se e solo se $\alpha < \frac{5}{2}$.

Studiamo ora
$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx. \tag{2}$$
Poichè $e^{-\sqrt{2x}} \to 0$ per $x \to \infty$ abbiamo
$$f_\alpha(x) \sim \frac{-1}{x^{\alpha-1}}$$
e per il criterio asintotico di convergenza, l'integrale in (2) converge se e solo se
$$\int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^{\alpha-1}}\, dx.$$
converge, ovvero se e solo se $\alpha - 1 > 1$, quindi se e solo se $\alpha > 2$.

Quindi l'integrale originale converge se e solo se $2 < \alpha < \frac{5}{2}$.

(b) Scriviamo
$$G(y) = \int_1^y f_2(t)\, dt = \int_1^y \frac{e^{-\sqrt{2t}} - 1}{t}\, dt.$$
Per il teorema fondamentale del calcolo vale
$$G'(y) = f_2(y) = \frac{e^{-\sqrt{2y}} - 1}{y}.$$
Abbiamo $F(x) = G(\cos x)$. Per la regola della catena, quindi
$$F'(\pi/3) = G'(\cos(\pi/3))(-\sin(\pi/3)) = -\frac{\sqrt{3}}{2} G'(1/2) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{e^{-1} - 1}{1/2} = -\sqrt{3}(1 - 1/e).$$

Esercizio 6 Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha\, x) - \cosh\left(e^{2x}-1\right)}{x^3}$$
al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Ricordiamo che $\cosh y = 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, ed $e^y = 1 + y + o(y)$ per $y \to 0$, dunque possiamo espandere il numeratore come

$$\begin{aligned}
\text{Num} &= 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - \cosh\left(2x + o(x)\right) \\
&= 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - \left[1 + \frac{(2x+o(x))^2}{2} + o((x+o(x))^2)\right] \\
&= 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - \left[1 + 2x^2 + o(x^2)\right] \\
&= \frac{(\alpha^2-4)x^2}{2} + o(x^2).
\end{aligned}$$

Quindi
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha\, x) - \cosh\left(e^{2x}-1\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\alpha^2-4}{2} + o(1)}{x} = \begin{cases} -\infty & \text{per } 0 < \alpha < 2 \\ +\infty & \text{per } \alpha > 2. \end{cases}$$

Il caso $\alpha = 2$ risulta più difficile perché non è possibile calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{o(1)}{x}$. Dobbiamo pertanto ottenere un'espansione del numeratore all'ordine successivo (il terzo). Questa volta scriviamo $\cosh y = 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^3)$, ed $e^y = 1 + y + y^2 + o(y^2)$ per $y \to 0$. In particolare

$$\begin{aligned}
\cosh(e^{2x}-1) &= \cosh(2x + 2x^2 + o(x)^2) \\
&= 1 + \frac{(2x + 2x^2 + o(x)^2)^2}{2} + o((2x + 2x^2 + o(x)^2)^3) \\
&= 1 + \frac{4x^2 + 8x^3 + o(x^3)}{2} + o(x^3) \\
&= 1 + 2x^2 + 4x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Per $\alpha = 2$ abbiamo $\cosh(\alpha x) = 1 + 2x^2 + o(x^3)$, quindi

$$\text{Num} = 1 + 2x^2 + o(x^3) - (1 + 2x^2 + 4x^3 + o(x^3)) = -4x^3 + o(x^3)$$

Pertanto
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(2x) - \cosh\left(e^{2x}-1\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-4x^3 + o(x^3)}{x^3} = -4.$$

Esercizio facoltativo. Calcolare
$$\lim_{x\to +\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t \, dt.$$

Svolgimento. Essendo l'integranda continua in un intorno di $+\infty$ (in realtà in tutto $\mathbb{R}$), per il teorema del valor medio esiste $t_x \in [x, x+e^{-x}]$ tale che

$$\int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t \, dt = e^{-x}\, e^{t_x} \arctan t_x$$

e quindi, siccome l'integrando è crescente,

$$e^{-x} e^x \arctan x \le e^{-x}\, e^{t_x} \arctan t_x \le e^{-x} e^{x+e^{-x}} \arctan\left(x + e^{-x}\right),$$

cioè

$$\arctan x \leq \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t \, dt \leq e^{e^{-x}} \frac{\pi}{2}.$$

Siccome

$$\lim_{x \to +\infty} e^{e^{-x}} = 1,$$

applicando il teorema dei Carabinieri si ottiene

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

TEMA 2

Esercizio 1. Sia
$$f(x) = |(x+2)\log(x+2)|, \qquad x \in D =]-2, +\infty[.$$

(i) Determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -2$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

Svolgimento. (i) Con il cambio di variabile $y = x + 2$ otteniamo

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{y\to0^+} |y\log y| = 0.$$

Questo in particolare implica che f si può prolungare per continuità in $x = -2$ ponendo $f(-2) = 0$.

Evidentemente vale

$$\lim_{x\to\infty} |x+2| = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} |\log(x+2)| = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

D'altronde
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x+2|}{x}|\log(x+2)| = 1 \cdot \lim_{x\to\infty} |\log(x+2)| = +\infty,$$
quindi la funzione non ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

(ii) Osserviamo che nel dominio D la funzione $(x+2)\log(x+2)$ si annulla solo per $x + 2 = 1$, ovvero $x = -1$. Dunque in $D \setminus \{-1\}$ la funzione f è derivabile in quanto prodotto e composizione di funzioni derivabili, e si calcola

$$f'(x) = \operatorname{sgn}\big((x+2)\log(x+2)\big)\big((x+2)\log(x+2)\big)' = \operatorname{sgn}\big((x+2)\log(x+2)\big)(\log(x+2)+1),$$

ovvero

$$f'(x) = -(\log(x+2)+1) \text{ per } -2 < x < -1$$
$$f'(x) = \log(x+2)+1 \text{ per } x > -1.$$

Si vede facilmente che $f'(x) > 0$ per ogni $x > -1$, quindi f è strettamente monotona crescente per $x > -1$.

Per $-2 < x < -1$ vale

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log(x+2) < -1 \Leftrightarrow x + 2 < \frac{1}{e} \Leftrightarrow x < -2 + \frac{1}{e}.$$

Con analoghi calcoli si ha dunque che

$$f'(x) > 0 \text{ per } -2 < x < -2 + \frac{1}{e}, \quad f'(x) = 0 \text{ per } x = -2 + \frac{1}{e}, \quad f'(x) < 0 \text{ per } -2 + \frac{1}{e} < x < -1.$$

Ne segue che f è strettamente monotona crescente per $-2 < x < -2 + \frac{1}{e}$ e strettamente monotona decrescente per $-2 + \frac{1}{e} < x < -1$.

Quindi $-2+\frac{1}{e}$ è un punto di massimo locale, mentre -1 è un punto di minimo assoluto (infatti $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$ e $f(-1) = 0$).

Si può facilmente osservare che

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = -1, \quad \lim_{x\to-1^+} f'(x) = 1$$

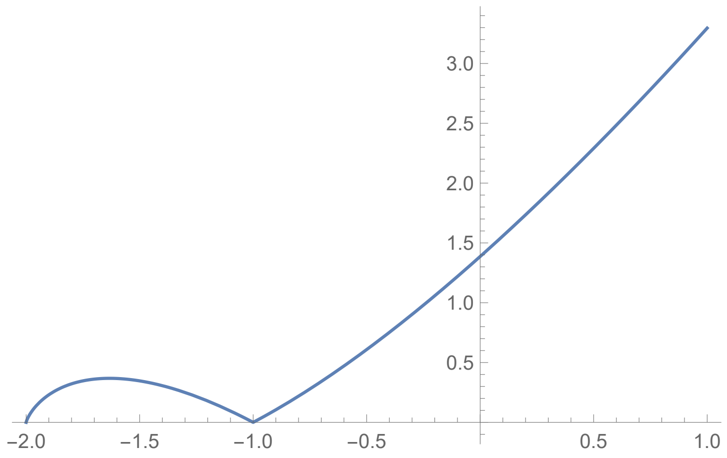

Figura 3: Il grafico di f (Tema 2).

e questo (per un teorema visto a lezione) implica che f non è derivabile per $x = -1$. Il grafico di f è in figura 3.

Esercizio 2. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 \sin n}{1 - n^5}$$

Svolgimento. Osserviamo che $|\sin n| \leq 1$ per ogni n, e quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{n^3 \sin n}{1 - n^5} \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^5 - 1}.$$

Poiché abbiamo

$$\frac{n^3}{n^5 - 1} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to \infty,$$

per il criterio di convergenza asintotico deduciamo che la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^5 - 1}$$

converge, e quindi per il principio del confronto la serie originale converge assolutamente.

Esercizio 3. Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\left(\mathrm{Re}\,(\bar{z} + 2i) - 1\right)^2}{9} + \frac{\left(\mathrm{Im}\,(\bar{z} + 2i) - 1\right)^2}{9} \leq 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.
Svolgimento. Scriviamo in forma algebrica $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Dunque

$$\mathrm{Re}\,(\bar{z} + 2i) = \mathrm{Re}\,(x - iy + 2i) = x, \quad \mathrm{Im}\,(\bar{z} + 2i) = \mathrm{Im}\,(x - iy + 2i) = 2 - y.$$

La disequazione può essere pertanto riscritta come

$$\frac{1}{3} \leq \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(1-y)^2}{9} \leq 1,$$

ovvero
$$3 \le \big(x-1\big)^2 + (y-1)^2 \le 9.$$
Ricordando che $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ è l'equazione di una circonferenza di raggio r centrata in (x_0, y_0), otteniamo che la disequazione determina la corona circolare compresa tra le circonferenze di raggi $\sqrt{3}$ e 3 e centrate in $(1,1)$. Il disegno delle soluzioni è del tutto analogo alla figura 2.

Esercizio 4. Calcolare
$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{3x}}\, dx.$$
Svolgimento. Usando il cambio di variabile $\sqrt{3x} = y$, da cui $x = \frac{y^2}{3}$ e $dx = \frac{2}{3} y dy$, otteniamo
$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{3x}}\, dx = \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} e^{-y} y\, dy.$$
Integrando per parti si ha
$$\frac{2}{3}\int_0^{+\infty} e^{-y} y\, dy = \frac{2}{3}\big[-e^{-y} y\big]_0^{+\infty} + \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} e^{-y}\, dy = \frac{2}{3}\big(0 + \big[-e^{-y}\big]_0^{+\infty}\big) = \frac{2}{3}.$$

Esercizio 5. Sia
$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{3x}} - 1}{x^{2\alpha+1}}.$$
(a) Si studi la convergenza dell'integrale
$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 0$, sia $F(x) = \int_1^{\sin x} f_\alpha(t)\, dt$: si calcoli $F'(\pi/6)$.
Svolgimento. (a) Osserviamo che la funzione f_α è continua per $0 < x < +\infty$. Consideriamo
$$\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx. \tag{3}$$
Essendo $e^{-\sqrt{3x}} = 1 - \sqrt{3x} + o(\sqrt{x})$ per $x \to 0$, abbiamo
$$f_\alpha(x) = \frac{-\sqrt{3x} + o(\sqrt{x})}{x^{2\alpha+1}} = \frac{-\sqrt{3} + o(1)}{x^{2\alpha+\frac{1}{2}}} \sim \frac{-\sqrt{3}}{x^{2\alpha+\frac{1}{2}}}.$$
quindi, per il criterio di convergenza asintotico, l'integrale in (3) converge se e solo se
$$\int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha+\frac{1}{2}}}\, dx$$
converge, ovvero se e solo se $2\alpha + \frac{1}{2} < 1$, quindi se e solo se $\alpha < \frac{1}{4}$.

Studiamo ora
$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx. \tag{4}$$
Poichè $e^{-\sqrt{3x}} \to 0$ per $x \to \infty$ abbiamo
$$f_\alpha(x) \sim \frac{-1}{x^{2\alpha+1}}$$

e per il criterio asintotico di convergenza, l'integrale in (4) converge se e solo se

$$\int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^{2\alpha+1}}\, dx.$$

converge, ovvero se e solo se $2\alpha + 1 > 1$, quindi se e solo se $\alpha > 0$.

Quindi l'integrale originale converge se e solo se $0 < \alpha < \frac{1}{4}$.

(b) Scriviamo

$$G(y) = \int_1^y f_0(t)\, dt = \int_1^y \frac{e^{-\sqrt{3t}} - 1}{t}\, dt.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo vale

$$G'(y) = f_0(y) = \frac{e^{-\sqrt{3y}} - 1}{y}.$$

Abbiamo $F(x) = G(\sin x)$. Per la regola della catena, quindi

$$F'(\pi/6) = G'(\sin(\pi/6)) \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} G'(1/2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{e^{-\sqrt{3/2}} - 1}{1/2} = \sqrt{3}\big(e^{-\sqrt{3/2}} - 1\big).$$

Esercizio 6. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\alpha\, x) - \cos\log\big(1 + 5x\big)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Ricordiamo che $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, e $\log(1+y) = 1 + y + o(y)$ per $y \to 0$, dunque possiamo espandere il numeratore come

$$\begin{aligned}
\text{Num} &= 1 - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - \cos(5x + o(x)) \\
&= 1 - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - \left[1 + \frac{(5x + o(x))^2}{2} + o((x + o(x))^2)\right] \\
&= 1 - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - \big[1 - 25x^2 + o(x^2)\big] \\
&= \frac{(-\alpha^2 + 25)x^2}{2} + o(x^2).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\alpha\, x) - \cos\log\big(1 + 5x\big)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-\alpha^2+25}{2} + o(1)}{x} = \begin{cases} +\infty & \text{per } 0 < \alpha < 5 \\ -\infty & \text{per } \alpha > 5. \end{cases}$$

Il caso $\alpha = 5$ risulta più difficile perché non è possibile calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{o(1)}{x}$. Dobbiamo pertanto ottenere un'espansione del numeratore all'ordine successivo (il terzo). Questa volta scriviamo $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^3)$, e $\log(1 + y) = 1 + y - y^2/2 + o(y^2)$, per $y \to 0$. In particolare

$$\begin{aligned}
\cos\log\big(1 + 5x\big) &= \cos\big(5x - \frac{25}{2}x^2 + o(x)^2\big) \\
&= 1 - \frac{(5x - \frac{25}{2}x^2 + o(x)^2)^2}{2} + o((2x + 2x^2 + o(x)^2)^3) \\
&= 1 - \frac{25x^2 - 125x^3 + o(x^3)}{2} + o(x^3) \\
&= 1 - \frac{25}{2}x^2 + \frac{125}{2}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Per $\alpha = 5$ abbiamo $\cos(\alpha x) = 1 - \frac{25}{2}x^2 + o(x^3)$, quindi

$$\text{Num} = 1 - \frac{25}{2}x^2 + o(x^3) - \Big(1 - \frac{25}{2}x^2 + \frac{125}{2}x^3 + o(x^3)\Big) = -\frac{125}{2}x^3 + o(x^3)$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\alpha\, x) - \cos\log\big(1+5x\big)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{125}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{125}{2}.$$

Esercizio facoltativo. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\, dt.$$

Per lo svolgimento v. il Tema 1.

TEMA 3

Esercizio 1. Sia

$$f(x) = |(x+1)\log(x+1)|, \qquad x \in D =]-1, +\infty[.$$

(i) Determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -1$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.
Svolgimento.
(i) Con il cambio di variabile $y = x + 1$ e poi per gerarchia otteniamo

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{y\to 0^+} |y \log y| = 0.$$

Questo in particolare implica che f è prolungabile per continuità in $x = -1$ ponendo $f(-1) = 0$. Dall'altra parte abbiamo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ in quanto prodotto di due infiniti. Inoltre abbiamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} \log(x+3) = 1 \cdot \lim_{x\to+\infty} \log(x+3) = +\infty,$$

quindi la funzione non ha un asintoto obliquo per $x \to \infty$.

(ii) Osserviamo che nel dominio D la funzione $(x+1)\log(x+1)$ si annulla solo per $\log(x+1) = 0$, cioè per $x + 1 = 1$ che equivale a $x = 0$. Dunque in $D \setminus \{-2\}$ la funzione f è derivabile in quanto prodotto e composizione di funzioni derivabili mentre rimane da studiarne la derivabilità in $x = 0$. Si calcola

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{sgn}((x+1)\log(x+1))((x+1)\log(x+1))' = \operatorname{sgn}((x+1)\log(x+1))(\log(x+1)+1) \\ &= \begin{cases} -(\log(x+1)+1) & \text{per } -1 < x < 0 \\ \log(x+1)+1 & \text{per } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Si vede facilmente che $f'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, quindi f è strettamente monotona crescente per $x > 0$. Per $-1 < x < 0$ vale

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log(x+1) < -1 \Leftrightarrow x + 1 < \frac{1}{e} \Leftrightarrow x < -1 + \frac{1}{e}.$$

Con analoghi calcoli si ha dunque che

$$f'(x) > 0 \text{ per } -1 < x < -1 + \frac{1}{e}, \quad f'(x) = 0 \text{ per } x = -1 + \frac{1}{e}, \quad f'(x) < 0 \text{ per } -1 + \frac{1}{e} < x < 0.$$

Ne segue che f è strettamente monotona crescente per $-1 < x < -1 + \frac{1}{e}$ e strettamente monotona decrescente per $-1 + \frac{1}{e} < x < 0$.

Quindi $-1 + \frac{1}{e}$ è un punto di massimo locale, mentre 0 è un punto di minimo assoluto (infatti $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$ e $f(-2) = 0$).

Si può facilmente osservare che

$$\lim_{x\to -2^-} f'(x) = -1, \qquad \lim_{x\to -2^+} f'(x) = 1$$

e questo (per un teorema eventualmente visto a lezione) implica che f non è derivabile per $x = 0$.

Inoltre abbiamo $\lim_{x\to -1^+} f'(x) = +\infty$ che implica che la funzione prolungata non è derivabile in -1.

Il grafico di f è in figura 4.

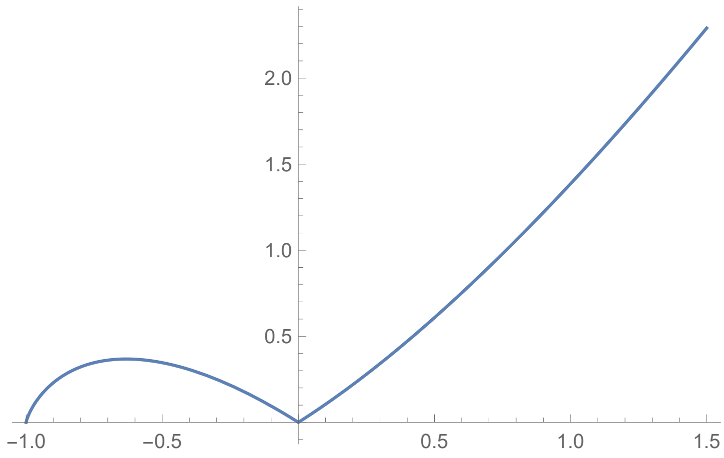

Figura 4: Il grafico di f (Tema 3).

Esercizio 2. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \sin(n^2)}{1-n^5}$$

Svolgimento. Osserviamo che $|\sin(n^2)| \leq 1$ per ogni n implica

$$\left| \frac{n^2 \sin(n^2)}{1-n^5} \right| = |\sin(n^2)| \left| \frac{n^2}{1-n^5} \right| \leq \frac{n^2}{n^5-1}.$$

Poiché abbiamo

$$\frac{n^2}{n^5-1} \sim \frac{n^2}{n^5} = \frac{1}{n^3} \quad \text{per } n \to \infty,$$

per il criterio di convergenza asintotico deduciamo che la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5-1}$$

converge, e quindi per il principio del confronto la serie originale converge assolutamente.

Esercizio 3. Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\big(\mathrm{Re}\,(\bar{z}-i)-1\big)^2}{9} + \frac{\big(\mathrm{Im}\,(\bar{z}-i)-1\big)^2}{9} \leq 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.
Svolgimento.
Scriviamo in forma algebrica $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Dunque

$$\mathrm{Re}\,(\bar{z}-i) = \mathrm{Re}\,(x-iy-i) = x, \quad \mathrm{Im}\,(\bar{z}-i) = \mathrm{Im}\,(x-iy-i) = -1-y.$$

La disequazione può essere pertanto riscritta come

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\big(x-1\big)^2}{9} + \frac{\big(-2-y\big)^2}{9} \leq 1,$$

cioè
$$\frac{9}{2} \leq \left(x-1\right)^2 + (2+y)^2 \leq 9.$$
Ricordando che $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ è l'equazione della circonferenza di raggio r centrata in (x_0, y_0), otteniamo che la disequazione determina la corona circolare compresa tra le circonferenze di raggi $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e 3 e centrate in $(1, -2)$.

Il disegno delle soluzioni è del tutto analogo alla figura 2.

Esercizio 4. Calcolare
$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x/2}}\, dx.$$
Svolgimento. Usando il cambio di variabile $\sqrt{x/2} = y$, da cui $x = 2y^2$ e $dx = 4ydy$, otteniamo
$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x/2}}\, dx = 4\int_0^{+\infty} e^{-y} y\, dy.$$
Integrando per parti si ha
$$\int e^{-y} y\, dy = -e^{-y}y + \int e^{-y}\, dy = -e^{-y}y - e^{-y};$$
ne deduciamo
$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x/2}}\, dx = 4 \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-y} y\, dy = 4 \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-y}(y-1)\right]_0^b = 4 \lim_{b\to+\infty} \left(-e^{-b}b - e^{-b} + 1\right) = 4.$$

Esercizio 5 [3+3 punti] Sia
$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{x/2}} - 1}{x^{\alpha-3}}.$$
(a) Si studi la convergenza dell'integrale
$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 4$, sia $F(x) = \int_1^{\sinh x} f_\alpha(t)\, dt$: si calcoli $F'(\log 3)$.
Svolgimento.
(a) Osserviamo che $f_\alpha \in C^0((0, +\infty))$ quindi l'integrale è improprio sia in 0 che $+\infty$. Studiamo il comportamento della funzione nei due casi separatamente:
$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx = \int_0^1 f_\alpha(x)\, dx + \int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx.$$
Essendo $e^{-\sqrt{x/2}} = 1 - \sqrt{x/2} + o(\sqrt{x})$ per $x \to 0$, vale
$$f_\alpha(x) = \frac{-\sqrt{x/2} + o(\sqrt{x})}{x^{\alpha-3}} = \frac{-1 + o(1)}{\sqrt{2}x^{\alpha-\frac{7}{2}}} \sim \frac{-1}{\sqrt{2}x^{\alpha-\frac{7}{2}}},$$
quindi, per il criterio di convergenza asintotico, l'integrale $\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx$ converge se e solo se $\alpha - 7/2 < 1$ cioè $\alpha < \frac{9}{2}$.

Studiamo ora il comportamento per $x \to +\infty$: da $\lim_{x\to+\infty} e^{-\sqrt{x/2}} = 0$ deduciamo
$$f_\alpha(x) \sim \frac{-1}{x^{\alpha-3}} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Per il criterio asintotico di convergenza, l'integrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge se e solo se $\alpha-3>1$ cioè $\alpha>4$.
In conclusione l'integrale originale converge se e solo se $4<\alpha<\frac{9}{2}$.

(b) Scriviamo

$$F(x)=\int_1^{\sinh x}\frac{e^{-\sqrt{t/2}}-1}{t}\,dt.$$

Per il teorema sulla derivata della funzione integrale (o per il teorema fondamentale del calcolo integrale) vale

$$F'(x)=\frac{e^{-\sqrt{\sinh x/2}}-1}{\sinh x}\cosh x$$

ed in particolare

$$F'(\log 3)=\frac{5}{4}\left(e^{-\sqrt{2/3}}-1\right).$$

Esercizio 6. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(\alpha\, x)-\cos\log\left(1+2x\right)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha>0$.
Svolgimento. Per gli sviluppi di Mac Laurin di $\cos y$, $\log(1+y)$ per $y\to 0$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\text{Num} &= 1-\frac{\alpha^2x^2}{2}+o(x^3)-\cos(2x-2x^2+o(x^2))\\
&= 1-\frac{\alpha^2x^2}{2}+o(x^3)-\left[1-\frac{(2x-2x^2+o(x^2))^2}{2}+o((2x-2x^2+o(x^2))^3)\right]\\
&= 1-\frac{\alpha^2x^2}{2}+o(x^3)-\left[1-\frac{(2x-2x^2+o(x^2))^2}{2}+o(x^3)\right]
\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è dato dovuto a $2x-2x^2+o(x^2)\sim 2x$ ed al principio di sostituzione negli o-piccoli. Il numeratore può essere scritto come

$$\text{Num} = 1-\frac{\alpha^2x^2}{2}+o(x^3)-\left[1-2x^2+4x^3+o(x^3)\right]=\frac{4-\alpha^2}{2}x^2-4x^3+o(x^3)$$

Per il principio di sostituzione negli infinitesimi, possiamo concludere

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(\alpha\, x)-\cos\log\left(1+2x\right)}{x^3} = \begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\frac{4-\alpha^2}{2x}=\begin{cases}+\infty & \text{se } \alpha\in(0,2)\\ -\infty & \text{se } \alpha\in(2,+\infty)\end{cases}\\ \lim_{x\to 0^+}\frac{-4x^3}{x}=-4 \quad \text{se } \alpha=2.\end{cases}$$

Esercizio facoltativo. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+e^{-x}} e^t\arctan t\,dt.$$

Per lo svolgimento v. il Tema 1.

TEMA 4

Esercizio 1. Sia

$$f(x) = |(x+4)\log(x+4)|, \qquad x \in D =]-4, +\infty[.$$

(i) Determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -4$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.
Svolgimento. $f(x) \geq 0$ su tutto il dominio, essendo il valore assoluto di una funzione.

$$\lim_{x\to-4+} |(x+4)\log(x+4)| = |\lim_{x\to-4+} (x+4)\log(x+4)| \overset{H}{=} |\lim_{x\to-4+} \frac{(x-4)^{-1}}{-(x-4)^{-2}}| = |\lim_{x\to-4+} -(x-4)| = 0$$

(o altri modi con gerarchia infiniti). La funzione è dunque prolungabile per continuità in $x = -4$, ponendo $f(-4) = 0$.

$$\lim_{x+\infty} |(x+4)\log(x+4)| = +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

DERIVATA:

$$f'(x) = \operatorname{sgn}\Big((x+4)\log(x+4)\Big) \cdot (\log(x+4)+1) \geq 0$$

$$\iff \{(x+4)\log(x+4) \geq 0\} \cap \{\log(x+4)+1 \geq 0\} \bigcup \{(x+4)\log(x+4) \leq 0\} \cap \{\log(x+4)+1 \leq 0\}$$

$$\iff \{\log(x+4) \geq 0\} \cap \{x+4 \geq 1/e\} \bigcup \{\log(x+4) \leq 0\} \cap \{x+4 \leq 1/e\} =]-4, -4+1/e] \bigcup]3, +\infty[$$

Si ha

$$\lim_{x\to-3-} f'(x) = 1 \qquad \lim_{x\to-3+} f'(x) = -1,$$

cosicché $x = -3$ è un punto angoloso. Inoltre $x = -4 + 1/e$ è punto di massimo locale, $x = -4$, $x = -3$ sono punti di minimo minimo globale, nei quali la funzione vale 0.

Il grafico di f è in figura 5.

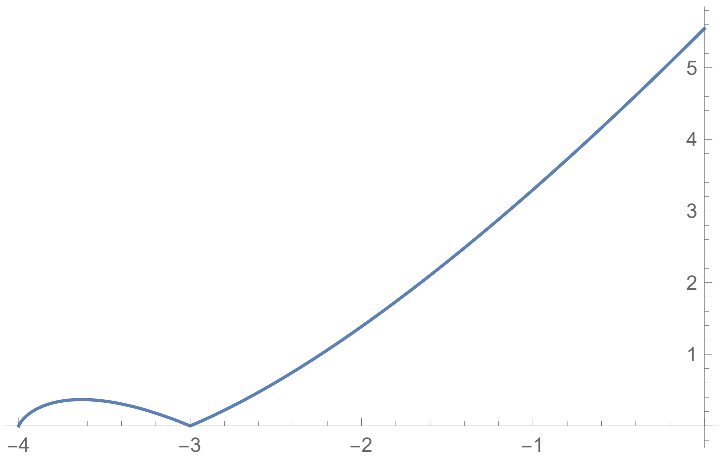

Figura 5: Il grafico di f (Tema 4).

Esercizio 2. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-n^2)\sin(n^2)}{n^5}$$

Svolgimento. Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|(2-n^2)\sin(n^2)|}{n^5}}{\frac{1}{1/n^2}} = 0,$$

per il criterio del confronto asintotico la serie è assolutamente convergente.

Esercizio 3. Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{3} \le \frac{\big(\mathrm{Re}\,(\bar z - 2i) - 1\big)^2}{4} + \frac{\big(\mathrm{Im}\,(\bar z - 2i) - 1\big)^2}{4} \le 1$$

e disegnare le soluzioni sul piano complesso.
Svolgimento. Ponendo $z = x + iy$ si ottiene

$$\frac{4}{3} \le (x-1)^2 + (-y-2-1)^2 \le 4 \iff \frac{4}{3} \le (x-1)^2 + (y+3)^2 \le 4$$

vale a dire la corona circolare compresa tra i raggi $\frac{2}{\sqrt{3}}$ e 2 e cebtro $(1,-3)$. Il disegno delle soluzioni è del tutto analogo alla figura 2.

Esercizio 4. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x/3}}\,dx.$$

Svolgimento.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x/3}} dx = \lim_{k\to\infty} \int_0^k e^{-\sqrt{x/3}} dx$$

Calcoliamo $\int_0^k e^{-\sqrt{x/3}}dx$. Sostituzione $y = \sqrt{x/3}$, $\implies$ $y^2 = x/3 \implies dx = 6ydy$,

$$\int_0^k e^{-\sqrt{x/3}} = \int_0^{\sqrt{k/3}} 6e^{-y} y dy = [-6e^{-y}y]_0^{\sqrt{k/3}} + \int_0^{\sqrt{k/3}} 6e^{-y} dy = [-6e^{-y}y]_0^{\sqrt{k/3}} + \int_0^{\sqrt{k/3}} 6e^{-y} dy =$$

$$= \Big[-6e^{-y}y\Big]_0^{\sqrt{k/3}} + \Big[-6e^{-y}\Big]_0^{\sqrt{k/3}} = -6e^{-\sqrt{k/3}}\sqrt{k/3} - (6e^{\sqrt{k/3}}) + 6$$

Facendo il limite per $k \to +\infty$ si ottiene

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x/3}}\,dx = 6$$

Esercizio 5. Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{x/3}} - 1}{x^{2\alpha-1}}.$$

(a) Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 1$, sia $F(x) = \int_1^{\arctan x} f_\alpha(t)\,dt$: si calcoli $F'(\sqrt{3})$.
Svolgimento. (a) Consideriamo

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\,dx. \tag{5}$$

Essendo $e^{-\sqrt{x/3}} = 1 - \sqrt{2x} + o(\sqrt{x})$ per $x \to 0$, abbiamo

$$f_\alpha(x) = \frac{-\sqrt{x/3} + o(\sqrt{x})}{x^{2\alpha-1}} = \frac{-\sqrt{\frac{1}{3}} + o(1)}{x^{2\alpha-\frac{3}{2}}} \sim \frac{-\sqrt{\frac{1}{3}}}{x^{2\alpha-\frac{3}{2}}},$$

quindi, per il criterio di convergenza asintotico, l'integrale in (5) converge se e solo se $2\alpha - \frac{3}{2} < 1$, quindi se e solo se $\alpha < \frac{5}{4}$.

Studiamo ora

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx. \tag{6}$$

Poichè $e^{-\sqrt{x/3}} \to 0$ per $x \to \infty$ abbiamo

$$f_\alpha(x) \sim \frac{-1}{x^{\alpha-1}}$$

e per il criterio asintotico di convergenza, l'integrale in (6) converge se e solo se $2\alpha - 1 > 1$, quindi se e solo se $\alpha > 1$.

Quindi l'integrale originale converge se e solo se $1 < \alpha < \frac{5}{4}$.

(b) Scriviamo

$$G(y) = \int_1^y f_1(t)\,dt = \int_1^y \frac{e^{-\sqrt{t/3}} - 1}{t}\,dt.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo vale

$$G'(y) = f_2(y) = \frac{e^{-\sqrt{y/3}} - 1}{y}.$$

Abbiamo $F(x) = G(\arctan x)$, da cui, per la regola di derivazione della funzione composta,

$$F'(x) = G'(\arctan x) \cdot \frac{d\arctan}{dx}(x) = G'(\arctan x) \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

quindi

$$F'(\sqrt{3}) = G'(\arctan\sqrt{3})\frac{1}{1+3} = \frac{3}{4\pi}(e^{-\sqrt{\pi}/3} - 1)$$

Esercizio 6. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha\, x) - \cosh\left(1 - e^{3x}\right)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento.

$$\begin{aligned} \text{Numeratore} &= \cosh(\alpha\, x) - \cosh\left(1 - e^{3x}\right) = \\ & 1 + \alpha^2x^2/2 + o(x^3) - \left(1 + \tfrac{1}{2}(1 - e^{3x})^2 + o((1 - e^{3x})^3)\right) \\ &= \alpha^2x^2/2 - \tfrac{1}{2}(-3x + 9x^2/2 + o(x^2))^2 + o((-3x + 9x^2/2 + o(x^2))^3) \\ &= \tfrac{\alpha^2-9}{2}x^2 - \tfrac{27}{2}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha\, x) - \cosh\left(1 - e^{3x}\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\alpha^2 - 9)x^2 - \frac{27}{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \begin{cases} +\infty & \forall\alpha > 3 \\ -\infty & \forall\alpha < 3 \\ -\frac{27}{2} & \text{se } \alpha < 3 \end{cases}$$

Esercizio facoltativo. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\,dt.$$

Per lo svolgimento v. il Tema 1.